

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP

TOÁN CAO CẤP F1 GIẢI TÍCH HÀM MỘT BIẾN

Dành cho sinh viên đại học chưa từng học giải tích, cần hiểu chắc để thi học phần Toán cao cấp F1 và dùng được sau này

Calculus I Exam Review: Single-Variable Calculus – a bilingual guide

Hàm số · Giới hạn · Liên tục · Đạo hàm · Vi phân · Quy tắc dây chuyền

Khảo sát hàm số · Cực trị · L'Hôpital · Newton · Xấp xỉ tuyến tính

Nguyên hàm · Tích phân xác định · Diện tích · Thể tích · Ứng dụng

Song ngữ Việt – Anh · Vietnamese – English

Phiên bản 1.0 – Tháng 10 năm 2026

<https://tailieuso.vn>

M U C L U C

C O N T E N T S

Chương 1. Hàm số và đồ thị – Chapter 1. Functions and Graphs.....	6
1.1. Khái niệm hàm số, miền xác định và miền giá trị – 1.1. What a Function Is: Domain and Range.....	6
1.2. Các cách biểu diễn hàm: bảng, đồ thị, công thức, hàm từng khúc – 1.2. Ways to Represent a Function: Tables, Graphs, Formulas, Piecewise Functions.....	10
1.3. Phép toán trên hàm, hàm hợp và biến đổi đồ thị – 1.3. Combining Functions and Transforming Graphs.....	14
1.4. Đa thức, hàm hữu tỉ, hàm căn và hàm đại số – 1.4. Polynomial, Rational, Root and Algebraic Functions.....	18
1.5. Hàm lượng giác và các đẳng thức cần thuộc – 1.5. Trigonometric Functions and Essential Identities.....	22
1.6. Hàm ngược và hàm lượng giác ngược – 1.6. Inverse Functions and Inverse Trigonometric Functions.....	26
1.7. Hàm mũ và các quy tắc lũy thừa – 1.7. Exponential Functions and Rules of Exponents.....	29
1.8. Hàm logarit và cách giải phương trình mũ – logarit – 1.8. Logarithmic Functions and Solving Exponential and Logarithmic Equations.....	32
1.9. Bài tập vận dụng có lời giải – 1.9. Applied exercises with solutions.....	35
1.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – 1.10. Essay questions and answer outlines.....	37
1.11. Câu hỏi trắc nghiệm – 1.11. Multiple-choice questions.....	39
Chương 2. Giới hạn và tính liên tục – Chapter 2. Limits and Continuity.....	41
2.1. Từ tiếp tuyến và vận tốc tức thời đến ý tưởng giới hạn – 2.1. From Tangent Lines and Instantaneous Velocity to the Idea of a Limit.....	41
2.2. Giới hạn của hàm số: bảng giá trị, đồ thị, giới hạn một phía – 2.2. The Limit of a Function: Tables, Graphs and One-Sided Limits.....	44
2.3. Các quy tắc tính giới hạn – 2.3. The Limit Laws.....	47
2.4. Khử dạng 0/0, định lý kẹp và giới hạn $\sin x / x$ – 2.4. Resolving 0/0 Forms, the Squeeze Theorem and the Limit of $\sin x / x$	50
2.5. Hàm liên tục và các kiểu gián đoạn – 2.5. Continuity and Types of Discontinuity.....	54
2.6. Định lý giá trị trung gian và ứng dụng chứng minh nghiệm – 2.6. The Intermediate Value Theorem and Locating Roots.....	58
2.7. Giới hạn tại vô cực và tiệm cận ngang – 2.7. Limits at Infinity and Horizontal Asymptotes.....	60
2.8. Định nghĩa epsilon – delta của giới hạn – 2.8. The Epsilon–Delta Definition of a Limit.....	64
2.9. Bài tập vận dụng có lời giải – 2.9. Applied exercises with solutions.....	67
2.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – 2.10. Essay questions and answer outlines.....	68
2.11. Câu hỏi trắc nghiệm – 2.11. Multiple-choice questions.....	70

Chương 3. Đạo hàm và các quy tắc tính – Chapter 3. The Derivative and Rules of Differentiation	73
3.1. Định nghĩa đạo hàm: giới hạn của tỉ số sai phân – 3.1. Defining the Derivative as a Limit of Difference Quotients	73
3.2. Hàm đạo hàm, khả vi, liên tục và đạo hàm cấp cao – 3.2. The Derivative as a Function, Differentiability and Higher-Order Derivatives	77
3.3. Quy tắc hằng, lũy thừa, tổng, tích và thương – 3.3. Constant, Power, Sum, Product and Quotient Rules	81
3.4. Đạo hàm của hàm lượng giác – 3.4. Derivatives of Trigonometric Functions	84
3.5. Quy tắc dây chuyền – 3.5. The Chain Rule	87
3.6. Đạo hàm của hàm ngược và hàm lượng giác ngược – 3.6. Derivatives of Inverse Functions and Inverse Trigonometric Functions	89
3.7. Đạo hàm của hàm mũ và hàm logarit – 3.7. Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions	92
3.8. Đạo hàm ẩn và đạo hàm logarit – 3.8. Implicit Differentiation and Logarithmic Differentiation	95
3.9. Bài tập vận dụng có lời giải – 3.9. Applied exercises with solutions	99
3.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – 3.10. Essay questions and answer outlines	100
3.11. Câu hỏi trắc nghiệm – 3.11. Multiple-choice questions	102
Chương 4. Đạo hàm trong thực tế: tốc độ, xấp xỉ và hình dáng đồ thị – Chapter 4. Derivatives in Practice: Rates, Approximation and Graph Shape	104
4.1. Đạo hàm là tốc độ thay đổi: chuyển động và kinh tế – 4.1. The Derivative as a Rate of Change: Motion and Economics	104
4.2. Tốc độ liên quan – 4.2. Related Rates	107
4.3. Xấp xỉ tuyến tính và vi phân – 4.3. Linear Approximation and Differentials	110
4.4. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và điểm tới hạn – 4.4. Absolute Extrema and Critical Points	112
4.5. Định lý Rolle và định lý giá trị trung bình – 4.5. Rolle's Theorem and the Mean Value Theorem	116
4.6. Dấu của đạo hàm: khoảng tăng giảm và cực trị địa phương – 4.6. Sign of the Derivative: Monotonicity and Local Extrema	119
4.7. Đạo hàm cấp hai: lồi, lõm và điểm uốn – 4.7. Second Derivative: Concavity and Inflection Points	123
4.8. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số – 4.8. Analyzing and Sketching Graphs	126
4.9. Bài tập vận dụng có lời giải – 4.9. Applied exercises with solutions	129
4.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – 4.10. Essay questions and answer outlines	131
4.11. Câu hỏi trắc nghiệm – 4.11. Multiple-choice questions	133
Chương 5. Bài toán cực trị thực tế, quy tắc L'Hôpital và nguyên hàm – Chapter 5. Applied Extrema, L'Hôpital's Rule and Antiderivatives	136
5.1. Lập bài toán cực đại, cực tiểu từ đề bài chữ – 5.1. Setting Up Applied Optimization Problems	136
5.2. Ví dụ cực trị: hàng rào, hộp, khoảng cách và chi phí – 5.2. Optimization Examples: Fencing, Boxes, Distance and Cost	139

5.3. Quy tắc L'Hôpital cho dạng $0/0$ và ∞/∞ – 5.3. <i>L'Hôpital's Rule for $0/0$ and ∞/∞</i>	142
5.4. Các dạng vô định khác và so sánh tốc độ tăng – 5.4. <i>Other Indeterminate Forms and Growth Rates</i>	145
5.5. Phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng – 5.5. <i>Newton's Method for Approximate Roots</i>	148
5.6. Nguyên hàm và tích phân bất định – 5.6. <i>Antiderivatives and Indefinite Integrals</i> .	151
5.7. Nguyên hàm với điều kiện ban đầu và bài toán chuyển động – 5.7. <i>Initial-Value Problems and Antiderivatives in Motion</i>	155
5.8. Bài tập vận dụng có lời giải – 5.8. <i>Applied exercises with solutions</i>	158
5.9. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – 5.9. <i>Essay questions and answer outlines</i>	159
5.10. Câu hỏi trắc nghiệm – 5.10. <i>Multiple-choice questions</i>	161

Chương 6. Tích phân xác định và định lý cơ bản của giải tích – Chapter 6. The Definite Integral and the Fundamental Theorem of Calculus 163

6.1. Ký hiệu tổng sigma và các công thức tổng cần thuộc – 6.1. <i>Sigma Notation and Summation Formulas</i>	163
6.2. Xấp xỉ diện tích bằng hình chữ nhật – 6.2. <i>Approximating Area with Rectangles</i> ...	166
6.3. Tổng Riemann và định nghĩa tích phân xác định – 6.3. <i>Riemann Sums and the Definition of the Definite Integral</i>	169
6.4. Diện tích đại số và tính tích phân bằng hình học – 6.4. <i>Signed Area and Evaluating Integrals Geometrically</i>	173
6.5. Tính chất của tích phân xác định – 6.5. <i>Properties of the Definite Integral</i>	176
6.6. Giá trị trung bình của hàm và định lý giá trị trung bình cho tích phân – 6.6. <i>Average Value of a Function and the Mean Value Theorem for Integrals</i>	179
6.7. Định lý cơ bản của giải tích, phần 1: đạo hàm của hàm tích phân – 6.7. <i>The Fundamental Theorem of Calculus, Part 1: Derivative of an Integral Function</i>	182
6.8. Định lý cơ bản của giải tích, phần 2: công thức Newton – Leibniz – 6.8. <i>The Fundamental Theorem of Calculus, Part 2: Evaluating by Antiderivatives</i>	185
6.9. Bài tập vận dụng có lời giải – 6.9. <i>Applied exercises with solutions</i>	188
6.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – 6.10. <i>Essay questions and answer outlines</i>	190
6.11. Câu hỏi trắc nghiệm – 6.11. <i>Multiple-choice questions</i>	192

Chương 7. Kỹ thuật tính tích phân: công thức và đổi biến – Chapter 7. Integration Techniques: Formulas and Substitution 194

7.1. Bảng tích phân cơ bản và cách khai triển trước khi tích phân – 7.1. <i>Basic Integration Formulas and Preparing the Integrand</i>	194
7.2. Lượng thay đổi ròng, quãng đường và tích phân hàm chẵn lẻ – 7.2. <i>Net Change, Total Distance and Integrals of Even and Odd Functions</i>	197
7.3. Đổi biến số cho tích phân bất định – 7.3. <i>Substitution for Indefinite Integrals</i>	201
7.4. Đổi biến cho tích phân xác định và đổi cận – 7.4. <i>Substitution for Definite Integrals and Changing Limits</i>	204
7.5. Tích phân chứa hàm mũ và hàm logarit – 7.5. <i>Integrals Involving Exponential and Logarithmic Functions</i>	207
7.6. Tích phân cho kết quả là hàm lượng giác ngược – 7.6. <i>Integrals Resulting in Inverse Trigonometric Functions</i>	210

7.7. Chọn phương pháp tính: công thức, đổi biến hay biến đổi đại số – 7.7. <i>Choosing a Method: Formula, Substitution or Algebraic Rewrite</i>	213
7.8. Tích phân hàm chứa trị tuyệt đối, hàm từng khúc và ước lượng số – 7.8. <i>Integrals of Absolute-Value and Piecewise Functions, and Numerical Estimates</i>	217
7.9. Bài tập vận dụng có lời giải – 7.9. <i>Applied exercises with solutions</i>	220
7.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – 7.10. <i>Essay questions and answer outlines</i>	221
7.11. Câu hỏi trắc nghiệm – 7.11. <i>Multiple-choice questions</i>	223

Chương 8. Ứng dụng tích phân: diện tích, thể tích và độ dài – Chapter 8. Applications of Integration: Area, Volume and Length..... 225

8.1. Diện tích giữa hai đường cong – 8.1. <i>Area Between Two Curves</i>	225
8.2. Diện tích khi tích phân theo y và vùng có nhiều phần – 8.2. <i>Area by Integrating with Respect to y and Regions with Several Parts</i>	228
8.3. Thể tích bằng phương pháp lát cắt – 8.3. <i>Volume by Slicing</i>	230
8.4. Thể tích tròn xoay: đĩa và vòng đệm – 8.4. <i>Solids of Revolution: Disks and Washers</i>	233
8.5. Thể tích tròn xoay: phương pháp vỏ trụ – 8.5. <i>Solids of Revolution: The Cylindrical Shell Method</i>	236
8.6. Chọn phương pháp đĩa, vòng đệm hay vỏ trụ – 8.6. <i>Choosing Between Disks, Washers and Shells</i>	238
8.7. Độ dài cung của đường cong – 8.7. <i>Arc Length of a Curve</i>	241
8.8. Diện tích mặt tròn xoay – 8.8. <i>Surface Area of a Solid of Revolution</i>	244
8.9. Bài tập vận dụng có lời giải – 8.9. <i>Applied exercises with solutions</i>	247
8.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – 8.10. <i>Essay questions and answer outlines</i>	248
8.11. Câu hỏi trắc nghiệm – 8.11. <i>Multiple-choice questions</i>	250

Chương 9. Ứng dụng tích phân trong vật lý và mô hình mũ – Chapter 9. Integration in Physics and Exponential Models 253

9.1. Khối lượng, mật độ và tổng lượng tích lũy – 9.1. <i>Mass, Density and Accumulated Quantity</i>	253
9.2. Công của lực biến thiên và lực lò xo – 9.2. <i>Work Done by a Variable Force and Springs</i>	256
9.3. Áp suất và lực thủy tĩnh – 9.3. <i>Hydrostatic Pressure and Force</i>	259
9.4. Mômen và khối tâm của các chất điểm và miền phẳng – 9.4. <i>Moments and Centers of Mass</i>	261
9.5. Định lý Pappus và khối tâm trong tính thể tích – 9.5. <i>The Theorem of Pappus and Centroids for Volume</i>	265
9.6. Tăng trưởng và suy giảm mũ – 9.6. <i>Exponential Growth and Decay</i>	268
9.7. Định luật làm nguội Newton và mô hình $y' = k(y - T)$ – 9.7. <i>Newton's Law of Cooling and the Model $y' = k(y - T)$</i>	270
9.8. Hàm hyperbolic: định nghĩa, đạo hàm và tích phân – 9.8. <i>Hyperbolic Functions: Definitions, Derivatives and Integrals</i>	273
9.9. Bài tập vận dụng có lời giải – 9.9. <i>Applied exercises with solutions</i>	276
9.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – 9.10. <i>Essay questions and answer outlines</i>	277
9.11. Câu hỏi trắc nghiệm – 9.11. <i>Multiple-choice questions</i>	279

Chương 10. Ôn tập tổng hợp và luyện đề thi – Chapter 10. Comprehensive Review and Exam Practice.....	282
10.1. Bảng đạo hàm và nguyên hàm phải thuộc – 10.1. Derivative and Antiderivative Tables You Must Memorize	282
10.2. Dạng bài giới hạn và liên tục thường gặp trong đề – 10.2. Typical Limit and Continuity Questions	286
10.3. Dạng bài đạo hàm và tiếp tuyến – 10.3. Typical Derivative and Tangent Line Questions	291
10.4. Dạng bài khảo sát hàm và cực trị – 10.4. Typical Graph Analysis and Extrema Questions	294
10.5. Dạng bài L'Hôpital, tốc độ liên quan và xấp xỉ – 10.5. Typical L'Hôpital, Related Rates and Approximation Questions	298
10.6. Dạng bài tích phân: nguyên hàm, đổi biến, định lý cơ bản – 10.6. Typical Integration Questions	302
10.7. Dạng bài ứng dụng tích phân: diện tích, thể tích, công – 10.7. Typical Applications-of-Integration Questions	306
10.8. Đề mẫu hoàn chỉnh có đáp án và thang điểm – 10.8. Full Sample Exam with Answers and Marking Scheme	310
10.9. Bài tập vận dụng có lời giải – 10.9. Applied exercises with solutions	314
10.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – 10.10. Essay questions and answer outlines ...	316
10.11. Câu hỏi trắc nghiệm – 10.11. Multiple-choice questions.....	318
Phụ lục A. Đáp án trắc nghiệm – Appendix A. Answers to the multiple-choice questions	320
Phụ lục B. Bảng thuật ngữ Việt – Anh – Appendix B. Vietnamese–English glossary. 332	
Phụ lục C. Tài liệu tham khảo – Appendix C. References	336

Chương 1. Hàm số và đồ thị – Chapter 1. Functions and Graphs

Mục tiêu chương – Chapter objectives

- Xác định miền xác định, miền giá trị của một hàm và tính giá trị hàm từng khúc, hàm hợp từ công thức.
Find the domain and range of a function, and evaluate piecewise and composite functions from their formulas.
- Dịch, kéo giãn, lật đồ thị của hàm cơ bản; kiểm tra hàm có hàm ngược không và tìm công thức hàm ngược.
Shift, stretch and reflect the graph of a basic function, check whether a function has an inverse, and find the inverse formula.
- Dùng đẳng thức lượng giác, quy tắc lũy thừa và logarit để giải phương trình mũ, phương trình logarit có kiểm tra điều kiện.
Use trigonometric identities and the rules of exponents and logarithms to solve exponential and logarithmic equations, checking the conditions on the answer.

1.1. Khái niệm hàm số, miền xác định và miền giá trị – 1.1. What a Function Is: Domain and Range

Hãy nghĩ tới máy bán nước tự động. Bạn bấm nút "cam", máy trả đúng một lon cam. Bạn bấm nút "chanh", máy trả đúng một lon chanh. Máy không bao giờ đưa hai thứ cho một lần bấm. Hai nút khác nhau thì có thể ra cùng một loại nước, nhưng một nút thì chỉ ra một thứ. Hàm số hoạt động đúng như vậy.

P: Picture a vending machine. Press "orange" and you get exactly one can of orange. Press "lemon" and you get exactly one can of lemon. One press never gives you two things. Two different buttons may drop the same drink, but a single button gives only one result. A function works the same way.

Hàm số là một quy tắc gán: mỗi giá trị đầu vào được ghép với đúng một giá trị đầu ra. Đầu vào thường gọi là x (biến độc lập, tức biến bạn tự chọn). Đầu ra gọi là y hay $f(x)$ (biến phụ thuộc, vì nó phụ thuộc vào x). Viết $y = f(x)$ và đọc là "y bằng f của x". Ví dụ $f(x) = 2x + 1$ nghĩa là: lấy x , nhân đôi, cộng 1. Khi đó $f(3) = 7$.

P: A function is a rule that pairs each input with exactly one output. The input is usually called x (the independent variable, the one you choose). The output is called y or $f(x)$ (the dependent variable, because it depends on x). Write $y = f(x)$ and read it as "y equals f of x". For example, $f(x) = 2x + 1$ means: take x , double it, add 1. So $f(3) = 7$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính giá trị của $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Thay x bằng số hoặc biểu thức, đặt trong ngoặc. $f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$. $f(a+1) = (a+1)^2 - 3(a+1) + 2 = a^2 + 2a + 1 - 3a - 3 + 2 = a^2 - a$. Kiểm tra bằng $a = 1$: $f(2) = 4 - 6 + 2 = 0$ và $a^2 - a = 0$. Hai kết quả khớp nhau.

VIDU: Evaluate $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Replace x with a number or an expression, wrapped in parentheses. $f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$. $f(a+1) = (a+1)^2 - 3(a+1) + 2 = a^2 + 2a + 1 - 3a - 3 + 2 = a^2 - a$. Check with $a = 1$: $f(2) = 4 - 6 + 2 = 0$ and $a^2 - a = 0$. The two results match.

Hai đầu vào khác nhau được phép cho cùng một đầu ra. Với $f(x) = x^2$, ta có $f(2) = 4$ và $f(-2) = 4$. Điều bị cấm là một đầu vào cho hai đầu ra.

P: Two different inputs may share one output. With $f(x) = x^2$, $f(2) = 4$ and $f(-2) = 4$. What is forbidden is one input giving two outputs.

Miền xác định – Domain

Miền xác định là tập mọi giá trị x mà quy tắc còn "chạy" được. Giống máy bán nước chỉ nhận đúng loại tiền, hàm số cũng có những x bị từ chối. Khi đề không nói gì thêm, bạn lấy mọi số thực mà biểu thức còn nghĩa. Chỉ có hai nơi hay gây rắc rối: mẫu số và căn bậc hai.

P: The domain is the set of all x for which the rule still works. A vending machine refuses coins it does not accept, and a function refuses some x too. If the problem says nothing else, take every real number for which the expression makes sense. Only two places usually cause trouble: denominators and square roots.

1. Nhìn biểu thức và tìm chỗ nguy hiểm: có phân số không, có căn bậc hai không. Nếu không có cả hai (như đa thức $x^2 + 5$) thì miền xác định là mọi số thực.
BUOC: Scan the expression for danger spots: is there a fraction, is there a square root? If neither appears (as in the polynomial $x^2 + 5$), the domain is all real numbers.
2. Với phân số, đặt mẫu số khác 0. Giải phương trình "mẫu = 0" rồi loại các nghiệm đó.
BUOC: For a fraction, require the denominator to be nonzero. Solve "denominator = 0" and exclude those solutions.
3. Với căn bậc hai, đặt biểu thức trong căn lớn hơn hoặc bằng 0. Giải bất phương trình đó.
BUOC: For a square root, require the expression inside to be at least 0. Solve that inequality.
4. Nếu căn nằm ở mẫu số, biểu thức trong căn phải lớn hơn 0 hẳn, vì căn bằng 0 thì mẫu bằng 0.
BUOC: If the root sits in a denominator, the inside must be strictly greater than 0, because a root equal to 0 makes the denominator 0.
5. Gộp mọi điều kiện lại và viết kết quả dưới dạng khoảng.
BUOC: Combine all conditions and write the answer as intervals.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tìm miền xác định của bốn hàm. (a) $f(x) = 1/(x - 3)$: mẫu khác 0 nên $x \neq 3$. Miền: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. (b) $g(x) = \sqrt{2x - 6}$: cần $2x - 6 \geq 0$, suy ra $x \geq 3$. Miền: $[3, +\infty)$. (c) $h(x) = \sqrt{(x + 1)/(x - 2)}$: cần $x + 1 \geq 0$ và $x \neq 2$, tức $x \geq -1$ và $x \neq 2$. Miền: $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$. (d) $k(x) = 1/\sqrt{4 - x}$: cần $4 - x > 0$, suy ra $x < 4$. Miền: $(-\infty, 4)$.

VIDU: Find the domain of four functions. (a) $f(x) = 1/(x - 3)$: the denominator must be nonzero, so $x \neq 3$. Domain: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. (b) $g(x) = \sqrt{2x - 6}$: we need $2x - 6 \geq 0$, so $x \geq 3$. Domain: $[3, +\infty)$. (c) $h(x) = \sqrt{(x + 1)/(x - 2)}$: we need $x + 1 \geq 0$ and $x \neq 2$, that is $x \geq -1$ and $x \neq 2$. Domain: $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$. (d) $k(x) = 1/\sqrt{4 - x}$: we need $4 - x > 0$, so $x < 4$. Domain: $(-\infty, 4)$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Khi có hai căn, mỗi căn cho một điều kiện và ta lấy phần chung. Với $m(x) = \sqrt{(x - 1)/\sqrt{5 - x}}$: căn trên cần $x - 1 \geq 0$, tức $x \geq 1$. Căn dưới nằm ở mẫu nên cần $5 - x > 0$, tức $x < 5$. Phần chung của $x \geq 1$ và $x < 5$ là miền $[1, 5)$.

VIDU: With two roots, each gives a condition and you keep the overlap. For $m(x) = \sqrt{(x-1)}/\sqrt{(5-x)}$: the top root needs $x-1 \geq 0$, so $x \geq 1$. The bottom root sits in a denominator, so $5-x > 0$, that is $x < 5$. The overlap of $x \geq 1$ and $x < 5$ is the domain $[1, 5)$.

Miền giá trị – Range

Miền giá trị là tập các đầu ra mà hàm thật sự tạo ra. Trong ví dụ máy bán nước, đó là danh sách các loại nước có thể rơi xuống khay. Miền xác định hỏi "được bỏ gì vào", còn miền giá trị hỏi "nhận được gì ra".

P: The range is the set of outputs the function actually produces. In the vending machine, it is the list of drinks that can land in the tray. The domain asks "what can go in", and the range asks "what can come out".

Với công thức, hãy hỏi: y nhỏ nhất, lớn nhất là bao nhiêu, và có bị bỏ sót giá trị nào không. Với đồ thị, hãy đọc độ cao thấp nhất đến cao nhất của đường cong. Cách chắc ăn là giải x theo y, rồi xem y nào làm phép giải bị hỏng.

P: With a formula, ask: what are the smallest and largest y, and is any value skipped? With a graph, read the lowest to the highest height of the curve. A reliable method is to solve for x in terms of y, then see which y breaks the solving.

VÍ DỤ / EXAMPLE – (a) $f(x) = x^2 + 5$. Vì $x^2 \geq 0$ nên $f(x) \geq 5$, và $f(0) = 5$. Miền giá trị: $[5, +\infty)$. (b) $g(x) = \sqrt{2x-6}$ luôn không âm và lấy được mọi giá trị từ 0 trở lên. Miền giá trị: $[0, +\infty)$. (c) $f(x) = 1/(x-3)$. Đặt $y = 1/(x-3)$, giải ra $x = 3 + 1/y$. Cách giải này hỏng khi $y = 0$. Miền giá trị: mọi số thực khác 0. (d) $f(x) = 2x + 1$ chỉ xét trên $\{0, 1, 2\}$: đầu ra là 1, 3, 5. Miền giá trị: $\{1, 3, 5\}$.

VIDU: (a) $f(x) = x^2 + 5$. Since $x^2 \geq 0$, $f(x) \geq 5$, and $f(0) = 5$. Range: $[5, +\infty)$. (b) $g(x) = \sqrt{2x-6}$ is never negative and takes every value from 0 upward. Range: $[0, +\infty)$. (c) $f(x) = 1/(x-3)$. Set $y = 1/(x-3)$ and solve: $x = 3 + 1/y$. This breaks when $y = 0$. Range: every real number except 0. (d) $f(x) = 2x + 1$ on $\{0, 1, 2\}$ only: the outputs are 1, 3, 5. Range: $\{1, 3, 5\}$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tìm miền giá trị của $p(x) = 4 - x^2$. Vì $x^2 \geq 0$ nên $-x^2 \leq 0$, suy ra $4 - x^2 \leq 4$. Giá trị 4 đạt được tại $x = 0$, và x càng xa 0 thì p càng nhỏ, không có đáy. Miền giá trị: $(-\infty, 4]$.

VIDU: Find the range of $p(x) = 4 - x^2$. Since $x^2 \geq 0$, $-x^2 \leq 0$, so $4 - x^2 \leq 4$. The value 4 is reached at $x = 0$, and the farther x is from 0 the smaller p gets, with no floor. Range: $(-\infty, 4]$.

Kiểm tra bằng đường thẳng đứng – The Vertical Line Test

Cho một đồ thị, làm sao biết nó có phải hàm số? Tưởng tượng quét một thanh thẳng đứng từ trái sang phải. Nếu có lúc thanh cắt đồ thị tại hai điểm trở lên, thì một x cho nhiều y, và đó không phải hàm số. Nếu mọi thanh đều cắt tối đa một điểm, đó là hàm số.

P: Given a graph, how do you know if it is a function? Imagine sweeping a vertical rod from left to right. If at any moment the rod hits the graph in two or more points, one x gives several y, so it is not a function. If every rod hits at most one point, it is a function.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đường tròn $x^2 + y^2 = 1$: thanh $x = 0$ cắt tại $(0, 1)$ và $(0, -1)$, nên không phải hàm số. Parabol $y = x^2$ thì đạt: mỗi x chỉ có một y. Parabol nằm ngang $x = y^2$ không đạt: $x = 4$ cho cả $y = 2$ và $y = -2$.

VIDU: The circle $x^2 + y^2 = 1$: the rod $x = 0$ hits $(0, 1)$ and $(0, -1)$, so it is not a function. The parabola $y = x^2$ passes: each x has one y . The sideways parabola $x = y^2$ fails: $x = 4$ gives both $y = 2$ and $y = -2$.

Đọc miền từ đồ thị như sau: chiếu đồ thị xuống trục hoành để được miền xác định, chiếu sang trục tung để được miền giá trị.

P: Read the sets off a graph like this: project the graph onto the horizontal axis for the domain, and onto the vertical axis for the range.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xét đồ thị $y = |x|$ (giá trị tuyệt đối, tức khoảng cách từ x tới 0). Đồ thị hình chữ V, đỉnh tại gốc. Mọi thanh thẳng đứng chỉ cắt một điểm nên đây là hàm số. Chiếu xuống trục hoành phủ cả trục: miền xác định là mọi số thực. Chiếu sang trục tung chỉ phủ từ 0 trở lên: miền giá trị là $[0, +\infty)$.

VIDU: Take the graph of $y = |x|$ (absolute value, the distance from x to 0). It is a V shape with its tip at the origin. Every vertical rod meets it once, so it is a function. Projecting onto the horizontal axis covers the whole axis: the domain is all real numbers. Projecting onto the vertical axis covers only 0 and above: the range is $[0, +\infty)$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên loại điểm làm mẫu bằng 0, hoặc viết $x \geq 3$ thay cho $x > 3$ khi căn nằm ở mẫu. Lỗi khác là nhầm miền xác định với miền giá trị: x là đầu vào, y là đầu ra. Cũng đừng nghĩ hai x cho cùng một y là vi phạm; chỉ một x cho hai y mới vi phạm.

LOI: Forgetting to exclude the point where a denominator is zero, or writing $x \geq 3$ instead of $x > 3$ when the root is in a denominator. Another slip is mixing up domain and range: x is the input, y is the output. Also, two x values sharing one y is allowed; only one x giving two y values breaks the rule.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Khi tính $f(a + 1)$ với $f(x) = x^2$, nhiều người viết $a^2 + 1$. Sai: phải thay nguyên khối, được $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$. Khi giải bất phương trình có nhân hoặc chia cho số âm, nhớ đổi chiều dấu: $-x \geq -5$ cho $x \leq 5$.

LOI: When computing $f(a + 1)$ for $f(x) = x^2$, many people write $a^2 + 1$. That is wrong: substitute the whole block to get $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$. When an inequality is multiplied or divided by a negative number, flip the sign: $-x \geq -5$ gives $x \leq 5$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Hàm số: mỗi x cho đúng một y . Miền xác định: mẫu $\neq 0$, trong căn bậc hai ≥ 0 . Đường thẳng đứng cắt đồ thị quá một điểm thì không phải hàm số.

THUOC: A function gives exactly one y for each x . Domain: denominator $\neq 0$, inside of a square root ≥ 0 . If a vertical line meets the graph in more than one point, it is not a function.

- Tự luyện: tìm miền xác định của $\sqrt{5 - x}$. Đáp án: $5 - x \geq 0$ nên $x \leq 5$, miền $(-\infty, 5]$.
GACH: Practice: find the domain of $\sqrt{5 - x}$. Answer: $5 - x \geq 0$ gives $x \leq 5$, so the domain is $(-\infty, 5]$.
- Tự luyện: tìm miền xác định của $(x + 2)/(x^2 - x - 6)$. Đáp án: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$ tại $x = 3$ và $x = -2$, nên miền là mọi số thực trừ -2 và 3 .
GACH: Practice: find the domain of $(x + 2)/(x^2 - x - 6)$. Answer: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$ at $x = 3$ and $x = -2$, so the domain is all real numbers except -2 and 3 .
- Tự luyện: tìm miền giá trị của $q(x) = \sqrt{x} + 2$. Đáp án: $\sqrt{x} \geq 0$ nên $q(x) \geq 2$, và $q(0) = 2$. Miền giá trị: $[2, +\infty)$.

GACH: Practice: find the range of $q(x) = \sqrt{x} + 2$. Answer: $\sqrt{x} \geq 0$, so $q(x) \geq 2$, and $q(0) = 2$. Range: $[2, +\infty)$.

1.2. Các cách biểu diễn hàm: bảng, đồ thị, công thức, hàm từng khúc – 1.2.

Ways to Represent a Function: Tables, Graphs, Formulas, Piecewise Functions

Một hàm số có thể được cho bằng bốn cách: bảng số, đồ thị, công thức và nhiều công thức ghép lại (hàm từng khúc). Cùng một hàm, cách nào cũng cho bạn cùng một thông tin: đưa vào x , nhận ra đúng một giá trị $f(x)$. Bạn cần đọc được cả bốn dạng.

A function can be given in four ways: a table of numbers, a graph, a formula, or several formulas glued together (a piecewise function). Each form carries the same information: put in x , get exactly one value $f(x)$. You need to read all four.

Đọc giá trị từ bảng – Reading values from a table

Hãy nghĩ tới bảng nhiệt độ trong ngày: cột trái là giờ, cột phải là nhiệt độ. Bảng chỉ cho những giá trị đã được ghi, nên chỗ không có trong bảng thì bạn không biết chính xác.

Think of a daily temperature chart: hours on the left, temperatures on the right. A table only lists recorded values, so anything missing from it cannot be known exactly.

1. Tìm giá trị đầu vào x trong hàng (hoặc cột) của x .
Find the input x in the x row (or column).
2. Nhìn sang ô cùng hàng (hoặc cột) của $f(x)$ và đọc số đó.
Look at the matching cell in the $f(x)$ row and read that number.
3. Muốn tìm x khi biết $f(x)$, làm ngược lại: tìm số trong hàng $f(x)$, rồi đọc x tương ứng.
To find x from a known $f(x)$, work backwards: locate the number in the $f(x)$ row, then read its x .

VÍ DỤ / EXAMPLE – Bảng cho T (giờ t): $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ứng với $T = 18, 22, 27, 25, 20$ (độ C). Khi đó $T(4) = 27$. Nhiệt độ bằng 22 độ tại $t = 2$. Còn $T(5)$ không có trong bảng: bạn chỉ ước lượng được nó nằm giữa 25 và 27, không nói được số chính xác.

A table gives T at hour t : $t = 0, 2, 4, 6, 8$ matches $T = 18, 22, 27, 25, 20$ (degrees C). So $T(4) = 27$, and the temperature is 22 at $t = 2$. $T(5)$ is not listed: you can only estimate that it lies between 25 and 27, not state an exact value.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Khi tìm x từ $f(x)$, chỉ lấy ô đầu tiên gặp được.

Một giá trị $f(x)$ có thể xuất hiện ở nhiều hàng, nên hãy quét hết bảng. Ở bảng trên, nếu thêm $t = 10$ với $T = 22$ thì $T = 22$ có hai đáp án: $t = 2$ và $t = 10$.

When finding x from $f(x)$, stopping at the first match. One value of $f(x)$ can appear in several columns, so scan the whole table. If the table above also had $t = 10$ with $T = 22$, then $T = 22$ would have two answers: $t = 2$ and $t = 10$.

Đọc giá trị từ đồ thị – Reading values from a graph

1. Muốn tính $f(a)$: tìm a trên trục ngang, đi thẳng lên hoặc xuống đến khi gặp đường cong, rồi đi ngang sang trục dọc và đọc số.

To find $f(a)$: locate a on the horizontal axis, move straight up or down to the curve, then move sideways to the vertical axis and read the number.

- Muốn tìm x khi $f(x) = c$: đi ngang từ điểm c trên trục dọc đến đường cong, rồi thả thẳng xuống trục ngang. Có thể có nhiều đáp án.
To solve $f(x) = c$: move sideways from c on the vertical axis to the curve, then drop straight down. There may be several answers.
- Kiểm tra có phải hàm không bằng phép thử đường thẳng đứng: mọi đường thẳng đứng chỉ được cắt đồ thị tối đa một lần.
Check that it is a function with the vertical line test: every vertical line may cross the graph at most once.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đồ thị là một parabol (đường cong hình chữ U) có đỉnh $(0; -4)$, cắt trục hoành tại -2 và 2 , vẽ trên đoạn từ -3 đến 3 , hai đầu mút là $(-3; 5)$ và $(3; 5)$. Đọc ra: $f(0) = -4$, $f(2) = 0$. Miền xác định là $[-3; 3]$, miền giá trị là $[-4; 5]$. Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x = -2$ và $x = 2$.

The graph is a parabola (a U-shaped curve) with vertex $(0, -4)$, crossing the horizontal axis at -2 and 2 , drawn on the segment from -3 to 3 , with endpoints $(-3, 5)$ and $(3, 5)$. Reading off: $f(0) = -4$, $f(2) = 0$. The domain is $[-3, 3]$ and the range is $[-4, 5]$. The equation $f(x) = 0$ has two solutions, $x = -2$ and $x = 2$.

Tính giá trị từ công thức – Evaluating a formula

Công thức giống công thức nấu ăn: bỏ nguyên liệu x vào, làm đúng thứ tự các phép tính, ra một món $f(x)$. Đây là dạng cho kết quả chính xác nhất, vì bạn thay được bất kỳ số nào trong miền xác định.

A formula works like a recipe: put in the ingredient x , follow the order of operations, and out comes one dish $f(x)$. It gives the most exact results, because you can substitute any number in the domain.

- Viết lại công thức, thay mỗi chữ x bằng số đã cho và đặt số đó trong ngoặc.
Rewrite the formula, replace each x with the given number, and put that number in brackets.
- Tính lũy thừa trước, rồi nhân chia, cuối cùng cộng trừ.
Do powers first, then multiplication and division, then addition and subtraction.
- Với phân số hoặc căn, kiểm tra số vừa thay có làm biểu thức vô nghĩa không: mẫu bằng 0, hoặc căn bậc hai của số âm.
With fractions or roots, check that the number does not break the expression: a zero denominator, or the square root of a negative number.

VÍ DỤ / EXAMPLE – $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Thay $x = -2$: $f(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$. Thay $x = 0,5$: $f(0,5) = 2(0,25) - 1,5 + 1 = 0,5 - 1,5 + 1 = 0$. Với $q(x) = 1/(x - 3)$, miền xác định là mọi số thực trừ 3, vì $x = 3$ làm mẫu bằng 0.

$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Put in $x = -2$: $f(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$. Put in $x = 0.5$: $f(0.5) = 2(0.25) - 1.5 + 1 = 0.5 - 1.5 + 1 = 0$. For $q(x) = 1/(x - 3)$, the domain is every real number except 3, because $x = 3$ makes the denominator zero.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên ngoặc khi thay số âm. Viết -2^2 cho ra -4 , còn $(-2)^2$ mới bằng 4.

Forgetting brackets when substituting a negative number. Writing -2^2 gives -4 , while $(-2)^2$ equals 4.

Hàm từng khúc – Piecewise functions

Giá gửi xe là ví dụ quen thuộc: mỗi khoảng thời gian một mức giá. Hàm từng khúc là hàm dùng công thức khác nhau trên các khoảng khác nhau của x .

Parking fees are a familiar case: each time band has its own price. A piecewise function uses a different formula on different intervals of x .

VÍ DỤ / EXAMPLE – Phí gửi xe $C(t)$ nghìn đồng, t là số giờ: $C(t) = 10$ nếu $0 < t \leq 2$; $C(t) = 15$ nếu $2 < t \leq 5$; $C(t) = 20$ nếu $t > 5$. Tính: $C(1,5) = 10$; $C(2) = 10$ (mức 2 thuộc khúc đầu vì có dấu $\leq$); $C(2,1) = 15$; $C(6) = 20$.

Parking fee $C(t)$ in thousand dong, t in hours: $C(t) = 10$ if $0 < t \leq 2$; $C(t) = 15$ if $2 < t \leq 5$; $C(t) = 20$ if $t > 5$. Then $C(1.5) = 10$; $C(2) = 10$ (the point 2 belongs to the first piece because of $\leq$); $C(2.1) = 15$; $C(6) = 20$.

Hàm trị tuyệt đối cũng là hàm từng khúc: $|x| = x$ nếu $x \geq 0$ và $|x| = -x$ nếu $x < 0$. Nó cho khoảng cách từ x đến 0, nên luôn không âm. Ví dụ $g(x) = |x - 2|$ bằng $x - 2$ khi $x \geq 2$ và bằng $2 - x$ khi $x < 2$. Do đó $g(0) = 2$ và $g(5) = 3$.

The absolute value is also piecewise: $|x| = x$ if $x \geq 0$ and $|x| = -x$ if $x < 0$. It gives the distance from x to 0, so it is never negative. For example $g(x) = |x - 2|$ equals $x - 2$ when $x \geq 2$ and $2 - x$ when $x < 2$. Hence $g(0) = 2$ and $g(5) = 3$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Tính $f(a)$ mà chọn nhầm khúc. Hãy xem a thuộc khoảng nào trước, rồi mới thay vào công thức của khúc đó. Chú ý mốc nổi có $\leq$ hay $<$.

Picking the wrong piece when computing $f(a)$. Decide which interval a belongs to first, then substitute into that piece. Watch whether the boundary uses $\leq$ or $<$.

Hàm chẵn, hàm lẻ – Even and odd functions

Hàm chẵn có đồ thị đối xứng qua trục tung, như gấp đôi tờ giấy theo trục dọc thì hai nửa trùng nhau. Hàm lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ: xoay 180 độ quanh gốc thì đồ thị trùng chính nó.

An even function has a graph symmetric about the y-axis: fold the paper along the vertical axis and the two halves match. An odd function is symmetric about the origin: rotate it 180 degrees around the origin and it lands on itself.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Hàm chẵn: $f(-x) = f(x)$ với mọi x trong miền xác định.

Hàm lẻ: $f(-x) = -f(x)$ với mọi x trong miền xác định. Miền xác định phải đối xứng quanh 0.

Even: $f(-x) = f(x)$ for every x in the domain. Odd: $f(-x) = -f(x)$ for every x in the domain. The domain must be symmetric about 0.

- Viết $f(-x)$: thay mỗi chữ x trong công thức bằng $(-x)$, giữ dấu ngoặc.

Write $f(-x)$: replace every x in the formula by $(-x)$, keeping the brackets.

- Rút gọn rồi so sánh với $f(x)$. Nếu bằng nhau thì hàm chẵn.

Simplify and compare with $f(x)$. If they are equal, f is even.

- Nếu không, so sánh với $-f(x)$. Nếu bằng nhau thì hàm lẻ. Nếu cả hai đều sai thì hàm không chẵn không lẻ.

If not, compare with $-f(x)$. If equal, f is odd. If both fail, f is neither.

VÍ DỤ / EXAMPLE – $f(x) = x^4 - 3x^2$: $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$, nên f chẵn. $g(x) = x^3 + x$: $g(-x) = -x^3 - x = -g(x)$, nên g lẻ. $h(x) = x^2 + x$: $h(-x) = x^2 - x$, khác $h(x)$ và khác $-h(x) = -x^2 - x$, nên h không chẵn không lẻ.
 $f(x) = x^4 - 3x^2$: $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$, so f is even. $g(x) = x^3 + x$: $g(-x) = -x^3 - x = -g(x)$, so g is odd. $h(x) = x^2 + x$: $h(-x) = x^2 - x$, which differs from $h(x)$ and from $-h(x) = -x^2 - x$, so h is neither.

Mẹo nhanh với đa thức: nếu mọi số mũ của x đều chẵn (kể cả số hạng tự do, coi như x^0) thì hàm chẵn. Nếu mọi số mũ đều lẻ thì hàm lẻ. Số mũ lẫn lộn, như $x^2 + x$, thường cho hàm không chẵn không lẻ.

A quick tip for polynomials: if every exponent of x is even (the constant term counts as x^0), the function is even. If every exponent is odd, it is odd. Mixed exponents, like $x^2 + x$, usually give a function that is neither.

Hàm tăng, hàm giảm – Increasing and decreasing functions

Đọc đồ thị từ trái sang phải. Đường đi lên là hàm tăng, đi xuống là hàm giảm. Chính xác hơn, f tăng trên một khoảng nếu với $x_1 < x_2$ trong khoảng đó thì $f(x_1) < f(x_2)$. Hàm giảm thì $f(x_1) > f(x_2)$. Với $|x|$: giảm trên $(-\infty; 0]$, tăng trên $[0; +\infty)$.

Read the graph from left to right. A rising curve is increasing, a falling one is decreasing. Precisely, f is increasing on an interval if $x_1 < x_2$ there gives $f(x_1) < f(x_2)$. For decreasing, $f(x_1) > f(x_2)$. For $|x|$: decreasing on $(-\infty, 0]$, increasing on $[0, +\infty)$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Ghi khoảng tăng, giảm bằng giá trị y . Khoảng này luôn là khoảng của x . Tránh cũng gộp hai khoảng thành một, ví dụ nói $|x|$ "tăng trên $\mathbb{R}$ ".
Writing intervals of increase or decrease in terms of y . They are always intervals of x . Also do not merge two intervals into one, such as saying $|x|$ is "increasing on $\mathbb{R}$ ".

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Kết luận chẵn lẻ chỉ vì vài cặp số trong bảng khớp nhau. Bảng chỉ gợi ý, muốn chắc phải kiểm tra $f(-x) = f(x)$ cho mọi x .
Declaring a function even because a few pairs in a table match. A table only hints; to be sure, check $f(-x) = f(x)$ for every x .

Luyện tập (đáp án ngay sau mỗi câu) – Practice (answer follows each item)

- Dùng đồ thị parabol ở trên: tìm x để $f(x) = 5$ và nêu khoảng giảm. Đáp án: $x = -3$ hoặc $x = 3$; giảm trên $[-3; 0]$, tăng trên $[0; 3]$.
Using the parabola above: find x with $f(x) = 5$ and state where it decreases. Answer: $x = -3$ or $x = 3$; decreasing on $[-3, 0]$, increasing on $[0, 3]$.
- Bảng $x = -2, -1, 0, 1, 2$ có $f = 3, 0, -1, 0, 3$. Bảng có phù hợp với hàm chẵn không? Đáp án: có, vì $f(-1) = f(1) = 0$ và $f(-2) = f(2) = 3$; nhưng chưa đủ để kết luận.
A table with $x = -2, -1, 0, 1, 2$ has $f = 3, 0, -1, 0, 3$. Is it consistent with an even function? Answer: yes, since $f(-1) = f(1) = 0$ and $f(-2) = f(2) = 3$; but this alone does not prove it.
- Xét $k(x) = x|x|$. Đáp án: $k(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -k(x)$, nên k lẻ.
Test $k(x) = x|x|$. Answer: $k(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -k(x)$, so k is odd.
- $m(x) = x^2$ xét trên $[-1; 3]$ có chẵn không? Đáp án: không, vì miền xác định không đối xứng quanh 0 (có 3 mà thiếu -3).

Is $m(x) = x^2$ on $[-1, 3]$ even? Answer: no, because the domain is not symmetric about 0 (it has 3 but not -3).

- Cho $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, tính $f(-1)$ và $f(3)$. Đáp án: $f(-1) = 2 + 3 + 1 = 6$; $f(3) = 18 - 9 + 1 = 10$.

Given $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, find $f(-1)$ and $f(3)$. Answer: $f(-1) = 2 + 3 + 1 = 6$; $f(3) = 18 - 9 + 1 = 10$.

- Với $C(t)$ ở phần gửi xe, tính $C(5)$ và $C(5.5)$. Đáp án: $C(5) = 15$ vì mốc 5 thuộc khúc hai (có $\leq$); $C(5.5) = 20$.

With $C(t)$ from the parking example, find $C(5)$ and $C(5.5)$. Answer: $C(5) = 15$ because the point 5 belongs to the second piece (it has $\leq$); $C(5.5) = 20$.

1.3. Phép toán trên hàm, hàm hợp và biến đổi đồ thị – 1.3. Combining Functions and Transforming Graphs

Bạn đã biết một hàm giống như một cái máy: bỏ số vào, máy trả số ra. Mục này cho bạn hai việc. Một là ghép các máy lại với nhau để được hàm mới. Hai là biến đổi đồ thị có sẵn thành đồ thị khác mà không phải vẽ lại từ đầu.

A function works like a machine: you feed in a number and get a number out. This section gives you two skills. One is wiring machines together to build new functions. The other is turning a known graph into a new one without redrawing it from scratch.

Cộng, trừ, nhân, chia hàm – Adding, subtracting, multiplying and dividing functions

Hai hàm f và g cùng nhận một giá trị x . Bạn tính $f(x)$ và $g(x)$ trước, rồi cộng, trừ, nhân hoặc chia hai kết quả. Giống như hai người cùng chấm một bài thi, bạn lấy tổng hoặc tích hai số điểm. Miền xác định của hàm mới là phần chung của hai miền. Với phép chia, bạn còn phải loại các x làm $g(x) = 0$.

Two functions f and g take the same input x . You compute $f(x)$ and $g(x)$ first, then add, subtract, multiply or divide the two results. It is like two graders marking the same exam, and you combine their scores. The domain of the new function is the overlap of the two domains. For division, you must also remove every x that makes $g(x) = 0$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $f(x) = 2x + 1$ và $g(x) = x^2$. Khi đó $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1$, $(f \cdot g)(x) = 2x^3 + x^2$, và $(f/g)(x) = (2x + 1)/x^2$ với $x \neq 0$. Kiểm tra tại $x = 2$: $f(2) = 5$, $g(2) = 4$, nên tổng là 9, tích là 20, thương là $5/4$. Cả ba kết quả khớp với công thức.

Let $f(x) = 2x + 1$ and $g(x) = x^2$. Then $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1$, $(f \cdot g)(x) = 2x^3 + x^2$, and $(f/g)(x) = (2x + 1)/x^2$ for $x \neq 0$. Check at $x = 2$: $f(2) = 5$ and $g(2) = 4$, so the sum is 9, the product is 20 and the quotient is $5/4$. All three match the formulas.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $f(x) = \sqrt{x + 1}$ và $g(x) = x - 3$. Miền của f cần $x + 1 \geq 0$, tức $x \geq -1$. Miền của g là mọi số thực. Phần chung là $x \geq -1$. Với phép chia, $g(x) = 0$ khi $x = 3$, nên loại điểm này. Vậy $(f/g)(x) = \sqrt{x + 1}/(x - 3)$ có miền xác định là $x \geq -1$ và $x \neq 3$. Thử tại $x = 8$: $f(8) = 3$, $g(8) = 5$, thương là $3/5$.

Let $f(x) = \sqrt{x + 1}$ and $g(x) = x - 3$. The domain of f needs $x + 1 \geq 0$, that is $x \geq -1$. The domain of g is all real numbers. The overlap is $x \geq -1$. For division, $g(x) = 0$ when $x = 3$, so remove that point. Hence $(f/g)(x) = \sqrt{x + 1}/(x - 3)$ has domain $x \geq -1$ with $x \neq 3$. Test at $x = 8$: $f(8) = 3$ and $g(8) = 5$, so the quotient is $3/5$.

Hàm hợp: hai công đoạn nối nhau – *Composition: two stages on one assembly line*

Hãy hình dung một dây chuyền làm bánh. Công đoạn một là nhào bột, công đoạn hai là nướng. Bột ra khỏi công đoạn một rồi mới vào công đoạn hai. Hàm hợp $f(g(x))$ làm đúng như vậy: số x vào máy g trước, kết quả $g(x)$ đi tiếp vào máy f . Ta đọc là "f của g của x", và viết $(f \circ g)(x)$. Hàm nằm trong ngoặc luôn chạy trước.

Picture a bakery line. Stage one kneads the dough and stage two bakes it. The dough leaves stage one before it enters stage two. The composition $f(g(x))$ works the same way: x goes into machine g first, and the output $g(x)$ moves on into machine f . We read it "f of g of x" and write $(f \circ g)(x)$. The function inside the parentheses always runs first.

1. Xác định hàm trong cùng, đó là công đoạn một. Với $f(g(x))$, nó là g .
Identify the innermost function; that is stage one. In $f(g(x))$, it is g .
2. Viết $g(x)$ ra thành biểu thức cụ thể.
Write $g(x)$ out as an explicit expression.
3. Thay nguyên biểu thức đó vào chỗ mọi chữ x trong công thức của f .
Substitute that whole expression wherever x appears in the formula for f .
4. Rút gọn, rồi tìm miền xác định: x phải thuộc miền của g , và $g(x)$ phải thuộc miền của f .
Simplify, then find the domain: x must lie in the domain of g , and $g(x)$ must lie in the domain of f .

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $f(x) = 2x + 1$ và $g(x) = x^2$. Ta có $f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$. Đổi thứ tự: $g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$. Tại $x = 3$: $f(g(3)) = f(9) = 19$, còn $g(f(3)) = g(7) = 49$. Hai thứ tự cho hai kết quả khác nhau.

Let $f(x) = 2x + 1$ and $g(x) = x^2$. Then $f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$. Swap the order: $g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$. At $x = 3$: $f(g(3)) = f(9) = 19$, while $g(f(3)) = g(7) = 49$. The two orders give different results.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $f(x) = \sqrt{x}$ và $g(x) = x - 4$. Khi đó $f(g(x)) = \sqrt{x - 4}$. Căn chỉ nhận số không âm, nên $x - 4 \geq 0$, tức là $x \geq 4$. Miền xác định là $[4; +\infty)$.

Let $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = x - 4$. Then $f(g(x)) = \sqrt{x - 4}$. A square root accepts only non-negative numbers, so $x - 4 \geq 0$, that is $x \geq 4$. The domain is $[4, +\infty)$.

Dây chuyền có thể dài hơn hai công đoạn. Với ba hàm, bạn lặp lại cách làm trên từ trong ra ngoài, mỗi lần gỡ một lớp.

An assembly line can have more than two stages. With three functions, repeat the same routine from the inside out, peeling one layer at a time.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $h(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ và $f(x) = x + 1$. Tính $f(g(h(x)))$. Lớp trong cùng: $h(x) = x^2$. Lớp giữa: $g(x^2) = 2x^2$. Lớp ngoài: $f(2x^2) = 2x^2 + 1$. Thử tại $x = 3$: $h(3) = 9$, $g(9) = 18$, $f(18) = 19$. Công thức cho $2 \cdot 9 + 1 = 19$. Khớp.

Let $h(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ and $f(x) = x + 1$. Compute $f(g(h(x)))$. Innermost layer: $h(x) = x^2$. Middle layer: $g(x^2) = 2x^2$. Outer layer: $f(2x^2) = 2x^2 + 1$. Test at $x = 3$: $h(3) = 9$, $g(9) = 18$, $f(18) = 19$. The formula gives $2 \cdot 9 + 1 = 19$. It matches.

Biến đổi đồ thị từ $y = x^2$ – Transforming graphs, starting from $y = x^2$

Đồ thị $y = x^2$ là parabol có đỉnh ở gốc (0; 0), mở lên trên. Mỗi thay đổi nhỏ trong công thức làm parabol này trượt, giãn, co hoặc lật. Dùng bảng sau để tra:

The graph of $y = x^2$ is a parabola with its vertex at the origin (0, 0), opening upward. Each small change in the formula slides, stretches, squeezes or flips it. Use this table to look things up:

Công thức mới <i>New formula</i>	Phép biến đổi <i>Transformation</i>	Ví dụ với x^2 <i>Example with x^2</i>
$y = f(x - h), h > 0$	Dịch sang phải h đơn vị <i>Shift right by h units</i>	$y = (x - 2)^2$: đỉnh ở (2; 0) $y = (x - 2)^2$: vertex at (2, 0)
$y = f(x + h), h > 0$	Dịch sang trái h đơn vị <i>Shift left by h units</i>	$y = (x + 3)^2$: đỉnh ở (-3; 0) $y = (x + 3)^2$: vertex at (-3, 0)
$y = f(x) + k, k > 0$	Dịch lên k đơn vị <i>Shift up by k units</i>	$y = x^2 + 1$: đỉnh ở (0; 1) $y = x^2 + 1$: vertex at (0, 1)
$y = f(x) - k, k > 0$	Dịch xuống k đơn vị <i>Shift down by k units</i>	$y = x^2 - 4$: đỉnh ở (0; -4) $y = x^2 - 4$: vertex at (0, -4)
$y = a \cdot f(x), a > 1$	Giãn theo chiều dọc a lần; $0 < a < 1$ thì co <i>Stretch vertically by a; if $0 < a < 1$, squeeze</i>	$y = 3x^2$ hẹp hơn; $y = x^2/2$ rộng hơn $y = 3x^2$ is narrower; $y = x^2/2$ is wider
$y = f(cx), c > 1$	Co theo chiều ngang c lần; $0 < c < 1$ thì giãn <i>Squeeze horizontally by c; if $0 < c < 1$, stretch</i>	$y = (2x)^2 = 4x^2$
$y = -f(x)$	Đối xứng qua trục hoành <i>Reflect about the x-axis</i>	$y = -x^2$: mở xuống $y = -x^2$ opens downward
$y = f(-x)$	Đối xứng qua trục tung <i>Reflect about the y-axis</i>	$y = (-x - 2)^2 = (x + 2)^2$: đỉnh ở (-2; 0) $y = (-x - 2)^2 = (x + 2)^2$: vertex at (-2, 0)

Với $y = x^2$, lật qua trục tung không đổi gì, vì $(-x)^2 = x^2$. Hàm như vậy gọi là hàm chẵn: đồ thị đã đối xứng sẵn qua trục tung.

For $y = x^2$, reflecting about the y-axis changes nothing, because $(-x)^2 = x^2$. Such a function is called even: its graph is already symmetric about the y-axis.

1. Đưa công thức về dạng $a \cdot f(c(x - h)) + k$. Nếu x có hệ số, rút hệ số đó ra khỏi ngoặc.

Rewrite the formula as $a \cdot f(c(x - h)) + k$. If x has a coefficient, factor it out of the bracket.

2. Đọc bốn số: h là độ dịch ngang, c là hệ số co giãn ngang, a là hệ số co giãn dọc (dấu âm nghĩa là lật), k là độ dịch dọc.

Read off four numbers: h is the horizontal shift, c the horizontal scaling factor, a the vertical scaling factor (a negative sign means a flip), and k the vertical shift.

3. Chọn một điểm dễ theo dõi trên đồ thị gốc, ví dụ đỉnh hoặc điểm (1; 1).

Pick an easy point on the original graph to follow, such as the vertex or the point (1, 1).

4. Áp dụng từng phép theo thứ tự ở khung sau, ghi lại tọa độ điểm sau mỗi phép.

Apply each operation in the order given in the note after the example, writing down the point's coordinates after each step.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Vẽ $y = -2(x + 1)^2 + 3$ từ $y = x^2$. Làm bốn bước theo thứ tự: dịch trái 1 đơn vị được $(x + 1)^2$; giãn dọc 2 lần được $2(x + 1)^2$; lật qua trục hoành được $-2(x + 1)^2$; dịch lên 3 đơn vị được kết quả cuối. Theo dõi điểm (1; 1) trên parabol gốc: sau dịch trái là (0; 1), sau giãn là (0; 2), sau lật là (0; -2), sau dịch lên là (0; 1). Thế $x = 0$ vào công thức: $-2 \cdot 1 + 3 = 1$. Khớp. Đỉnh ở (-1; 3), parabol mở xuống.

Sketch $y = -2(x + 1)^2 + 3$ from $y = x^2$. Do four steps in order: shift left 1 to get $(x + 1)^2$; stretch vertically by 2 to get $2(x + 1)^2$; reflect about the x-axis to get $-2(x + 1)^2$; shift up 3 for the final graph. Track the point (1, 1) on the original parabola: after the left shift it is (0, 1), after the stretch (0, 2), after the reflection (0, -2), after the up shift (0, 1). Substitute $x = 0$ into the formula: $-2 \cdot 1 + 3 = 1$. It matches. The vertex is at (-1, 3) and the parabola opens downward.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Vẽ $y = (2x - 4)^2 + 1$. Rút hệ số: $y = (2(x - 2))^2 + 1$. Đọc ra $h = 2$, $c = 2$, $a = 1$, $k = 1$. Theo dõi điểm (1; 1): dịch phải 2 được (3; 1); co ngang 2 lần thì làm trên đồ thị gốc trước nên xếp co ngang trước dịch: (1; 1) co thành (0,5; 1), dịch phải 2 thành (2,5; 1), dịch lên 1 thành (2,5; 2). Thế $x = 2,5$: $(5 - 4)^2 + 1 = 2$. Khớp. Đỉnh ở (2; 1).

Sketch $y = (2x - 4)^2 + 1$. Factor: $y = (2(x - 2))^2 + 1$. Read off $h = 2$, $c = 2$, $a = 1$, $k = 1$. Track the point (1, 1) on $y = x^2$: squeeze horizontally by 2 to get (0.5, 1), shift right 2 to get (2.5, 1), shift up 1 to get (2.5, 2). Substitute $x = 2.5$: $(5 - 4)^2 + 1 = 2$. It matches. The vertex is at (2, 1).

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Thứ tự an toàn: co giãn ngang, dịch ngang, co giãn dọc (kể cả lật), dịch dọc. Mỗi phép chỉ tác động lên kết quả của phép trước.

A safe order: horizontal scaling, horizontal shift, vertical scaling (including flips), vertical shift. Each step acts only on the result of the previous one.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm thứ tự hợp hàm. Viết $f(g(x))$ mà thay ngược, đưa f vào g , sẽ ra kết quả khác (xem 19 và 49 ở trên). Luôn làm hàm trong ngoặc trước.

Mixing up the order of composition. Writing $f(g(x))$ but substituting the other way round, putting f into g , gives a different result (see 19 and 49 above). Always run the function inside the parentheses first.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm chiều dịch. $y = (x - 2)^2$ dịch sang PHẢI, không phải trái, vì đỉnh nằm ở $x = 2$, nơi biểu thức trong ngoặc bằng 0. Dấu cộng trong ngoặc thì dịch trái. Ngoài ngoặc thì ngược lại: $x^2 + 1$ dịch lên.

Getting the shift direction wrong. $y = (x - 2)^2$ shifts RIGHT, not left, because the vertex sits at $x = 2$, where the bracket equals 0. A plus inside the bracket shifts left. Outside the bracket it is the other way: $x^2 + 1$ shifts up.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Với $y = (2x - 4)^2$, nhiều bạn dịch phải 4. Hãy đưa về dạng $(2(x - 2))^2$: dịch phải 2, rồi co ngang 2 lần. Phải rút hệ số của x ra ngoài trước khi đọc độ dịch.

With $y = (2x - 4)^2$, many students shift right by 4. Rewrite it as $(2(x - 2))^2$: shift right by 2, then squeeze horizontally by 2. Factor the coefficient of x out before reading the shift.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm chỗ đặt số hạng cộng. $2x^2 + 3$ là giãn rồi dịch lên 3, đỉnh ở $(0; 3)$. Còn $2(x^2 + 3) = 2x^2 + 6$, đỉnh ở $(0; 6)$. Số cộng nằm trong hay ngoài ngoặc của hệ số đứng trước làm kết quả khác đi.

Misplacing an added number. $2x^2 + 3$ is a stretch followed by a shift up 3, with the vertex at $(0, 3)$. But $2(x^2 + 3) = 2x^2 + 6$, with the vertex at $(0, 6)$. Whether the number sits inside or outside the bracket of the leading factor changes the result.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên loại điểm làm mẫu bằng 0 khi chia hàm. $(f/g)(x)$ chỉ có nghĩa khi $g(x) \neq 0$, dù công thức sau khi rút gọn trông không còn mẫu. Hãy tìm miền trước khi rút gọn.

Forgetting to remove points where the denominator is 0 when dividing functions. $(f/g)(x)$ makes sense only when $g(x) \neq 0$, even if the simplified formula no longer shows a denominator. Find the domain before simplifying.

1.4. Đa thức, hàm hữu tỉ, hàm căn và hàm đại số – 1.4. Polynomial, Rational, Root and Algebraic Functions

Đa thức là biểu thức gồm các số nhân với lũy thừa nguyên không âm của x , cộng hoặc trừ với nhau, ví dụ $f(x) = -2x^3 + 5x - 7$. Mỗi số đứng trước x^k gọi là hệ số. Số mũ lớn nhất của x gọi là bậc, hệ số đi kèm nó gọi là hệ số cao nhất. Số hạng không chứa x gọi là hệ số tự do.

A polynomial is a sum of terms, each a number times a whole-number power of x , such as $f(x) = -2x^3 + 5x - 7$. The number in front of x^k is a coefficient. The largest exponent is the degree, and its coefficient is the leading coefficient. The term without x is the constant term.

Với $f(x) = -2x^3 + 5x - 7$: bậc là 3, hệ số cao nhất là -2 , hệ số tự do là -7 . Hệ số của x^2 bằng 0 vì không có số hạng đó. Đồ thị cắt trục tung tại $y = f(0) = -7$.

For $f(x) = -2x^3 + 5x - 7$, the degree is 3, the leading coefficient is -2 and the constant term is -7 . The coefficient of x^2 is 0 because that term is missing. The graph meets the y -axis at $y = f(0) = -7$.

Nghiệm của đa thức là số x làm $f(x) = 0$. Về hình học, đó là chỗ đồ thị chạm hoặc cắt trục hoành. Đa thức bậc n có tối đa n nghiệm thực.

A root (or zero) of a polynomial is a number x that makes $f(x) = 0$. Geometrically, it is where the graph touches or crosses the x -axis. A polynomial of degree n has at most n real roots.

Tìm nghiệm bằng phân tích nhân tử – Finding roots by factoring

Ý tưởng đời thường: tích của các số bằng 0 thì ít nhất một số trong đó bằng 0. Vì vậy ta viết đa thức thành tích các thừa số rồi cho từng thừa số bằng 0.

Everyday idea: if a product is zero, at least one factor is zero. So we write the polynomial as a product of factors and set each factor equal to 0.

1. Đặt thừa số chung ra ngoài nếu có (ví dụ x , hoặc một số).

Pull out any common factor first (for example x , or a number).

2. Phân tích phần còn lại. Với bậc hai $x^2 + bx + c$, tìm hai số có tích bằng c và tổng bằng b .

Factor what remains. For $x^2 + bx + c$, find two numbers whose product is c and whose sum is b .

3. Nếu không phân tích được, tính $\Delta = b^2 - 4ac$ cho bậc hai $ax^2 + bx + c$. $\Delta > 0$ có hai nghiệm, $\Delta = 0$ có một nghiệm, $\Delta < 0$ không có nghiệm thực. Nghiệm là $x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / (2a)$.

If it will not factor, compute $\Delta = b^2 - 4ac$ for $ax^2 + bx + c$. $\Delta > 0$ gives two roots, $\Delta = 0$ gives one, $\Delta < 0$ gives no real roots. The roots are $x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / (2a)$.

4. Cho từng thừa số bằng 0, giải ra x .

Set each factor equal to 0 and solve for x .

5. Thay lại từng nghiệm vào $f(x)$ để kiểm tra.

Substitute each root back into $f(x)$ to check.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tìm nghiệm của $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$. Đặt x ra ngoài: $f(x) = x(x^2 - 2x - 3)$. Tìm hai số có tích -3 và tổng -2 : đó là -3 và 1 . Vậy $f(x) = x(x - 3)(x + 1)$. Cho từng thừa số bằng 0: $x = 0$, $x = 3$, $x = -1$. Kiểm tra $x = 3$: $27 - 18 - 9 = 0$, đúng.

Find the roots of $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$. Pull out x : $f(x) = x(x^2 - 2x - 3)$. Two numbers with product -3 and sum -2 are -3 and 1 . So $f(x) = x(x - 3)(x + 1)$. Setting each factor to 0 gives $x = 0$, $x = 3$, $x = -1$. Check $x = 3$: $27 - 18 - 9 = 0$, correct.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $x^2 - 4x + 1 = 0$. Không có hai số nguyên nào có tích 1 và tổng -4 , nên dùng công thức. Ở đây $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$. $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$, và $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Vậy $x = (4 \pm 2\sqrt{3}) / 2 = 2 \pm \sqrt{3}$. Kiểm tra $x = 2 + \sqrt{3}$: $x^2 = 7 + 4\sqrt{3}$, $-4x = -8 - 4\sqrt{3}$, nên $x^2 - 4x + 1 = 7 + 4\sqrt{3} - 8 - 4\sqrt{3} + 1 = 0$, đúng.

Solve $x^2 - 4x + 1 = 0$. No two integers have product 1 and sum -4 , so use the formula. Here $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$. $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$, and $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. So $x = (4 \pm 2\sqrt{3}) / 2 = 2 \pm \sqrt{3}$. Check $x = 2 + \sqrt{3}$: $x^2 = 7 + 4\sqrt{3}$, $-4x = -8 - 4\sqrt{3}$, so $x^2 - 4x + 1 = 7 + 4\sqrt{3} - 8 - 4\sqrt{3} + 1 = 0$, correct.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $x^2 + 2x + 5 = 0$. Ta có $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, nên không có nghiệm thực. Đồ thị mở lên, đỉnh tại $x = -1$ với $y = 1 - 2 + 5 = 4 > 0$, nên cả đồ thị nằm trên trục hoành.

Solve $x^2 + 2x + 5 = 0$. Here $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, so there are no real roots. The parabola opens upward with its vertex at $x = -1$, where $y = 1 - 2 + 5 = 4 > 0$, so the whole graph stays above the x -axis.

Phác đồ thị từ nghiệm và hệ số cao nhất – *Sketching a graph from roots and the leading coefficient*

Nghiệm cho biết đồ thị cắt trục hoành ở đâu. Dấu của hệ số cao nhất cho biết hình dạng hai đầu. Bậc chẵn: hai đầu cùng hướng, lên nếu hệ số cao nhất dương, xuống nếu âm. Bậc lẻ: hai đầu ngược hướng, đầu phải lên nếu hệ số cao nhất dương.

The roots tell you where the graph meets the x -axis. The sign of the leading coefficient tells you what the ends do. Even degree: both ends point the same way, up if the leading coefficient is positive, down if negative. Odd degree: the ends point opposite ways, and the right end goes up if the leading coefficient is positive.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Bậc hai $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 3)(x + 1)$. Nghiệm -1 và 3 . Hệ số cao nhất $-1 < 0$ nên parabol mở xuống. Đỉnh nằm giữa hai nghiệm, tại $x = 1$, với $y = -1 + 2 + 3 = 4$. Cắt trục tung tại $y = 3$. Vẽ: đi lên từ $(-1; 0)$, đạt đỉnh $(1; 4)$, rồi đi xuống qua $(3; 0)$.

Quadratic $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 3)(x + 1)$. The roots are -1 and 3 . The leading coefficient $-1 < 0$, so the parabola opens downward. The vertex sits midway between the roots, at $x = 1$, with $y = -1 + 2 + 3 = 4$. It meets the y -axis at $y = 3$. Draw it rising from $(-1, 0)$, peaking at $(1, 4)$, then falling through $(3, 0)$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Bậc ba $y = x^3 - 2x^2 - 3x$, nghiệm $-1, 0, 3$, hệ số cao nhất $1 > 0$. Đầu trái đi xuống, đầu phải đi lên. Từ dưới, đồ thị cắt trục tại -1 đi lên, cắt tại 0 đi xuống, cắt tại 3 đi lên. Kiểm tra: $f(-0.5) = 0.875 > 0$ và $f(1) = -4 < 0$, khớp với hình vẽ.

Cubic $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ has roots $-1, 0, 3$ and leading coefficient $1 > 0$. The left end goes down and the right end goes up. Starting low, the graph crosses at -1 going up, crosses at 0 going down, and crosses at 3 going up. Check: $f(-0.5) = 0.875 > 0$ and $f(1) = -4 < 0$, matching the sketch.

GHI CHÚ / NOTE – Nghiệm lặp, như $(x - 2)^2$ trong tích, làm đồ thị chạm trục tại 2 rồi quay lại, không cắt qua.

A repeated root, such as $(x - 2)^2$ in a product, makes the graph touch the axis at 2 and turn back without crossing.

Hàm căn và hàm đại số – Root and algebraic functions

Hàm căn có dạng $\sqrt[n]{x}$. Căn bậc chẵn như $\sqrt{x}$ chỉ xác định khi $x \geq 0$. Căn bậc lẻ như $\sqrt[3]{x}$ xác định với mọi x . Hàm đại số là hàm tạo từ x bằng cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa hữu tỉ và căn, ví dụ $y = \sqrt{(x^2 + 1)} / (x - 3)$.

A root function has the form $\sqrt[n]{x}$. An even root such as $\sqrt{x}$ is defined only for $x \geq 0$. An odd root such as $\sqrt[3]{x}$ is defined for every x . An algebraic function is built from x using addition, subtraction, multiplication, division, rational powers and roots, for example $y = \sqrt{(x^2 + 1)} / (x - 3)$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tìm miền xác định của $y = \sqrt{6 - 2x}$. Biểu thức dưới căn phải không âm: $6 - 2x \geq 0$, suy ra $2x \leq 6$, tức $x \leq 3$. Miền xác định là mọi $x \leq 3$. Với $y = \sqrt[3]{6 - 2x}$, căn bậc lẻ nên không có điều kiện, mọi x đều dùng được.

Find the domain of $y = \sqrt{6 - 2x}$. The expression under the root must be non-negative: $6 - 2x \geq 0$, so $2x \leq 6$, that is $x \leq 3$. The domain is every $x \leq 3$. For $y = \sqrt[3]{6 - 2x}$ the root is odd, so there is no condition and every x works.

Hàm hữu tỉ và tiệm cận ban đầu – Rational functions and first look at asymptotes

Hàm hữu tỉ là thương của hai đa thức, $f(x) = P(x) / Q(x)$, giống như phân số là thương của hai số nguyên. Miền xác định là mọi x làm $Q(x) \neq 0$.

A rational function is a quotient of two polynomials, $f(x) = P(x) / Q(x)$, just as a fraction is a quotient of two integers. Its domain is every x with $Q(x) \neq 0$.

Tiệm cận là đường thẳng mà đồ thị tiến sát vô hạn nhưng không chạm tới. Nếu $Q(a) = 0$ còn $P(a) \neq 0$, đường $x = a$ là tiệm cận đứng. Nếu bậc P nhỏ hơn bậc Q , đường $y = 0$ là tiệm cận ngang. Nếu hai bậc bằng nhau, tiệm cận ngang là $y =$ tỉ số hai hệ số cao nhất.

An asymptote is a line the graph gets endlessly close to without reaching. If $Q(a) = 0$ while $P(a) \neq 0$, the line $x = a$ is a vertical asymptote. If the degree of P is less than the degree of Q , $y = 0$ is a horizontal asymptote. If the degrees are equal, the horizontal asymptote is $y =$ the ratio of the leading coefficients.

VÍ DỤ / EXAMPLE – $f(x) = (2x + 1) / (x - 2)$. Mẫu bằng 0 tại $x = 2$, tử tại đó bằng $5 \neq 0$, nên miền xác định là $x \neq 2$ và $x = 2$ là tiệm cận đứng. Hai bậc đều bằng 1, hệ số cao nhất là 2 và 1, nên tiệm cận ngang là $y = 2$.

$f(x) = (2x + 1) / (x - 2)$. The denominator is 0 at $x = 2$, where the numerator is $5 \neq 0$, so the domain is $x \neq 2$ and $x = 2$ is a vertical asymptote. Both degrees are 1, with leading coefficients 2 and 1, so the horizontal asymptote is $y = 2$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – $f(x) = (3x^2 + 1) / (x^2 - 4)$. Để thấy đồ thị làm gì khi x rất lớn, chia cả tử và mẫu cho x^2 : $f(x) = (3 + 1/x^2) / (1 - 4/x^2)$. Khi x lớn, $1/x^2$ và $4/x^2$ gần 0, nên $f(x)$ gần 3. Tiệm cận ngang là $y = 3$. Mẫu bằng 0 tại $x = 2$ và $x = -2$, tử tại đó bằng $13 \neq 0$, nên cả hai là tiệm cận đứng.

$f(x) = (3x^2 + 1) / (x^2 - 4)$. To see what the graph does for very large x , divide numerator and denominator by x^2 : $f(x) = (3 + 1/x^2) / (1 - 4/x^2)$. For large x , $1/x^2$ and $4/x^2$ are close to 0, so $f(x)$ is close to 3. The horizontal asymptote is $y = 3$. The denominator is 0 at $x = 2$ and $x = -2$, where the numerator is $13 \neq 0$, so both are vertical asymptotes.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Thấy mẫu bằng 0 là kết luận ngay có tiệm cận đứng. Với $g(x) = (x^2 - 1) / (x - 1) = x + 1$ khi $x \neq 1$, tử cũng bằng 0 tại $x = 1$, nên đồ thị chỉ thủng một điểm, không có tiệm cận đứng. Hãy rút gọn nhân tử chung trước.

Assuming a zero denominator always means a vertical asymptote. For $g(x) = (x^2 - 1) / (x - 1) = x + 1$ when $x \neq 1$, the numerator is also 0 at $x = 1$, so the graph just has a hole, not an asymptote. Cancel common factors first.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên rằng chia cả hai vế cho x làm mất nghiệm $x = 0$. Hãy đặt x ra ngoài thay vì chia. Một lỗi nữa: nhầm dấu khi viết nghiệm, vì $(x + 1)$ cho nghiệm -1 , không phải 1.

Dividing both sides by x and losing the root $x = 0$. Pull x out as a factor instead of dividing. Another slip is the sign of a root: $(x + 1)$ gives the root -1 , not 1.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm hướng hai đầu khi hệ số cao nhất âm. Với $y = -x^3$ (bậc lẻ, hệ số âm), đầu trái đi lên và đầu phải đi xuống, ngược với $y = x^3$. Hãy nhìn bậc và dấu của hệ số cao nhất trước khi vẽ.

Getting the ends backwards when the leading coefficient is negative. For $y = -x^3$ (odd degree, negative coefficient), the left end goes up and the right end goes down, the opposite of $y = x^3$. Check the degree and the sign of the leading coefficient before you draw.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Bậc là số mũ lớn nhất. Nghiệm là x làm $f(x) = 0$. Hệ số cao nhất quyết định hướng hai đầu đồ thị. Hàm hữu tỉ xác định khi mẫu khác 0. Tiệm cận đứng ở nghiệm của mẫu (sau khi rút gọn).

The degree is the largest exponent. A root is an x with $f(x) = 0$. The leading coefficient decides the direction of the ends. A rational function is defined where the denominator is not 0. Vertical asymptotes sit at roots of the denominator (after cancelling).

1.5. Hàm lượng giác và các đẳng thức cần thuộc – 1.5. Trigonometric Functions and Essential Identities

Hàm lượng giác dùng một góc để cho ra một con số, và các con số đó lặp lại theo vòng. Vì vậy chúng mô tả sóng âm, dòng điện xoay chiều, con lắc, tức mọi chuyển động lặp đi lặp lại. Điểm xuất phát là đường tròn đơn vị: đường tròn tâm $O(0, 0)$, bán kính 1.

Trigonometric functions turn an angle into a number, and those numbers repeat in cycles. That is why they describe sound waves, alternating current and pendulums, anything that moves in a loop. The starting point is the unit circle: a circle centered at $O(0, 0)$ with radius 1.

Radian: đo góc bằng độ dài cung – Radians: measuring an angle by arc length

Hãy tưởng tượng bạn đi bộ dọc mép một sân tròn bán kính 1 mét. Quãng bạn đã đi chính là số đo góc bạn đã quét, tính bằng radian (rad). Đi hết một vòng dài 2π mét, nên một vòng đầy là 2π rad, nửa vòng là π rad.

Picture yourself walking along the edge of a round yard with a 1-meter radius. The distance you walk is the angle you have swept, measured in radians (rad). One full lap is 2π meters, so a full turn is 2π rad and a half turn is π rad.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $180^\circ = \pi$ rad. Đổi độ sang radian: nhân với $\pi/180$. Đổi radian sang độ: nhân với $180/\pi$.

$180^\circ = \pi$ rad. Degrees to radians: multiply by $\pi/180$. Radians to degrees: multiply by $180/\pi$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đổi 150° ra radian: $150 \cdot \pi/180 = 5\pi/6$. Đổi $7\pi/4$ ra độ: $(7\pi/4) \cdot 180/\pi = 7 \cdot 45 = 315^\circ$.

Convert 150° to radians: $150 \cdot \pi/180 = 5\pi/6$. Convert $7\pi/4$ to degrees: $(7\pi/4) \cdot 180/\pi = 7 \cdot 45 = 315^\circ$.

Với sân tròn bán kính r bất kỳ, quãng đường đi được là $s = r \cdot \theta$, trong đó θ tính bằng radian. Công thức này chỉ đúng khi dùng radian, không dùng cho độ.

On a yard of any radius r , the distance walked is $s = r \cdot \theta$, where θ is in radians. This formula works only with radians, not degrees.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Một bánh xe bán kính 5 cm quay một góc $2\pi/3$ rad. Độ dài cung mép bánh đi qua là $s = 5 \cdot 2\pi/3 = 10\pi/3$ cm, khoảng 10,47 cm.

A wheel of radius 5 cm turns through $2\pi/3$ rad. The arc length along its rim is $s = 5 \cdot 2\pi/3 = 10\pi/3$ cm, about 10.47 cm.

sin, cos, tan trên đường tròn đơn vị – Sine, cosine and tangent on the unit circle

Từ điểm $(1, 0)$, quay ngược chiều kim đồng hồ một góc θ . Bạn dừng ở điểm $P(x, y)$ trên đường tròn. Khi đó $\cos \theta = x$ (hoành độ), $\sin \theta = y$ (tung độ), và $\tan \theta = y/x$ với x khác 0.

From the point $(1, 0)$, rotate counterclockwise by an angle θ . You stop at a point $P(x, y)$ on the circle. Then $\cos \theta = x$ (the horizontal coordinate), $\sin \theta = y$ (the vertical coordinate), and $\tan \theta = y/x$ when x is not 0.

Vì x và y luôn nằm giữa -1 và 1 , nên $\sin$ và $\cos$ luôn nằm trong đoạn $[-1, 1]$. Còn $\tan$ có thể nhận mọi giá trị, và không xác định khi $\cos \theta = 0$.

Since x and y always lie between -1 and 1 , sine and cosine always stay in $[-1, 1]$. Tangent can take any value, and it is undefined when $\cos \theta = 0$.

Ba hàm còn lại là nghịch đảo của ba hàm trên: $\csc \theta = 1/\sin \theta$, $\sec \theta = 1/\cos \theta$, $\cot \theta = 1/\tan \theta = x/y$. Mỗi hàm chỉ xác định khi mẫu số khác 0.

The other three are reciprocals of the first three: $\csc \theta = 1/\sin \theta$, $\sec \theta = 1/\cos \theta$, $\cot \theta = 1/\tan \theta = x/y$. Each is defined only when its denominator is not 0.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Điểm $P(-3/5, 4/5)$ nằm trên đường tròn đơn vị vì $9/25 + 16/25 = 1$. Ta có $\sin \theta = 4/5$, $\cos \theta = -3/5$, $\tan \theta = (4/5)/(-3/5) = -4/3$. Ba hàm nghịch đảo: $\csc \theta = 5/4$, $\sec \theta = -5/3$, $\cot \theta = -3/4$.

The point $P(-3/5, 4/5)$ lies on the unit circle because $9/25 + 16/25 = 1$. So $\sin \theta = 4/5$, $\cos \theta = -3/5$, $\tan \theta = (4/5)/(-3/5) = -4/3$. The reciprocals: $\csc \theta = 5/4$, $\sec \theta = -5/3$, $\cot \theta = -3/4$.

Góc θ Angle θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan \theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	không xác định undefined

MỆO / TIP – Nhớ sin của năm góc trên theo dãy $\sqrt{0}/2, \sqrt{1}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{4}/2$. Cos là dãy ngược lại.

Remember sine for the five angles as the sequence $\sqrt{0}/2, \sqrt{1}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{4}/2$. Cosine is the same sequence in reverse.

Với góc ở phần tư khác, lấy góc nhọn tương ứng rồi gắn dấu theo vị trí điểm P. Phần tư I: sin, cos đều dương. Phần tư II: chỉ sin dương. Phần tư III: chỉ tan dương. Phần tư IV: chỉ cos dương.

For angles in other quadrants, take the matching acute angle and attach a sign based on where P lies. Quadrant I: sine and cosine are both positive. Quadrant II: only sine is positive. Quadrant III: only tangent is positive. Quadrant IV: only cosine is positive.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính sin và cos của $5\pi/6$. Góc này ở phần tư II, góc nhọn tương ứng là $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$. Sin dương nên $\sin 5\pi/6 = 1/2$. Cos âm nên $\cos 5\pi/6 = -\sqrt{3}/2$.

Find sine and cosine of $5\pi/6$. This angle is in quadrant II, and the matching acute angle is $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$. Sine is positive, so $\sin 5\pi/6 = 1/2$. Cosine is negative, so $\cos 5\pi/6 = -\sqrt{3}/2$.

Các đẳng thức cần thuộc – Identities you must know

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Lý do: điểm $(\cos \theta, \sin \theta)$ nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Reason: the point $(\cos \theta, \sin \theta)$ lies on the circle $x^2 + y^2 = 1$.

Chia cả hai vế cho $\cos^2\theta$ (khi $\cos \theta$ khác 0), bạn được $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. Chia cho $\sin^2\theta$ (khi $\sin \theta$ khác 0) thì được $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

Divide both sides by $\cos^2\theta$ (when $\cos \theta$ is not 0) and you get $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. Divide by $\sin^2\theta$ (when $\sin \theta$ is not 0) and you get $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1\end{aligned}$$

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\sin 75^\circ$. Viết $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$. Ta có $\sin 75^\circ = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$.

Find $\sin 75^\circ$. Write $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$. Then $\sin 75^\circ = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\cos 105^\circ$. Viết $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$. Ta có $\cos 105^\circ = (1/2)(\sqrt{2}/2) - (\sqrt{3}/2)(\sqrt{2}/2) = (\sqrt{2} - \sqrt{6})/4$. Kết quả âm, khớp với việc 105° nằm ở phần tư II.

Find $\cos 105^\circ$. Write $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$. Then $\cos 105^\circ = (1/2)(\sqrt{2}/2) - (\sqrt{3}/2)(\sqrt{2}/2) = (\sqrt{2} - \sqrt{6})/4$. The result is negative, matching the fact that 105° is in quadrant II.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $\sin x = 3/5$ và x ở phần tư II. Từ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ta có $\cos^2 x = 16/25$. Ở phần tư II $\cos$ âm, nên $\cos x = -4/5$. Vậy $\sin 2x = 2 \cdot (3/5) \cdot (-4/5) = -24/25$.

Given $\sin x = 3/5$ with x in quadrant II. From $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos^2 x = 16/25$. Cosine is negative in quadrant II, so $\cos x = -4/5$. Then $\sin 2x = 2 \cdot (3/5) \cdot (-4/5) = -24/25$.

Biên độ và chu kỳ – Amplitude and period

Sin và cos lặp lại sau mỗi 2π , còn tan lặp lại sau mỗi π . Với hàm $y = A \sin(Bx + C) + D$, bạn đọc bốn đại lượng sau: biên độ là $|A|$ (độ cao của sóng so với đường giữa), chu kỳ là $2\pi/|B|$, độ dịch ngang là $-C/B$, và đường giữa là $y = D$.

Sine and cosine repeat every 2π , while tangent repeats every π . For $y = A \sin(Bx + C) + D$, read off four quantities: the amplitude is $|A|$ (the height of the wave above its midline), the period is $2\pi/|B|$, the horizontal shift is $-C/B$, and the midline is $y = D$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xét $y = 3 \sin(2x - \pi/2) + 1$. Biên độ là 3. Chu kỳ là $2\pi/2 = \pi$. Độ dịch ngang là $-(-\pi/2)/2 = \pi/4$, tức dịch sang phải $\pi/4$. Đường giữa $y = 1$, nên giá trị lớn nhất là $1 + 3 = 4$ và nhỏ nhất là $1 - 3 = -2$.

Take $y = 3 \sin(2x - \pi/2) + 1$. The amplitude is 3. The period is $2\pi/2 = \pi$. The horizontal shift is $-(-\pi/2)/2 = \pi/4$, so the graph moves right by $\pi/4$. The midline is $y = 1$, so the maximum is $1 + 3 = 4$ and the minimum is $1 - 3 = -2$.

Với tan, hệ số B đổi chu kỳ thành $\pi/|B|$. Ví dụ $y = \tan 3x$ lặp lại sau mỗi $\pi/3$.

For tangent, the factor B changes the period to $\pi/|B|$. For example, $y = \tan 3x$ repeats every $\pi/3$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Một thành phố có số giờ ban ngày dao động quanh mức 12 giờ, ngày dài nhất có 14 giờ và ngày ngắn nhất có 10 giờ. Đường giữa là 12, biên độ là $14 - 12 = 2$, chu kỳ là 365 ngày nên $B = 2\pi/365$. Mô hình: $y = 2 \sin(2\pi/365 \cdot (t - t_0)) + 12$, với t_0 là ngày để sóng bắt đầu đi lên qua đường giữa.

A city has daylight hours that swing around 12 hours, with 14 hours on the longest day and 10 on the shortest. The midline is 12, the amplitude is $14 - 12 = 2$, and the period is 365 days, so $B = 2\pi/365$.

The model is $y = 2 \sin(2\pi/365 \cdot (t - t_0)) + 12$, where t_0 is the day the wave starts rising through the midline.

Giải phương trình lượng giác đơn giản – Solving simple trigonometric equations

1. Đưa phương trình về dạng $\sin(\dots) = \text{số}$, $\cos(\dots) = \text{số}$ hoặc $\tan(\dots) = \text{số}$.
Rewrite the equation as $\sin(\dots) = \text{number}$, $\cos(\dots) = \text{number}$ or $\tan(\dots) = \text{number}$.
2. Tìm góc nhọn có giá trị đó trong bảng góc đặc biệt.
Find the acute angle with that value in the special-angle table.
3. Dùng dấu theo phần tư để tìm mọi góc trong một vòng $[0, 2\pi)$.
Use the quadrant signs to find every angle within one turn $[0, 2\pi)$.
4. Nếu bên trong có hệ số như $2x$, hãy cộng thêm các vòng 2π trước, rồi mới chia.
If the inside has a factor like $2x$, add the extra turns of 2π first, then divide.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $2 \sin x = 1$ trên $[0, 2\pi)$. Ta có $\sin x = 1/2$. Góc nhọn là $\pi/6$. Sin dương ở phần tư I và II, nên $x = \pi/6$ hoặc $x = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

Solve $2 \sin x = 1$ on $[0, 2\pi)$. Then $\sin x = 1/2$. The acute angle is $\pi/6$. Sine is positive in quadrants I and II, so $x = \pi/6$ or $x = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $\cos 2x = 1/2$ trên $[0, 2\pi)$. Khi x chạy trong $[0, 2\pi)$, góc $2x$ chạy trong $[0, 4\pi)$. Cos bằng $1/2$ tại $\pi/3$ và $5\pi/3$, rồi lặp lại tại $7\pi/3$ và $11\pi/3$. Chia đôi: $x = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$.

Solve $\cos 2x = 1/2$ on $[0, 2\pi)$. As x runs through $[0, 2\pi)$, the angle $2x$ runs through $[0, 4\pi)$. Cosine equals $1/2$ at $\pi/3$ and $5\pi/3$, then again at $7\pi/3$ and $11\pi/3$. Halving gives $x = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $\sin 2x = \sin x$ trên $[0, 2\pi)$. Dùng góc nhân đôi: $2 \sin x \cos x - \sin x = 0$, tức $\sin x (2 \cos x - 1) = 0$. Nếu $\sin x = 0$ thì $x = 0$ hoặc π . Nếu $\cos x = 1/2$ thì $x = \pi/3$ hoặc $5\pi/3$.

Solve $\sin 2x = \sin x$ on $[0, 2\pi)$. Use the double angle: $2 \sin x \cos x - \sin x = 0$, so $\sin x (2 \cos x - 1) = 0$. If $\sin x = 0$ then $x = 0$ or π . If $\cos x = 1/2$ then $x = \pi/3$ or $5\pi/3$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $\tan x = -1$ trên $[0, 2\pi)$. Góc nhọn có tan bằng 1 là $\pi/4$. Tan âm ở phần tư II và IV, nên $x = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$ hoặc $x = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$. Hai nghiệm cách nhau đúng π , khớp với chu kỳ của tan.

Solve $\tan x = -1$ on $[0, 2\pi)$. The acute angle with tangent 1 is $\pi/4$. Tangent is negative in quadrants II and IV, so $x = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$ or $x = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$. The two solutions are exactly π apart, matching the period of tangent.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chia hai vế cho $\sin x$ ở ví dụ trên sẽ làm mất nghiệm $\sin x = 0$. Hãy đặt thừa số chung thay vì chia.

Dividing both sides by $\sin x$ in the last example would lose the solutions where $\sin x = 0$. Factor instead of dividing.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết $\sin(a + b) = \sin a + \sin b$ là sai. Thử $a = b = \pi/2$: vế trái bằng $\sin \pi = 0$, vế phải bằng 2. Cũng nhớ $(\sin x)^2$ viết là $\sin^2 x$, khác $\sin(x^2)$.

Writing $\sin(a + b) = \sin a + \sin b$ is wrong. Try $a = b = \pi/2$: the left side is $\sin \pi = 0$, the right side is 2. Also remember that $(\sin x)^2$ is written $\sin^2 x$, which differs from $\sin(x^2)$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên đổi máy tính sang chế độ radian khi đề cho góc dạng $\pi/6$, hoặc bỏ sót nghiệm ở phần tư thứ hai.

Forgetting to switch the calculator to radian mode when the angle is given like $\pi/6$, or missing the solution in the second quadrant.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Tính chu kỳ của $y = \sin 4x$ là $4 \cdot 2\pi$ thay vì $2\pi/4 = \pi/2$. Hệ số B càng lớn thì sóng càng dày, chu kỳ càng ngắn.

Computing the period of $y = \sin 4x$ as $4 \cdot 2\pi$ instead of $2\pi/4 = \pi/2$. The larger B is, the denser the wave and the shorter the period.

1.6. Hàm ngược và hàm lượng giác ngược – 1.6. Inverse Functions and Inverse Trigonometric Functions

Hãy nghĩ đến việc chạy phim ngược. Hàm f biến độ C thành độ F, còn hàm ngược biến độ F trở lại đúng độ C ban đầu. Nói gọn: f làm gì thì hàm ngược, ký hiệu f^{-1} , hoàn tác việc đó. Đầu vào của f là đầu ra của f^{-1} và ngược lại.

Think of playing a film backwards. A function f turns Celsius into Fahrenheit, and its inverse turns Fahrenheit back into the original Celsius. In short, f^{-1} undoes whatever f does. The inputs of f are the outputs of f^{-1} , and the other way round.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $f(C) = 9C/5 + 32$. Đặt $F = 9C/5 + 32$. Trừ 32 hai vế: $F - 32 = 9C/5$. Nhân hai vế với $5/9$ thì được $C = 5(F - 32)/9$. Kiểm tra: $f(100) = 180 + 32 = 212$, và $5(212 - 32)/9 = 5 \cdot 180/9 = 100$, đúng là về lại 100 độ C.

Let $f(C) = 9C/5 + 32$. Set $F = 9C/5 + 32$. Subtract 32 from both sides: $F - 32 = 9C/5$. Multiply both sides by $5/9$ to get $C = 5(F - 32)/9$. Check: $f(100) = 180 + 32 = 212$, and $5(212 - 32)/9 = 5 \cdot 180/9 = 100$, so we land back on 100 degrees Celsius.

Khi nào hàm có hàm ngược – When a function has an inverse

Chạy ngược chỉ được nếu từ kết quả suy ra duy nhất một đầu vào. Hàm như vậy gọi là hàm một-một: hai đầu vào khác nhau luôn cho hai đầu ra khác nhau. Hàm $y = x^2$ không thế: $f(2) = f(-2) = 4$, nên biết kết quả 4 thì không rõ đầu vào là 2 hay -2.

Running backwards works only if each result points to exactly one input. Such a function is called one-to-one: different inputs always give different outputs. The function $y = x^2$ is not one-to-one, since $f(2) = f(-2) = 4$. Knowing the result 4, you cannot tell whether the input was 2 or -2.

Nhìn đồ thị, bạn dùng phép kiểm tra đường nằm ngang: kẻ mọi đường ngang có thể. Nếu có đường cắt đồ thị từ hai điểm trở lên thì hàm không một-một. Nếu mỗi đường ngang cắt nhiều nhất một điểm thì hàm một-một và có hàm ngược.

On a graph, use the horizontal line test: draw every horizontal line you can. If some line meets the graph at two or more points, the function is not one-to-one. If every horizontal line meets it at most once, the function is one-to-one and has an inverse.

Cách tìm công thức ngược – Finding the inverse formula

1. Kiểm tra hàm một-một trên miền đang xét (bằng đường nằm ngang hoặc bằng cách giải ra được duy nhất một x).

Check that the function is one-to-one on the domain you are using (horizontal line test, or solving and getting a single x).

2. Viết $y = f(x)$.

Write $y = f(x)$.

3. Giải phương trình để rút x theo y .

Solve the equation for x in terms of y .

4. Đổi tên: thay x bằng y và y bằng x . Kết quả là $y = f^{-1}(x)$.

Swap the letters: replace x with y and y with x . The result is $y = f^{-1}(x)$.

5. Ghi miền: miền xác định của f^{-1} là miền giá trị của f , và miền giá trị của f^{-1} là miền xác định của f .

State the domains: the domain of f^{-1} is the range of f , and the range of f^{-1} is the domain of f .

6. Thử lại bằng một số cụ thể: tính f rồi đưa kết quả vào f^{-1} , phải ra đúng số ban đầu.

Test with one concrete number: compute f , feed the result into f^{-1} , and you must get the starting number back.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $f(x) = (2x + 1)/(x - 3)$, với $x \neq 3$. Đặt $y = (2x + 1)/(x - 3)$. Nhân chéo: $y(x - 3) = 2x + 1$, tức $xy - 3y = 2x + 1$. Gom x về một vế: $x(y - 2) = 3y + 1$, nên $x = (3y + 1)/(y - 2)$. Đổi tên ta được $f^{-1}(x) = (3x + 1)/(x - 2)$, với $x \neq 2$. Kiểm tra: $f(4) = 9/1 = 9$ và $f^{-1}(9) = 28/7 = 4$, đúng là về lại 4. Miền giá trị của f là mọi số khác 2, khớp với miền xác định của f^{-1} .

Let $f(x) = (2x + 1)/(x - 3)$, $x \neq 3$. Set $y = (2x + 1)/(x - 3)$. Cross-multiply: $y(x - 3) = 2x + 1$, so $xy - 3y = 2x + 1$. Collect x on one side: $x(y - 2) = 3y + 1$, so $x = (3y + 1)/(y - 2)$. After swapping letters, $f^{-1}(x) = (3x + 1)/(x - 2)$, $x \neq 2$. Check: $f(4) = 9/1 = 9$ and $f^{-1}(9) = 28/7 = 4$, so we land back on 4. The range of f is every number except 2, which matches the domain of f^{-1} .

Đồ thị đối xứng qua $y = x$ – Graphs are mirror images across $y = x$

Nếu điểm (a, b) nằm trên đồ thị của f thì (b, a) nằm trên đồ thị của f^{-1} . Hai điểm này đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$. Ở ví dụ trên, $(4, 9)$ thuộc f còn $(9, 4)$ thuộc f^{-1} . Muốn vẽ f^{-1} , bạn lật đồ thị f qua đường $y = x$ như gấp tờ giấy dọc theo đường ấy.

If the point (a, b) lies on the graph of f , then (b, a) lies on the graph of f^{-1} . These two points are mirror images across the line $y = x$. In the example, $(4, 9)$ is on f and $(9, 4)$ is on f^{-1} . To sketch f^{-1} , flip the graph of f across $y = x$, as if folding the paper along that line.

Hạn chế miền và hàm lượng giác ngược – Restricting the domain and inverse trigonometric functions

Hàm không một-một vẫn có thể cứu bằng cách chỉ giữ một khúc mà trên đó nó một-một. Khúc này gọi là miền bị hạn chế. Với x^2 ta giữ $x \geq 0$, và hàm ngược chính là $\sqrt{x}$.

A function that fails the test can still be rescued by keeping only a piece on which it is one-to-one. That piece is the restricted domain. For x^2 we keep $x \geq 0$, and the inverse is $\sqrt{x}$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $f(x) = (x + 2)^2$ trên miền $x \geq -2$. Đặt $y = (x + 2)^2$. Vì $x + 2 \geq 0$ nên $x + 2 = \sqrt{y}$, suy ra $x = \sqrt{y} - 2$. Đổi tên: $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$. Miền giá trị của f là $[0, \infty)$, nên f^{-1} xác định trên $[0, \infty)$ và nhận giá trị trong $[-2, \infty)$. Kiểm tra: $f(1) = 9$ và $f^{-1}(9) = 3 - 2 = 1$.

Let $f(x) = (x + 2)^2$ on the domain $x \geq -2$. Set $y = (x + 2)^2$. Since $x + 2 \geq 0$, we have $x + 2 = \sqrt{y}$, so $x = \sqrt{y} - 2$. After swapping letters, $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$. The range of f is $[0, \infty)$, so f^{-1} is defined on $[0, \infty)$ and takes values in $[-2, \infty)$. Check: $f(1) = 9$ and $f^{-1}(9) = 3 - 2 = 1$.

Sin, cos, tan lặp lại vô hạn lần nên không một-một. Quy ước chung là chọn các khúc sau, rồi lật qua $y = x$:

Sine, cosine and tangent repeat forever, so none is one-to-one. The standard convention is to keep the pieces in this table, then reflect across $y = x$:

Hàm ngược <i>Inverse</i>	Khúc giữ lại của hàm gốc <i>Piece of the original kept</i>	Miền xác định <i>Domain</i>	Miền giá trị <i>Range</i>
$\arcsin x$	$\sin x$ trên $[-\pi/2, \pi/2]$ <i>$\sin x$ on $[-\pi/2, \pi/2]$</i>	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$
$\arccos x$	$\cos x$ trên $[0, \pi]$ <i>$\cos x$ on $[0, \pi]$</i>	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	$\tan x$ trên $(-\pi/2, \pi/2)$ <i>$\tan x$ on $(-\pi/2, \pi/2)$</i>	mọi số thực <i>all real numbers</i>	$(-\pi/2, \pi/2)$

Hiểu đơn giản: $\arcsin x$ là góc nằm trong khoảng cho phép mà sin của nó bằng x . Hai bên bảng đã nói rõ góc "cho phép" nằm ở đâu.

In plain words, $\arcsin x$ is the angle, inside the allowed interval, whose sine is x . The table says exactly where the allowed angles live.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\arcsin(1/2)$: góc trong $[-\pi/2, \pi/2]$ có sin bằng $1/2$ là $\pi/6$. Tính $\arccos(-1/2)$: góc trong $[0, \pi]$ có cos bằng $-1/2$ là $2\pi/3$. Tính $\arctan(-1)$: góc trong $(-\pi/2, \pi/2)$ có tan bằng -1 là $-\pi/4$. Còn $\arcsin(\sin(5\pi/6))$: $\sin(5\pi/6) = 1/2$, rồi $\arcsin(1/2) = \pi/6$, không phải $5\pi/6$ vì $5\pi/6$ nằm ngoài $[-\pi/2, \pi/2]$.

Evaluate $\arcsin(1/2)$: the angle in $[-\pi/2, \pi/2]$ with sine $1/2$ is $\pi/6$. Evaluate $\arccos(-1/2)$: the angle in $[0, \pi]$ with cosine $-1/2$ is $2\pi/3$. Evaluate $\arctan(-1)$: the angle in $(-\pi/2, \pi/2)$ with tangent -1 is $-\pi/4$. Now $\arcsin(\sin(5\pi/6))$: $\sin(5\pi/6) = 1/2$, then $\arcsin(1/2) = \pi/6$, not $5\pi/6$, because $5\pi/6$ lies outside $[-\pi/2, \pi/2]$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $f(f^{-1}(x)) = x$ và $f^{-1}(f(x)) = x$ khi x nằm trong miền thích hợp. Miền giá trị của $\arcsin$ là $[-\pi/2, \pi/2]$, của $\arccos$ là $[0, \pi]$, của $\arctan$ là $(-\pi/2, \pi/2)$.

$f(f^{-1}(x)) = x$ and $f^{-1}(f(x)) = x$ when x is in the right domain. The range of $\arcsin$ is $[-\pi/2, \pi/2]$, of $\arccos$ is $[0, \pi]$, and of $\arctan$ is $(-\pi/2, \pi/2)$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm $f^{-1}(x)$ với $1/f(x)$. Số mũ -1 ở đây là ký hiệu hàm ngược, không phải lũy thừa. Với $f(x) = 2x$ thì $f^{-1}(x) = x/2$, còn $1/f(x) = 1/(2x)$, hai kết quả khác nhau. Tương tự $\sin^{-1} x$ nghĩa là $\arcsin x$, không phải $1/\sin x$.

Confusing $f^{-1}(x)$ with $1/f(x)$. The exponent -1 here marks the inverse function, not a power. For $f(x) = 2x$, $f^{-1}(x) = x/2$ while $1/f(x) = 1/(2x)$, which are different. Likewise $\sin^{-1} x$ means $\arcsin x$, not $1/\sin x$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên hạn chế miền rồi vẫn viết hàm ngược, hoặc quên đổi chỗ x và y ở bước cuối. Ngoài ra, nhiều bạn viết $\arcsin(\sin x) = x$ với mọi x , trong khi chỉ đúng khi x thuộc $[-\pi/2, \pi/2]$.

Forgetting to restrict the domain before writing an inverse, or forgetting to swap x and y at the last step. Many students also write $\arcsin(\sin x) = x$ for every x , which holds only when x is in $[-\pi/2, \pi/2]$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chọn khúc miền nào thì hàm ngược đi theo khúc đó. Với x^2 trên $x \leq 0$, hàm ngược là $-\sqrt{x}$ chứ không phải $\sqrt{x}$. Hãy nhìn dấu của miền gốc trước khi chọn dấu căn.

The piece you keep decides the inverse. For x^2 on $x \leq 0$, the inverse is $-\sqrt{x}$, not $\sqrt{x}$. Look at the sign of the original domain before choosing the sign of the root.

1.7. Hàm mũ và các quy tắc lũy thừa – 1.7. Exponential Functions and Rules of Exponents

Bạn gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng, lãi 6% một năm. Sau 1 năm có $100 \times 1,06 = 106$ triệu. Sau 2 năm có $106 \times 1,06 = 112,36$ triệu. Mỗi năm số tiền được nhân thêm cùng một hệ số 1,06. Kiểu tăng nhân lên đều đặn này dẫn tới hàm mũ. Sau t năm, số tiền là $100 \times 1,06^t$.

Say you deposit 100 million dong at 6% interest per year. After 1 year you have $100 \times 1.06 = 106$ million. After 2 years you have $106 \times 1.06 = 112.36$ million. Each year the balance is multiplied by the same factor, 1.06. This steady multiplying leads to the exponential function. After t years the balance is 100×1.06^t .

Hàm mũ cơ số a và đồ thị – The exponential function with base a and its graph

Hàm mũ có dạng $y = a^x$, trong đó cơ số a là hằng số dương khác 1 và số mũ x là biến. Đừng nhầm với hàm lũy thừa $y = x^2$, nơi cơ số là biến còn số mũ cố định. Với $x = 10$, hàm 2^x cho 1024, còn x^2 chỉ cho 100. Về lâu dài, hàm mũ vượt hàm lũy thừa.

An exponential function has the form $y = a^x$, where the base a is a positive constant other than 1 and the exponent x is the variable. Do not mix it up with the power function $y = x^2$, where the base varies and the exponent is fixed. At $x = 10$, 2^x gives 1024 while x^2 gives only 100. Over the long run the exponential wins.

- Miền xác định là mọi số thực. Miền giá trị là các số dương, tức khoảng $(0; +\infty)$.
The domain is all real numbers. The range is the positive numbers, the interval $(0, +\infty)$.
- Đồ thị luôn đi qua điểm $(0; 1)$ vì $a^0 = 1$, và nằm hẳn phía trên trục hoành.
The graph always passes through $(0, 1)$ because $a^0 = 1$, and it stays above the x -axis.

- Nếu $a > 1$, hàm tăng; khi x càng âm, đồ thị càng sát trục hoành. Nếu $0 < a < 1$, hàm giảm; đồ thị sát trục hoành khi x lớn dần. Trục hoành $y = 0$ là tiệm cận ngang, tức đường thẳng mà đồ thị tiến sát mãi nhưng không chạm.

If $a > 1$ the function increases, and the graph hugs the x -axis as x becomes very negative. If $0 < a < 1$ the function decreases, and the graph hugs the x -axis as x grows large. The line $y = 0$ is a horizontal asymptote: a line the graph approaches forever without touching.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Lập bảng giá trị cho $y = 2^x$ và $y = (1/2)^x$ tại $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Với 2^x ta được 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8. Với $(1/2)^x$ ta được 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8. Cả hai cùng qua $(0; 1)$. Hàm đầu tăng vì cơ số 2 lớn hơn 1. Hàm sau giảm vì cơ số 1/2 nhỏ hơn 1, và hai đồ thị đối xứng nhau qua trục tung.

Make a table of values for $y = 2^x$ and $y = (1/2)^x$ at $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$. For 2^x you get 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8. For $(1/2)^x$ you get 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8. Both pass through $(0, 1)$. The first rises because its base 2 is greater than 1. The second falls because its base 1/2 is less than 1, and the two graphs mirror each other across the y -axis.

Cơ số e và lãi kép liên tục – The base e and continuous compounding

Giả sử số tiền P được ghép lãi n lần mỗi năm với lãi suất năm r (viết dạng số thập phân, 6% là 0,06). Sau t năm, số tiền là $A = P(1 + r/n)^{(nt)}$. Cho n tăng rất lớn, tức lãi được ghép liên tục, biểu thức tiến tới một số cố định: $e \approx 2,718282$. Số e là giới hạn của $(1 + 1/n)^n$ khi n tăng vô hạn.

Suppose an amount P is compounded n times per year at annual rate r (as a decimal, so 6% is 0.06). After t years the balance is $A = P(1 + r/n)^{(nt)}$. Let n grow very large, meaning the interest is compounded continuously, and the expression settles at a fixed number: $e \approx 2.718282$. The number e is the limit of $(1 + 1/n)^n$ as n grows without bound.

Ghép lãi n lần/năm: $A = P(1 + r/n)^{(nt)}$ | Ghép liên tục: $A = P \cdot e^{(rt)}$

Hàm $y = e^x$ gọi là hàm mũ tự nhiên. Đồ thị của nó có dạng như mọi hàm mũ cơ số lớn hơn 1, đi qua (0; 1) và tăng dần.

The function $y = e^x$ is called the natural exponential function. Its graph looks like any exponential with base greater than 1: it passes through (0, 1) and keeps rising.

Quy tắc lũy thừa – Rules of exponents

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Với $a, b > 0$ và x, y là số thực: $a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$; $a^x / a^y = a^{(x-y)}$; $(a^x)^y = a^{(xy)}$; $(ab)^x = a^x \cdot b^x$; $a^0 = 1$; $a^{-x} = 1/a^x$; $a^{(1/n)}$ là căn bậc n của a.

For $a, b > 0$ and real x, y : $a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$; $a^x / a^y = a^{(x-y)}$; $(a^x)^y = a^{(xy)}$; $(ab)^x = a^x \cdot b^x$; $a^0 = 1$; $a^{-x} = 1/a^x$; $a^{(1/n)}$ is the nth root of a.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Rút gọn $(2^3 \cdot 2^4) / 2^5$. Cộng mũ ở tử: 2^7 . Trừ mũ: $2^{(7-5)} = 2^2 = 4$.

Simplify $(2^3 \cdot 2^4) / 2^5$. Add the exponents on top: 2^7 . Subtract: $2^{(7-5)} = 2^2 = 4$.

Giải phương trình mũ – Solving exponential equations

Khi hai vế viết được thành lũy thừa cùng cơ số, hai số mũ phải bằng nhau. Nếu $a^u = a^v$ với $a > 0$, $a \neq 1$ thì $u = v$. Các bước như sau:

When both sides can be written as powers of the same base, the exponents must be equal. If $a^u = a^v$ with $a > 0$, $a \neq 1$, then $u = v$. The steps:

- Viết mỗi vế thành lũy thừa của cùng một cơ số (thường là số nguyên tố nhỏ như 2, 3, 5).

Write each side as a power of one common base (often a small prime like 2, 3 or 5).

- Dùng quy tắc lũy thừa để gộp mỗi vế thành một lũy thừa duy nhất.

Use the exponent rules to collapse each side into a single power.

- Cho hai số mũ bằng nhau, giải phương trình thu được.

Set the two exponents equal and solve the resulting equation.

- Thay nghiệm vào để kiểm tra.

Substitute the solution back into the original equation to check.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $4^{(x+1)} = 32$. Ta có $4 = 2^2$ và $32 = 2^5$. Về trái là $2^{(2(x+1))} = 2^{(2x+2)}$. Cho $2x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3/2$. Kiểm tra: $4^{(5/2)} = 2^5 = 32$, đúng.
Solve $4^{(x+1)} = 32$. Note $4 = 2^2$ and $32 = 2^5$. The left side is $2^{(2(x+1))} = 2^{(2x+2)}$. Set $2x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3/2$. Check: $4^{(5/2)} = 2^5 = 32$, correct.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $9^x = 27^{(x-1)}$. Ta có $9 = 3^2$ và $27 = 3^3$. Về trái là $3^{(2x)}$, về phải là $3^{(3(x-1))} = 3^{(3x-3)}$. Cho $2x = 3x - 3 \Rightarrow x = 3$. Kiểm tra: $9^3 = 729$ và $27^2 = 729$, đúng.

Solve $9^x = 27^{(x-1)}$. Note $9 = 3^2$ and $27 = 3^3$. The left side is $3^{(2x)}$ and the right side is $3^{(3(x-1))} = 3^{(3x-3)}$. Set $2x = 3x - 3 \Rightarrow x = 3$. Check: $9^3 = 729$ and $27^2 = 729$, correct.

Khi không đưa được về cùng cơ số, như $3^x = 20$, bạn cần logarit, hàm ngược của hàm mũ. Phần này nằm ở mục sau.

When the bases cannot be matched, as in $3^x = 20$, you need the logarithm, the inverse of the exponential. That comes in the next section.

Ví dụ ứng dụng – Applications

VÍ DỤ / EXAMPLE – Gửi 50 triệu đồng, lãi suất 8% một năm, ghép lãi mỗi quý, trong 3 năm. Ở đây $P = 50$, $r = 0,08$, $n = 4$, $t = 3$. Số tiền là $A = 50(1 + 0,08/4)^{12} = 50 \times 1,02^{12}$. Vì $1,02^{12} \approx 1,268242$ nên $A \approx 63,41$ triệu đồng. Nếu ghép liên tục: $A = 50e^{(0,08 \times 3)} = 50e^{0,24} \approx 50 \times 1,271249 \approx 63,56$ triệu đồng.

Deposit 50 million dong at 8% per year, compounded quarterly, for 3 years. Here $P = 50$, $r = 0.08$, $n = 4$, $t = 3$. The balance is $A = 50(1 + 0.08/4)^{12} = 50 \times 1.02^{12}$. Since $1.02^{12} \approx 1.268242$, $A \approx 63.41$ million dong. With continuous compounding: $A = 50e^{(0.08 \times 3)} = 50e^{0.24} \approx 50 \times 1.271249 \approx 63.56$ million dong.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Một mẻ nuôi có 500 vi khuẩn, số lượng nhân đôi sau mỗi 3 giờ. Sau t giờ có $N = 500 \times 2^{(t/3)}$ con. Sau 12 giờ: $N = 500 \times 2^4 = 8000$ con. Sau 7,5 giờ: $N = 500 \times 2^{2,5} \approx 500 \times 5,657 \approx 2828$ con. Bao lâu thì đạt 4000 con? Giải $500 \times 2^{(t/3)} = 4000 \Rightarrow 2^{(t/3)} = 8 = 2^3 \Rightarrow t/3 = 3 \Rightarrow t = 9$ giờ.

A culture starts with 500 bacteria, and the count doubles every 3 hours. After t hours there are $N = 500 \times 2^{(t/3)}$. After 12 hours: $N = 500 \times 2^4 = 8000$. After 7.5 hours: $N = 500 \times 2^{2.5} \approx 500 \times 5.657 \approx 2828$. When does it reach 4000? Solve $500 \times 2^{(t/3)} = 4000 \Rightarrow 2^{(t/3)} = 8 = 2^3 \Rightarrow t/3 = 3 \Rightarrow t = 9$ hours.

Hàm mũ cũng mô tả sự giảm dần. Chu kỳ bán rã là thời gian để một chất phóng xạ còn lại đúng một nửa khối lượng. Cơ số khi đó là $1/2$, nhỏ hơn 1, nên đồ thị đi xuống.

Exponentials also describe steady shrinking. The half-life is the time a radioactive substance takes to fall to exactly half its mass. The base is then $1/2$, less than 1, so the graph goes down.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Có 80 g một chất phóng xạ với chu kỳ bán rã 5 ngày. Sau t ngày, khối lượng còn $M = 80 \times (1/2)^{(t/5)}$. Sau 15 ngày: $M = 80 \times (1/2)^3 = 80/8 = 10$ g. Bao lâu thì còn 5 g? Giải $(1/2)^{(t/5)} = 5/80 = 1/16 = (1/2)^4 \Rightarrow t/5 = 4 \Rightarrow t = 20$ ngày.

You have 80 g of a radioactive substance with a half-life of 5 days. After t days the mass left is $M = 80 \times (1/2)^{(t/5)}$. After 15 days: $M = 80 \times (1/2)^3 = 80/8 = 10$ g. When is 5 g left? Solve $(1/2)^{(t/5)} = 5/80 = 1/16 = (1/2)^4 \Rightarrow t/5 = 4 \Rightarrow t = 20$ days.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhân cơ số khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số: $2^3 \cdot 2^4$ bằng 2^7 , không phải 4^7 . Cũng đừng cộng mũ khi cơ số khác nhau, như $2^3 \cdot 3^4$.
Multiplying the bases when multiplying powers of one base: $2^3 \cdot 2^4$ equals 2^7 , not 4^7 . Likewise, never add exponents when the bases differ, as in $2^3 \cdot 3^4$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết $(a + b)^n = a^n + b^n$. Quy tắc này sai; ví dụ $(1 + 1)^2 = 4$ nhưng $1^2 + 1^2 = 2$. Ngoài ra $-2^2 = -4$ còn $(-2)^2 = 4$.
Writing $(a + b)^n = a^n + b^n$. This is false: $(1 + 1)^2 = 4$ but $1^2 + 1^2 = 2$. Also $-2^2 = -4$ while $(-2)^2 = 4$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Thay lãi suất 8% bằng 8 thay vì 0,08, hoặc làm tròn e thành 2,7 giữa chừng khiến kết quả lệch. Hãy dùng phím e^x của máy tính.
Plugging in 8 instead of 0.08 for an 8% rate, or rounding e to 2.7 midway, throws the answer off. Use the e^x key on your calculator.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lấy hệ số tăng là 0,06 thay vì 1,06 khi lãi 6% một năm. Hệ số nhân mỗi kỳ là 1 cộng lãi suất; với 0,06 số tiền sẽ co lại chứ không tăng.
Using 0.06 instead of 1.06 as the growth factor for 6% a year. The factor per period is 1 plus the rate; with 0.06 the balance would shrink instead of grow.

1.8. Hàm logarit và cách giải phương trình mũ – logarit – 1.8. Logarithmic Functions and Solving Exponential and Logarithmic Equations

Bạn đã biết hàm mũ cho ra kết quả khi biết số mũ. Logarit làm ngược lại: biết kết quả, hỏi số mũ. Ví dụ, "10 lũy thừa bao nhiêu thì ra 1000?" Đáp án là 3, ta viết $\log_{10} 1000 = 3$.
You already know that an exponential function gives a result when you know the exponent. A logarithm works backwards: given the result, it asks for the exponent. For example, "10 to what power gives 1000?" The answer is 3, written $\log_{10} 1000 = 3$.

Chính xác hơn, logarit cơ số b của x là số y thỏa $b^y = x$. Cơ số b phải dương và khác 1. Vì b^y luôn dương nên chỉ lấy logarit của số dương: miền xác định là $x > 0$, miền giá trị là mọi số thực. Đồ thị của $y = \log_b x$ là đối xứng của $y = b^x$ qua đường thẳng $y = x$.
More precisely, the base- b logarithm of x is the number y with $b^y = x$. The base b must be positive and not equal to 1. Since b^y is always positive, you can only take the logarithm of a positive number: the domain is $x > 0$ and the range is all real numbers. The graph of $y = \log_b x$ is the mirror image of $y = b^x$ across the line $y = x$.

Cơ số quyết định hướng của đồ thị. Với $b > 1$, hàm $y = b^x$ tăng và $y = \log_b x$ cũng tăng. Với $0 < b < 1$, cả hai đều giảm.
The base sets the direction of the graph. For $b > 1$, $y = b^x$ rises and $y = \log_b x$ rises too. For $0 < b < 1$, both fall.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Hai hệ thức "hủy nhau": $\log_b(b^x) = x$ với mọi x , và $b^{(\log_b x)} = x$ với $x > 0$.
Two "cancel-out" identities: $\log_b(b^x) = x$ for every x , and $b^{(\log_b x)} = x$ for $x > 0$.

Ví dụ nhanh: $\log_2 8 = 3$ vì $2^3 = 8$. $\log_3(1/9) = -2$ vì $3^{-2} = 1/9$. $\log_5 1 = 0$ vì $5^0 = 1$. Áp dụng hệ thức hủy nhau: $\ln(e^5) = 5$ và $10^{(\log 7)} = 7$.

Quick examples: $\log_2 8 = 3$ because $2^3 = 8$. $\log_3(1/9) = -2$ because $3^{-2} = 1/9$. $\log_5 1 = 0$ because $5^0 = 1$. Using the cancel-out identities: $\ln(e^5) = 5$ and $10^{(\log 7)} = 7$.

Các quy tắc logarit và logarit tự nhiên – *Logarithm rules and the natural logarithm*

Logarit biến phép nhân thành phép cộng, phép chia thành phép trừ, lũy thừa thành phép nhân. Với $x, y > 0$ và r là số thực bất kỳ:

Logarithms turn multiplication into addition, division into subtraction, and powers into multiplication. For $x, y > 0$ and any real r :

$$\begin{aligned}\log_b(xy) &= \log_b x + \log_b y \\ \log_b(x/y) &= \log_b x - \log_b y \\ \log_b(x^r) &= r \cdot \log_b x\end{aligned}$$

VÍ DỤ / EXAMPLE – Rút gọn $\log_2 12 - \log_2 3$. Dùng quy tắc thương: $\log_2(12/3) = \log_2 4 = 2$. Rút gọn $\log_6 4 + \log_6 9$. Dùng quy tắc tích: $\log_6 36 = 2$, vì $6^2 = 36$.

Simplify $\log_2 12 - \log_2 3$. Use the quotient rule: $\log_2(12/3) = \log_2 4 = 2$. Simplify $\log_6 4 + \log_6 9$. Use the product rule: $\log_6 36 = 2$, because $6^2 = 36$.

Logarit tự nhiên, viết $\ln$, là logarit cơ số e , với $e \approx 2,718$. Mọi quy tắc trên đều dùng được cho $\ln$. Máy tính bấm tay thường chỉ có $\ln$ và $\log$ (cơ số 10). Khi cần cơ số khác, ta đổi cơ số:

The natural logarithm, written $\ln$, is the logarithm with base e , where $e \approx 2.718$. Every rule above works for $\ln$. Pocket calculators usually have only $\ln$ and $\log$ (base 10). For any other base, use the change-of-base formula:

$$\log_b x = \ln x / \ln b$$

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\log_5 40$. Gỡ $\ln 40 \approx 3,6889$ và $\ln 5 \approx 1,6094$. Chia ra: $\log_5 40 \approx 2,292$. Kiểm tra: $5^2 = 25$ và $5^3 = 125$, còn 40 nằm giữa 25 và 125, nên đáp án giữa 2 và 3 là hợp lý.

Compute $\log_5 40$. Enter $\ln 40 \approx 3.6889$ and $\ln 5 \approx 1.6094$. Divide: $\log_5 40 \approx 2.292$. Sanity check: $5^2 = 25$ and $5^3 = 125$, and 40 lies between them, so an answer between 2 and 3 makes sense.

Giải phương trình mũ – *Solving exponential equations*

Ấn nằm ở số mũ thì ta "kéo" nó xuống bằng logarit.

When the unknown sits in the exponent, use a logarithm to bring it down.

1. Đưa phương trình về dạng một lũy thừa bằng một số, ví dụ $b^{(\text{biểu thức})} = \text{số}$.
Rearrange the equation so one power equals a number, such as $b^{(\text{expression})} = \text{number}$.
2. Lấy $\ln$ hai vế.
Take $\ln$ of both sides.
3. Dùng quy tắc lũy thừa để đưa số mũ xuống làm thừa số.
Use the power rule to bring the exponent down as a factor.
4. Giải phương trình bậc nhất còn lại, rồi thay lại để kiểm tra.
Solve the remaining linear equation, then substitute back to check.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $3^{(2x-1)} = 20$. Lấy ln hai vế: $(2x - 1) \ln 3 = \ln 20$. Suy ra $2x - 1 = \ln 20 / \ln 3 \approx 2,9957 / 1,0986 \approx 2,7268$. Vậy $2x \approx 3,7268$ và $x \approx 1,863$.

Solve $3^{(2x-1)} = 20$. Take ln of both sides: $(2x - 1) \ln 3 = \ln 20$. So $2x - 1 = \ln 20 / \ln 3 \approx 2.9957 / 1.0986 \approx 2.7268$. Hence $2x \approx 3.7268$ and $x \approx 1.863$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Nếu hai vế đưa được về cùng cơ số thì khỏi cần ln. Giải $4^x = 32$. Viết $4 = 2^2$ và $32 = 2^5$, ta có $2^{(2x)} = 2^5$. So số mũ: $2x = 5$, nên $x = 5/2$. Kiểm tra: $4^{(2,5)} = 2^5 = 32$.

If both sides reduce to the same base, you can skip ln. Solve $4^x = 32$. Write $4 = 2^2$ and $32 = 2^5$, so $2^{(2x)} = 2^5$. Compare exponents: $2x = 5$, so $x = 5/2$. Check: $4^{(2.5)} = 2^5 = 32$.

Có phương trình chứa cả e^x và $e^{(-x)}$, lúc này ta đặt $t = e^x$ ($t > 0$) để đưa về bậc hai.
Some equations contain both e^x and $e^{(-x)}$. Then set $t = e^x$ ($t > 0$) to reduce to a quadratic.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $e^x + 6e^{(-x)} = 5$. Nhân hai vế với e^x : $e^{(2x)} + 6 = 5e^x$. Đặt $t = e^x$: $t^2 - 5t + 6 = 0$, tức $(t - 2)(t - 3) = 0$, nên $t = 2$ hoặc $t = 3$. Cả hai đều dương. Vậy $x = \ln 2$ hoặc $x = \ln 3$. Kiểm tra $x = \ln 2$: $2 + 6/2 = 5$, đúng.

Solve $e^x + 6e^{(-x)} = 5$. Multiply both sides by e^x : $e^{(2x)} + 6 = 5e^x$. Let $t = e^x$: $t^2 - 5t + 6 = 0$, that is $(t - 2)(t - 3) = 0$, so $t = 2$ or $t = 3$. Both are positive. So $x = \ln 2$ or $x = \ln 3$. Check $x = \ln 2$: $2 + 6/2 = 5$, correct.

Giải phương trình logarit – Solving logarithmic equations

1. Tìm điều kiện: mọi biểu thức trong logarit phải dương.
Find the conditions: every expression inside a logarithm must be positive.
2. Gộp các logarit về một logarit ở mỗi vế bằng quy tắc tích, thương, lũy thừa.
Combine the logarithms into one on each side using the product, quotient and power rules.
3. Bỏ logarit: $\log_b A = c$ thì $A = b^c$, hoặc $\log_b A = \log_b B$ thì $A = B$.
Remove the logarithm: $\log_b A = c$ gives $A = b^c$, and $\log_b A = \log_b B$ gives $A = B$.
4. Giải phương trình đại số, rồi loại nghiệm không thỏa điều kiện ở bước 1.
Solve the algebraic equation, then discard any solution that fails the conditions from step 1.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $\ln x = 2$. Điều kiện $x > 0$. Bỏ logarit: $x = e^2 \approx 7,389$. Nghiệm này dương nên nhận.

Solve $\ln x = 2$. Condition: $x > 0$. Remove the logarithm: $x = e^2 \approx 7.389$. It is positive, so accept it.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$. Điều kiện: $x > 0$ và $x - 2 > 0$, tức $x > 2$. Gộp: $\log_2[x(x - 2)] = 3$, nên $x(x - 2) = 2^3 = 8$. Ta có $x^2 - 2x - 8 = 0$, tức $(x - 4)(x + 2) = 0$. Loại $x = -2$ vì không lớn hơn 2. Nhận $x = 4$. Kiểm tra: $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$.

Solve $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$. Conditions: $x > 0$ and $x - 2 > 0$, so $x > 2$. Combine: $\log_2[x(x - 2)] = 3$, so $x(x - 2) = 2^3 = 8$. Then $x^2 - 2x - 8 = 0$, that is $(x - 4)(x + 2) = 0$. Reject $x = -2$ because it is not greater than 2. Accept $x = 4$. Check: $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải $\ln(x + 1) - \ln(x - 1) = \ln 3$. Điều kiện: $x > 1$. Dùng quy tắc thương: $(x + 1)/(x - 1) = 3$. Nhân chéo: $x + 1 = 3x - 3$, nên $x = 2$. Nghiệm này thỏa $x > 1$.

Solve $\ln(x + 1) - \ln(x - 1) = \ln 3$. Condition: $x > 1$. By the quotient rule: $(x + 1)/(x - 1) = 3$. Cross-multiply: $x + 1 = 3x - 3$, so $x = 2$. This satisfies $x > 1$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên điều kiện đối số dương. Bước gộp logarit làm miền xác định rộng ra, nên có thể sinh nghiệm ngoại lai như $x = -2$ ở ví dụ trên. Luôn ghi điều kiện trước, hoặc thay nghiệm vào phương trình gốc.

Forgetting that arguments must be positive. Combining logarithms can widen the domain, so it may produce extraneous solutions such as $x = -2$ above. Always write the conditions first, or substitute each answer into the original equation.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết sai $\log(x + y) = \log x + \log y$. Quy tắc chỉ áp dụng cho tích xy , không áp dụng cho tổng. Ngoài ra, khi lấy ln hai vế của một tổng như $2^x + 1 = 7$, bạn không được lấy ln từng số hạng. Hãy chuyển 1 sang phải trước: $2^x = 6$, rồi mới lấy ln.

Writing $\log(x + y) = \log x + \log y$. The rule applies to a product xy , not to a sum. Also, for an equation like $2^x + 1 = 7$, you cannot take ln of each term separately. Move the 1 across first: $2^x = 6$, then take ln.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đưa số mũ xuống làm mất nghiệm. Phương trình $\log_2(x^2) = 4$ có hai nghiệm $x = 4$ và $x = -4$, vì cả hai đều cho $x^2 = 16$. Nếu viết thành $\log_2 x = 4$ thì chỉ còn $x = 4$. Khi bình phương nằm trong logarit, hãy giải từ $x^2 = 16$ trước.

Losing a solution when you pull the exponent down. The equation $\log_2(x^2) = 4$ has two solutions, $x = 4$ and $x = -4$, since both give $x^2 = 16$. Rewriting it as $2 \log_2 x = 4$ leaves only $x = 4$. When a square sits inside the logarithm, solve $x^2 = 16$ first.

MẸO / TIP – Giải xong, hãy thử lại bằng máy tính hoặc thay vào phương trình gốc. Việc này mất chưa đến một phút và bắt được cả lỗi tính lẫn nghiệm ngoại lai.

After solving, test your answer with a calculator or by substituting into the original equation. It takes under a minute and catches both arithmetic slips and extraneous solutions.

1.9. Bài tập vận dụng có lời giải – 1.9. Applied exercises with solutions

Bài 1. Cước taxi tính theo hàm từng khúc – Exercise 1. Taxi fares as a piecewise function

Một hãng taxi thu 20.000 đồng cho 2 km đầu (đi ít hơn 2 km vẫn trả 20.000 đồng), từ sau km thứ 2 thu thêm 15.000 đồng mỗi km. Viết hàm tiền cước $C(x)$ theo quãng đường x km, tính $C(1,5)$ và $C(10)$, rồi tìm quãng đường đi được nếu trả đúng 95.000 đồng.

A taxi company charges 20,000 VND for the first 2 km (trips shorter than 2 km still cost 20,000 VND), then 15,000 VND for each extra km. Write the fare $C(x)$ for a trip of x km, find $C(1.5)$ and $C(10)$, then find how far you rode if you paid exactly 95,000 VND.

1. Chia quãng đường làm hai khúc: $C(x) = 20.000$ khi $0 < x \leq 2$; $C(x) = 20.000 + 15.000(x - 2)$ khi $x > 2$.

Split the trip into two pieces: $C(x) = 20,000$ for $0 < x \leq 2$, and $C(x) = 20,000 + 15,000(x - 2)$ for $x > 2$.

2. $x = 1,5$ nằm ở khúc đầu nên $C(1,5) = 20.000$ đồng.
 $x = 1.5$ falls in the first piece, so $C(1.5) = 20,000$ VND.

3. $x = 10$ nằm ở khúc sau: $C(10) = 20.000 + 15.000 \cdot 8 = 20.000 + 120.000 = 140.000$ đồng.

$x = 10$ falls in the second piece: $C(10) = 20,000 + 15,000 \cdot 8 = 20,000 + 120,000 = 140,000$ VND.

4. 95.000 lớn hơn 20.000 nên dùng khúc sau: $20,000 + 15,000(x - 2) = 95,000 \Rightarrow 15,000(x - 2) = 75,000 \Rightarrow x - 2 = 5$.
 95,000 is more than 20,000, so use the second piece: $20,000 + 15,000(x - 2) = 95,000 \Rightarrow 15,000(x - 2) = 75,000 \Rightarrow x - 2 = 5$.
5. Đáp số: $C(1,5) = 20,000$ đồng, $C(10) = 140,000$ đồng, trả 95.000 đồng thì đã đi 7 km.
 Answer: $C(1,5) = 20,000$ VND, $C(10) = 140,000$ VND, and a 95,000 VND fare means a 7 km trip.

Bài 2. Hàm hợp và miền xác định của nó – Exercise 2. Composite functions and their domains

Cho $f(x) = \sqrt{x - 3}$ và $g(x) = x^2 - 1$. Tìm công thức và miền xác định của $f(g(x))$ và $g(f(x))$, rồi tính $f(g(3))$.

Let $f(x) = \sqrt{x - 3}$ and $g(x) = x^2 - 1$. Find the formula and domain of $f(g(x))$ and of $g(f(x))$, then compute $f(g(3))$.

- Thay $g(x)$ vào chỗ x của f : $f(g(x)) = \sqrt{(x^2 - 1) - 3} = \sqrt{x^2 - 4}$.
 Substitute $g(x)$ for x in f : $f(g(x)) = \sqrt{(x^2 - 1) - 3} = \sqrt{x^2 - 4}$.
- Căn bậc hai cần biểu thức bên trong không âm: $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq -2$ hoặc $x \geq 2$. Miền xác định của $f(g(x))$ là $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
 A square root needs a non-negative inside: $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq -2$ or $x \geq 2$. The domain of $f(g(x))$ is $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
- Thay $f(x)$ vào chỗ x của g : $g(f(x)) = (\sqrt{x - 3})^2 - 1 = x - 4$. Công thức gọn lại nhưng f phải tính được trước, nên vẫn cần $x \geq 3$; miền xác định là $[3; +\infty)$.
 Substitute $f(x)$ for x in g : $g(f(x)) = (\sqrt{x - 3})^2 - 1 = x - 4$. The formula simplifies, but f must be computed first, so $x \geq 3$ is still required; the domain is $[3, +\infty)$.
- Tính từ trong ra: $g(3) = 9 - 1 = 8$, rồi $f(8) = \sqrt{8 - 3} = \sqrt{5}$.
 Work from the inside out: $g(3) = 9 - 1 = 8$, then $f(8) = \sqrt{8 - 3} = \sqrt{5}$.
- Đáp số: $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4}$ với $x \leq -2$ hoặc $x \geq 2$; $g(f(x)) = x - 4$ với $x \geq 3$; $f(g(3)) = \sqrt{5} \approx 2,236$.
 Answer: $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4}$ for $x \leq -2$ or $x \geq 2$; $g(f(x)) = x - 4$ for $x \geq 3$; $f(g(3)) = \sqrt{5} \approx 2.236$.

Bài 3. Tiền gửi lãi kép và phương trình mũ – Exercise 3. Compound interest and an exponential equation

Bạn gửi 50 triệu đồng, lãi 8% mỗi năm, lãi nhập vào gốc cuối mỗi năm. Sau bao nhiêu năm thì số tiền gấp đôi, và sau số năm tròn đó bạn có bao nhiêu tiền?

You deposit 50 million VND at 8% per year, with interest added to the balance at the end of each year. After how many years does the money double, and how much do you have after that whole number of years?

- Mỗi năm số tiền nhân với 1,08, nên sau t năm có $A(t) = 50 \cdot 1,08^t$ (triệu đồng).
Each year the balance is multiplied by 1.08, so after t years you have $A(t) = 50 \cdot 1.08^t$ (million VND).
- Gấp đôi nghĩa là $A(t) = 100$: $50 \cdot 1,08^t = 100 \Rightarrow 1,08^t = 2$.
Doubling means $A(t) = 100$: $50 \cdot 1.08^t = 100 \Rightarrow 1.08^t = 2$.
- Lấy logarit tự nhiên hai vế và đưa số mũ ra trước: $t \cdot \ln 1,08 = \ln 2 \Rightarrow t = \ln 2 / \ln 1,08 \approx 0,6931 / 0,0770 \approx 9,01$.
Take the natural log of both sides and bring the exponent down: $t \cdot \ln 1.08 = \ln 2 \Rightarrow t = \ln 2 / \ln 1.08 \approx 0.6931 / 0.0770 \approx 9.01$.
- Lãi chỉ nhập cuối năm, nên kiểm tra số năm tròn: $1,08^9 \approx 1,999 < 2$, còn $1,08^{10} \approx 2,1589 > 2$. Vậy cần 10 năm.
Interest is only added at year end, so check whole years: $1.08^9 \approx 1.999 < 2$, while $1.08^{10} \approx 2.1589 > 2$. So you need 10 years.
- Đáp số: sau 10 năm số tiền vượt mức gấp đôi, đạt $50 \cdot 2,1589 \approx 107,95$ triệu đồng.
Answer: after 10 years the money has more than doubled, reaching $50 \cdot 2.1589 \approx 107.95$ million VND.

1.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – 1.10. Essay questions and answer outlines

Câu 1. Hàm số là gì? Làm sao nhận ra một đồ thị có phải đồ thị hàm số, và làm sao tìm miền xác định, miền giá trị?

Question 1. *What is a function? How can you tell whether a graph is the graph of a function, and how do you find the domain and range?*

- Hàm số là quy tắc gán cho mỗi đầu vào x đúng một đầu ra y ; ví dụ mỗi người có đúng một ngày sinh.
A function is a rule that assigns exactly one output y to each input x ; for example, each person has exactly one birth date.
- Phép thử đường thẳng đứng: mọi đường thẳng đứng cắt đồ thị nhiều nhất một điểm thì đó là đồ thị hàm số; cắt hai điểm thì một x có hai y , không phải hàm.
Vertical line test: if every vertical line meets the graph at most once, it is the graph of a function; two crossings mean one x has two y -values, so it is not a function.
- Miền xác định là tập các x mà công thức tính được: mẫu khác 0, biểu thức trong căn bậc chẵn không âm, biểu thức trong logarit dương.
The domain is the set of x -values where the formula can be computed: no zero denominator, nothing negative under an even root, and only positive numbers inside a logarithm.
- Miền giá trị là tập các y mà hàm đạt tới; đọc trên đồ thị bằng cách chiếu đồ thị lên trục tung, hoặc giải $y = f(x)$ theo x để xem y nào có nghiệm.
The range is the set of y -values the function reaches; read it off the graph by projecting onto the y -axis, or solve $y = f(x)$ for x to see which y -values give a solution.

Câu 2. Từ đồ thị $y = f(x)$, trình bày cách vẽ đồ thị $y = a \cdot f(x - h) + k$ và cho một ví dụ cụ thể.

Question 2. Starting from the graph of $y = f(x)$, explain how to draw $y = a \cdot f(x - h) + k$ and give a concrete example.

- Số h trong $f(x - h)$ dịch đồ thị theo chiều ngang: h dương thì sang phải, h âm thì sang trái; đây là chỗ hay ngược dấu.

The number h in $f(x - h)$ shifts the graph sideways: positive h moves it right, negative h moves it left; this is where signs often get flipped.

- Số k cộng ở ngoài dịch đồ thị lên khi k dương, xuống khi k âm.

The number k added outside moves the graph up when k is positive and down when k is negative.

- Hệ số a kéo giãn theo chiều đứng khi $|a| > 1$, nén lại khi $0 < |a| < 1$, và lật qua trục hoành khi a âm.

The factor a stretches the graph vertically when $|a| > 1$, squashes it when $0 < |a| < 1$, and flips it over the x -axis when a is negative.

- Ví dụ $y = -2(x + 1)^2 + 3$: lấy parabol $y = x^2$, dịch trái 1, kéo giãn gấp 2, lật xuống, rồi dịch lên 3; đỉnh mới ở $(-1; 3)$, mở xuống dưới.

Example $y = -2(x + 1)^2 + 3$: take the parabola $y = x^2$, shift it left 1, stretch it by 2, flip it, then shift it up 3; the new vertex is $(-1, 3)$ and it opens downward.

Câu 3. Khi nào một hàm có hàm ngược? Nêu cách tìm hàm ngược và giải thích vì sao phải giới hạn miền của $\sin x$ trước khi định nghĩa $\arcsin x$.

Question 3. When does a function have an inverse? Explain how to find an inverse and why the domain of $\sin x$ must be restricted before $\arcsin x$ can be defined.

- Hàm có hàm ngược khi nó một-một: hai đầu vào khác nhau luôn cho hai đầu ra khác nhau; kiểm tra bằng phép thử đường nằm ngang.

A function has an inverse when it is one-to-one: different inputs always give different outputs; check this with the horizontal line test.

- Cách tìm: viết $y = f(x)$, giải ra x theo y , rồi đổi tên biến; ví dụ $y = 3x - 6$ cho $x = (y + 6)/3$, nên $f^{-1}(x) = (x + 6)/3$.

To find it: write $y = f(x)$, solve for x in terms of y , then swap the variable names; for example $y = 3x - 6$ gives $x = (y + 6)/3$, so $f^{-1}(x) = (x + 6)/3$.

- Đồ thị hàm ngược là ảnh đối xứng của đồ thị hàm gốc qua đường $y = x$; miền xác định và miền giá trị đổi chỗ cho nhau.

The graph of the inverse is the mirror image of the original graph across the line $y = x$; the domain and range swap places.

- $\sin x$ lặp lại theo chu kỳ 2π nên không một-một; chỉ giữ đoạn $[-\pi/2; \pi/2]$ thì $\sin$ tăng liên tục và một-một, vì vậy $\arcsin x$ có miền xác định $[-1; 1]$ và miền giá trị $[-\pi/2; \pi/2]$.

$\sin x$ repeats with period 2π , so it is not one-to-one; keeping only $[-\pi/2, \pi/2]$ makes $\sin$ steadily increasing and one-to-one, which is why $\arcsin x$ has domain $[-1, 1]$ and range $[-\pi/2, \pi/2]$.

Câu 4. Logarit là gì? Nêu các quy tắc logarit cần thuộc và các bước giải một phương trình logarit.

Question 4. What is a logarithm? State the logarithm rules you need to know and the steps for solving a logarithmic equation.

- $\log_a b$ là số mũ cần đặt cho a để ra b ($a > 0, a \neq 1, b > 0$); ví dụ $\log_2 8 = 3$ vì $2^3 = 8$.
Hàm logarit là hàm ngược của hàm mũ cùng cơ số.

$\log_a b$ is the exponent you put on a to get b ($a > 0, a \neq 1, b > 0$); for example $\log_2 8 = 3$ because $2^3 = 8$. The logarithm function is the inverse of the exponential function with the same base.

- Quy tắc: $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$; $\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N$; $\log_a(M^k) = k \cdot \log_a M$; đổi cơ số $\log_a b = \ln b / \ln a$.

Rules: $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$; $\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N$; $\log_a(M^k) = k \cdot \log_a M$; change of base $\log_a b = \ln b / \ln a$.

- Bước giải: ghi điều kiện để mọi biểu thức trong logarit dương, gộp các logarit cùng cơ số thành một, chuyển $\log_a(A) = c$ thành $A = a^c$, giải phương trình đại số.

Steps: write the conditions that keep every expression inside a log positive, combine logs with the same base into one, turn $\log_a(A) = c$ into $A = a^c$, and solve the algebraic equation.

- Cuối cùng đối chiếu nghiệm với điều kiện và loại nghiệm làm biểu thức trong logarit âm hoặc bằng 0; bỏ bước này là lỗi mất điểm phổ biến nhất.

Finally, check each solution against the conditions and discard any that make an expression inside a log negative or zero; skipping this check is the most common way to lose marks.

1.11. Câu hỏi trắc nghiệm – 1.11. Multiple-choice questions

1. Miền xác định của hàm $f(x) = 1/\sqrt{4-x}$ là:

The domain of $f(x) = 1/\sqrt{4-x}$ is:

- A. $(-\infty; 4)$ / $(-\infty, 4)$
- B. $(4; +\infty)$ / $(4, +\infty)$
- C. Mọi số thực $x \neq 4$ / All real $x \neq 4$
- D. $(-\infty; 4]$ / $(-\infty, 4]$

2. Cho $f(x) = x^2 + 1$ và $g(x) = 2x - 3$. Giá trị $f(g(2))$ bằng:

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = 2x - 3$. The value of $f(g(2))$ is:

- A. 7
- B. 1
- C. 2
- D. 5

3. Đồ thị $y = (x - 3)^2 + 2$ nhận được từ đồ thị $y = x^2$ bằng cách:

The graph of $y = (x - 3)^2 + 2$ is obtained from the graph of $y = x^2$ by:

- A. Dịch trái 3 đơn vị, lên 2 đơn vị / Shifting left 3 units and up 2 units
- B. Dịch phải 3 đơn vị, lên 2 đơn vị / Shifting right 3 units and up 2 units
- C. Dịch phải 2 đơn vị, lên 3 đơn vị / Shifting right 2 units and up 3 units
- D. Dịch trái 3 đơn vị, xuống 2 đơn vị / Shifting left 3 units and down 2 units

4. Biết $\cos x = 3/5$ và $0 < x < \pi/2$. Giá trị $\tan x$ là:

Given $\cos x = 3/5$ and $0 < x < \pi/2$, the value of $\tan x$ is:

- A. $4/5$
- B. $5/3$
- C. $3/4$
- D. $4/3$

5. Giá trị $\arcsin(1/2)$ bằng:

The value of $\arcsin(1/2)$ is:

- A. $\pi/6$
- B. $5\pi/6$
- C. $-\pi/6$
- D. $\pi/3$

6. Hàm nào là hàm chẵn (đồ thị đối xứng qua trục tung)?

Which function is even (its graph is symmetric about the y-axis)?

- A. $f(x) = \sin x$
- B. $f(x) = x^3 + x^2$
- C. $f(x) = x^3$
- D. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

7. Nghiệm của phương trình $2^{(x+1)} = 32$ là:

The solution of $2^{(x+1)} = 32$ is:

- A. $x = 3$
- B. $x = 4$
- C. $x = 16$
- D. $x = 5$

8. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$ là:

The solution of $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$ is:

- A. $x = 2$
- B. $x = -3$
- C. $x = 3$
- D. $x = 3$ hoặc $x = -3$ / $x = 3$ or $x = -3$

Chương 2. Giới hạn và tính liên tục – Chapter 2. Limits and Continuity

Mục tiêu chương – Chapter objectives

- Tính được giới hạn của hàm số bằng cách thay số, phân tích thành nhân tử, nhân lượng liên hợp, dùng định lý kẹp và giới hạn $\sin x / x$
Compute limits of functions by substitution, factoring, conjugates, the squeeze theorem and the limit of $\sin x / x$
- Kiểm tra được hàm số có liên tục tại một điểm không, phân loại được chỗ gián đoạn và dùng định lý giá trị trung gian để chứng minh phương trình có nghiệm
Test whether a function is continuous at a point, classify its discontinuities and use the Intermediate Value Theorem to show an equation has a root
- Xác định được tiệm cận ngang từ giới hạn tại vô cực và tìm được δ ứng với ε cho trước theo định nghĩa epsilon – delta
Find horizontal asymptotes from limits at infinity and find a δ for a given ε using the epsilon–delta definition

2.1. Từ tiếp tuyến và vận tốc tức thời đến ý tưởng giới hạn – 2.1. From Tangent Lines and Instantaneous Velocity to the Idea of a Limit

Bạn ngồi sau xe máy và nhìn vào đồng hồ tốc độ. Kim chỉ 40 km/h ngay lúc này, chứ không phải 40 km/h trung bình cả chuyến. Con số đó gọi là vận tốc tức thời: vận tốc tại đúng một thời điểm.

You are riding on the back of a motorbike and looking at the speedometer. The needle says 40 km/h right now, not 40 km/h averaged over the whole trip. That number is the instantaneous velocity: the velocity at one exact moment.

Rắc rối nằm ở chỗ vận tốc là quãng đường chia cho thời gian. Tại một thời điểm, thời gian trôi qua bằng 0 và quãng đường đi được cũng bằng 0, nên ta gặp phép chia 0 cho 0, vô nghĩa. Giới hạn ra đời để vượt qua chỗ kẹt này: thay vì chia ở đúng thời điểm đó, ta chia trên những khoảng thời gian ngắn dần rồi xem kết quả tiến về đâu.

The trouble is that velocity is distance divided by time. At a single moment, no time passes and no distance is covered, so we get 0 divided by 0, which means nothing. Limits get around this: instead of dividing at the exact moment, we divide over shorter and shorter time spans and watch where the result heads.

Vận tốc trung bình trên khoảng ngắn dần – Average velocity over shrinking intervals

Vận tốc trung bình trong một khoảng thời gian bằng quãng đường đi thêm được chia cho độ dài khoảng thời gian đó. Nếu $s(t)$ là vị trí của xe tại giây thứ t thì trên khoảng từ $t = a$ đến $t = a + h$, vận tốc trung bình là $[s(a + h) - s(a)] / h$.

Average velocity over a time span is the extra distance covered divided by the length of the span. If $s(t)$ is the bike's position at second t , then from $t = a$ to $t = a + h$ the average velocity is $[s(a + h) - s(a)] / h$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Một xe máy chạy thử trên đường thẳng, quãng đường tính từ vạch xuất phát là $s(t) = 3t^2$ mét, t tính bằng giây. Ta muốn biết vận tốc tức thời tại $t = 2$. Trước hết $s(2) = 3 \cdot 4 = 12$ m. Với $h = 1$, xe đến $t = 3$: $s(3) = 27$, vận tốc trung bình $= (27 - 12)/1 = 15$ m/s. Với $h = 0,5$: $s(2,5) = 18,75$, vận tốc trung bình $= 6,75/0,5 = 13,5$ m/s. Với $h = 0,1$: $s(2,1) = 13,23$, vận tốc trung bình $= 1,23/0,1 = 12,3$ m/s. Với $h = 0,01$: $s(2,01) = 12,1203$, vận tốc trung bình $= 0,1203/0,01 = 12,03$ m/s. Với $h = 0,001$: $s(2,001) = 12,012003$, vận tốc trung bình $= 0,012003/0,001 = 12,003$ m/s. Dãy 15; 13,5; 12,3; 12,03; 12,003 cứ tiến sát 12. Vậy vận tốc tức thời tại $t = 2$ là 12 m/s.

A motorbike test-runs along a straight road, with distance from the start line $s(t) = 3t^2$ meters, t in seconds. We want the instantaneous velocity at $t = 2$. First, $s(2) = 3 \cdot 4 = 12$ m. With $h = 1$, the bike reaches $t = 3$: $s(3) = 27$, average velocity $= (27 - 12)/1 = 15$ m/s. With $h = 0.5$: $s(2.5) = 18.75$, average velocity $= 6.75/0.5 = 13.5$ m/s. With $h = 0.1$: $s(2.1) = 13.23$, average velocity $= 1.23/0.1 = 12.3$ m/s. With $h = 0.01$: $s(2.01) = 12.1203$, average velocity $= 0.1203/0.01 = 12.03$ m/s. With $h = 0.001$: $s(2.001) = 12.012003$, average velocity $= 0.012003/0.001 = 12.003$ m/s. The sequence 15, 13.5, 12.3, 12.03, 12.003 keeps closing in on 12. So the instantaneous velocity at $t = 2$ is 12 m/s.

Bạn có thể kiểm tra bằng đại số. Vì $(2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2$ nên $s(2 + h) - s(2) = 12h + 3h^2$. Chia cho h được vận tốc trung bình bằng $12 + 3h$. Khi h nhỏ dần, $3h$ nhỏ dần về 0 và kết quả tiến về 12, khớp với bảng.

You can check this with algebra. Since $(2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2$, we get $s(2 + h) - s(2) = 12h + 3h^2$. Dividing by h gives an average velocity of $12 + 3h$. As h shrinks, $3h$ shrinks toward 0 and the result heads to 12, matching the table.

Bảng trên chỉ lấy các khoảng phía sau $t = 2$. Lấy phía trước cũng được: trên khoảng từ 1,9 đến 2, $s(1,9) = 10,83$ nên vận tốc trung bình là $(12 - 10,83)/0,1 = 11,7$ m/s. Với khoảng từ 1,99 đến 2 ta được 11,97 m/s. Hai phía cùng tiến về 12.

The table only used spans after $t = 2$. Spans before it work too: from 1.9 to 2, $s(1.9) = 10.83$, so the average velocity is $(12 - 10.83)/0.1 = 11.7$ m/s. From 1.99 to 2 we get 11.97 m/s. Both sides head to 12.

Cách làm theo từng bước – The method step by step

- Viết hàm vị trí $s(t)$ và chọn thời điểm a cần tìm vận tốc. Tính $s(a)$.
Write the position function $s(t)$ and pick the moment a you care about. Compute $s(a)$.
- Chọn vài giá trị h nhỏ dần, như 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001. Tính $s(a + h)$ cho từng giá trị.
Choose several shrinking values of h , such as 1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001. Compute $s(a + h)$ for each.
- Với mỗi h , tính $[s(a + h) - s(a)] / h$ rồi ghi vào bảng.
For each h , compute $[s(a + h) - s(a)] / h$ and record it in a table.
- Đọc cột kết quả: số nào đang được tiến sát? Đó là vận tốc tức thời. Thử thêm các h âm để kiểm tra phía bên kia.
Read the results column: which number is being approached? That is the instantaneous velocity. Try negative h as well to check the other side.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Làm lại với một hàm khác cho quen tay. Một vật chuyển động có $s(t) = t^2 + 5t$ mét. Tìm vận tốc tức thời tại $t = 3$. Ta có $s(3) = 9 + 15 = 24$ m. Với $h = 1$: $s(4) = 36$,

vận tốc trung bình = $(36 - 24)/1 = 12$ m/s. Với $h = 0,1$: $s(3,1) = 25,11$, vận tốc trung bình = $1,11/0,1 = 11,1$ m/s. Với $h = 0,01$: $s(3,01) = 24,1101$, vận tốc trung bình = $0,1101/0,01 = 11,01$ m/s. Bằng đại số, $s(3 + h) - s(3) = 11h + h^2$, chia h được $11 + h$. Khi h về 0, kết quả là 11 m/s.

Try another function to get the hang of it. An object has $s(t) = t^2 + 5t$ meters. Find its instantaneous velocity at $t = 3$. We have $s(3) = 9 + 15 = 24$ m. With $h = 1$: $s(4) = 36$, average velocity = $(36 - 24)/1 = 12$ m/s. With $h = 0.1$: $s(3.1) = 25.11$, average velocity = $1.11/0.1 = 11.1$ m/s. With $h = 0.01$: $s(3.01) = 24.1101$, average velocity = $0.1101/0.01 = 11.01$ m/s. By algebra, $s(3 + h) - s(3) = 11h + h^2$, and dividing by h gives $11 + h$. As h goes to 0, the result is 11 m/s.

Hai bài toán gốc của giải tích – The two founding problems of calculus

Bài toán tiếp tuyến: đường cong $y = s(t)$ có độ dốc bao nhiêu tại một điểm? Đường cát tuyến (secant) là đường thẳng cắt đường cong tại hai điểm. Độ dốc của cát tuyến nối $(2; 12)$ với $(2 + h; s(2 + h))$ chính là $12 + 3h$, tức vận tốc trung bình ở trên. Cho h tiến về 0, cát tuyến xoay dần thành tiếp tuyến với độ dốc 12. Vậy vận tốc tức thời là độ dốc của tiếp tuyến. Hướng này dẫn tới đạo hàm.

The tangent problem: how steep is the curve $y = s(t)$ at one point? A secant line is a line that cuts the curve at two points. The slope of the secant joining $(2, 12)$ to $(2 + h, s(2 + h))$ is exactly $12 + 3h$, the average velocity above. As h goes to 0, the secant swings into the tangent line with slope 12. So instantaneous velocity is the slope of the tangent. This path leads to the derivative.

Bài toán diện tích: tìm diện tích miền nằm giữa đồ thị và trục hoành. Ta chia miền thành nhiều hình chữ nhật mỏng, cộng diện tích lại, rồi cho các hình chữ nhật mỏng dần. Tổng tiến về một giá trị chính xác. Hướng này dẫn tới tích phân. Ví dụ, diện tích dưới đồ thị vận tốc chính là quãng đường đã đi. Cả hai bài toán đều giải bằng giới hạn.

The area problem: find the area of the region between a graph and the x-axis. We cut the region into many thin rectangles, add their areas, then make the rectangles thinner. The sum heads to an exact value. This path leads to the integral. For instance, the area under a velocity graph is the distance traveled. Both problems are solved with limits.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Một xe chạy với vận tốc $v(t) = 2t$ m/s trong 4 giây đầu. Quãng đường là diện tích dưới đồ thị từ $t = 0$ đến $t = 4$. Dùng hình chữ nhật rộng 2 giây, lấy chiều cao ở mép phải: $2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 24$ m. Rộng 1 giây: $(2 + 4 + 6 + 8) \cdot 1 = 20$ m. Rộng 0,5 giây: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot 0,5 = 18$ m. Lấy chiều cao ở mép trái với bề rộng 1 giây: $(0 + 2 + 4 + 6) \cdot 1 = 12$ m. Một dãy thừa, một dãy thiếu, cùng ép vào 16. Đúng vậy, miền này là tam giác đáy 4, cao 8, diện tích $(1/2) \cdot 4 \cdot 8 = 16$ m.

A bike travels at $v(t) = 2t$ m/s for the first 4 seconds. The distance is the area under the graph from $t = 0$ to $t = 4$. Using rectangles 2 seconds wide with heights at the right edge: $2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 24$ m. At 1 second wide: $(2 + 4 + 6 + 8) \cdot 1 = 20$ m. At 0.5 seconds wide: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot 0.5 = 18$ m. With heights at the left edge and 1 second width: $(0 + 2 + 4 + 6) \cdot 1 = 12$ m. One run overshoots, the other undershoots, and both squeeze toward 16. That matches: the region is a triangle with base 4 and height 8, so its area is $(1/2) \cdot 4 \cdot 8 = 16$ m.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Thay $h = 0$ thẳng vào $[s(a + h) - s(a)] / h$. Bạn nhận 0/0 và kết luận "không tồn tại". Hãy rút gọn h trước (như $12h + 3h^2$ chia h) rồi mới cho h tiến về 0.

Plugging $h = 0$ straight into $[s(a + h) - s(a)] / h$. You get $0/0$ and conclude "does not exist". Simplify first (as with $12h + 3h^2$ divided by h), then let h go to 0 .

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lấy vận tốc trung bình trên một khoảng dài rồi gọi đó là vận tốc tức thời. Với $h = 1$ ở ví dụ ta được 15 m/s, lệch xa 12 m/s.

Taking the average velocity over a long span and calling it the instantaneous velocity. With $h = 1$ in the example we get 15 m/s, far from 12 m/s.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chỉ thử các h dương rồi kết luận. Hãy thử cả hai phía, vì hai phía có thể tiến về hai số khác nhau.

Testing only positive h and then concluding. Test both sides, because the two sides can head to different numbers.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Dừng bảng quá sớm khi mới có hai ba dòng, hoặc làm tròn quá tay nên các dòng cuối trông giống nhau dù chưa ổn định. Hãy giữ đủ chữ số thập phân và thử ít nhất bốn năm giá trị h .

Stopping the table too early, after only two or three rows, or rounding so hard that the last rows look alike before the values have settled. Keep enough decimal places and try at least four or five values of h .

GHI CHÚ / NOTE – Giới hạn là số mà các giá trị đang tiến sát, không nhất thiết là giá trị mà ta chạm tới. Hai bài toán gốc, tiếp tuyến và diện tích, đều cần giới hạn để có đáp án chính xác.

A limit is the number the values are closing in on, not necessarily a value they ever reach. Both founding problems, tangent and area, need a limit to give an exact answer.

2.2. Giới hạn của hàm số: bảng giá trị, đồ thị, giới hạn một phía – 2.2. The Limit of a Function: Tables, Graphs and One-Sided Limits

Giới hạn trả lời một câu hỏi đơn giản: khi x tiến sát một số a , giá trị $f(x)$ tiến sát số nào? Giống như bạn đi dần tới cửa lớp: ta quan tâm bạn đang tiến tới đâu, chứ chưa cần biết bạn có bước vào cửa hay không.

A limit answers a simple question: as x gets close to a number a , what number does $f(x)$ get close to? Think of walking toward a classroom door. We care where you are heading, not whether you actually step through.

Ký hiệu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ đọc là "giới hạn của $f(x)$ khi x tiến tới a bằng L ". Nghĩa là $f(x)$ gần L tùy ý khi x đủ gần a , kể cả khi x khác a . Giá trị $f(a)$ không ảnh hưởng, thậm chí $f(a)$ có thể chưa xác định.

The notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ reads "the limit of $f(x)$ as x approaches a equals L ". It means $f(x)$ can be made as close to L as you like by taking x close enough to a , with x not equal to a . The value $f(a)$ plays no part, and $f(a)$ may even be undefined.

Ước lượng giới hạn bằng bảng số – Estimating a limit with a table of values

1. Chọn các giá trị x nằm hai bên a và sát dần a , ví dụ cách a 0,1 rồi 0,01.

Pick x -values on both sides of a , closer and closer to it, for example 0.1 away and then 0.01 away.

2. Tính $f(x)$ tại từng giá trị đó, ghi vào bảng.

Compute $f(x)$ at each value and record it in a table.

3. Xem các giá trị $f(x)$ từ hai phía có dồn về cùng một số không. Nếu có, đó là ước lượng của giới hạn.

Check whether the $f(x)$ values from both sides settle toward the same number. If they do, that number is your estimate.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ước lượng giới hạn của $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ khi x tiến tới 2. Tại $x = 2$ hàm không xác định vì mẫu bằng 0. Ta lập bảng: $f(1,9) = (3,61 - 4)/(-0,1) = 3,9$; $f(1,99) = (3,9601 - 4)/(-0,01) = 3,99$; $f(2,01) = (4,0401 - 4)/0,01 = 4,01$; $f(2,1) = (4,41 - 4)/0,1 = 4,1$. Cả hai phía dồn về 4, nên giới hạn ≈ 4 , dù $f(2)$ không tồn tại.

Estimate the limit of $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ as x approaches 2. At $x = 2$ the function is undefined because the denominator is 0. Build a table: $f(1.9) = (3.61 - 4)/(-0.1) = 3.9$; $f(1.99) = (3.9601 - 4)/(-0.01) = 3.99$; $f(2.01) = (4.0401 - 4)/0.01 = 4.01$; $f(2.1) = (4.41 - 4)/0.1 = 4.1$. Both sides close in on 4, so the limit is about 4, even though $f(2)$ does not exist.

Có thể kiểm tra lại bằng đại số. Vì $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, với mọi x khác 2 ta rút gọn được $f(x) = x + 2$. Khi x gần 2 thì $x + 2$ gần 4. Bảng số và phép rút gọn cho cùng một kết quả.

You can double-check with algebra. Since $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, for every x other than 2 the fraction reduces to $f(x) = x + 2$. When x is near 2, $x + 2$ is near 4. The table and the simplification give the same answer.

Với đồ thị, bạn đặt ngón tay lên đường cong ở hai phía của $x = a$ rồi trượt dần về a . Nếu hai ngón gặp nhau ở cùng một độ cao L thì giới hạn là L . Một chấm rỗng hay một điểm lẻ tại $x = a$ không làm đổi kết quả.

With a graph, put one finger on the curve on each side of $x = a$ and slide both toward a . If they meet at the same height L , the limit is L . A hollow dot or a stray point at $x = a$ does not change the result.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $g(x) = x + 2$ khi x khác 2, và $g(2) = 7$. Đồ thị là đường thẳng $y = x + 2$ nhưng điểm tại $x = 2$ bị dời lên độ cao 7. Khi x tiến tới 2, $g(x)$ vẫn tiến tới 4, nên $\lim_{(x \rightarrow 2)} g(x) = 4$ trong khi $g(2) = 7$. Giới hạn chỉ nhìn vùng xung quanh a , không nhìn chính a .
Let $g(x) = x + 2$ for x not equal to 2, and $g(2) = 7$. The graph is the line $y = x + 2$ with the point at $x = 2$ moved up to height 7. As x approaches 2, $g(x)$ still approaches 4, so $\lim_{(x \rightarrow 2)} g(x) = 4$ while $g(2) = 7$. A limit looks at the surroundings of a , not at a itself.

Giới hạn một phía – One-sided limits

Giới hạn trái, viết $\lim_{(x \rightarrow a^-)} f(x)$, chỉ xét $x < a$. Giới hạn phải, viết $\lim_{(x \rightarrow a^+)} f(x)$, chỉ xét $x > a$. Giống như hai người đi tới cùng một ngã tư từ hai hướng ngược nhau.

The left-hand limit, written $\lim_{(x \rightarrow a^-)} f(x)$, uses only $x < a$. The right-hand limit, written $\lim_{(x \rightarrow a^+)} f(x)$, uses only $x > a$. It is like two people reaching the same crossroads from opposite directions.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Giới hạn $\lim_{(x \rightarrow a)} f(x) = L$ khi và chỉ khi giới hạn trái và giới hạn phải đều tồn tại và cùng bằng L . Nếu hai giá trị khác nhau, giới hạn không tồn tại.
 $\lim_{(x \rightarrow a)} f(x) = L$ exactly when the left-hand and right-hand limits both exist and both equal L . If the two values differ, the limit does not exist.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hàm có bước nhảy: $f(x) = x + 1$ khi $x < 2$, và $f(x) = x + 4$ khi $x \geq 2$. Khi x tiến tới 2 từ trái, $f(x)$ tiến tới 3. Từ phải, $f(x)$ tiến tới 6. Hai giá trị khác nhau, nên $\lim_{(x \rightarrow 2)} f(x)$ không tồn tại, dù $f(2) = 6$ vẫn có nghĩa. Đồ thị bị đứt và nhảy từ độ cao 3 lên độ cao 6.

A function with a jump: $f(x) = x + 1$ for $x < 2$, and $f(x) = x + 4$ for $x \geq 2$. As x approaches 2 from the left, $f(x)$ approaches 3. From the right, $f(x)$ approaches 6. The two values differ, so $\lim_{(x \rightarrow 2)} f(x)$ does not exist, even though $f(2) = 6$ is defined. The graph breaks and jumps from height 3 up to height 6.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xét $h(x) = |x|/x$ tại $x = 0$, hàm không xác định ở đó. Với $x > 0$, $|x| = x$ nên $h(x) = 1$, chẳng hạn $h(0,01) = 1$. Với $x < 0$, $|x| = -x$ nên $h(x) = -1$, chẳng hạn $h(-0,01) = -1$. Giới hạn phải bằng 1, giới hạn trái bằng -1, hai giá trị lệch nhau nên $\lim_{(x \rightarrow 0)} h(x)$ không tồn tại.

Take $h(x) = |x|/x$ at $x = 0$, where the function is undefined. For $x > 0$, $|x| = x$, so $h(x) = 1$; for example $h(0.01) = 1$. For $x < 0$, $|x| = -x$, so $h(x) = -1$; for example $h(-0.01) = -1$. The right-hand limit is 1 and the left-hand limit is -1. They disagree, so $\lim_{(x \rightarrow 0)} h(x)$ does not exist.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hàm dao động: $f(x) = \sin(1/x)$ khi x tiến tới 0. Tại $x = 2/\pi$ ta có $f = \sin(\pi/2) = 1$. Tại $x = 1/\pi$, $f = \sin(\pi) = 0$. Tại $x = 2/(3\pi)$, $f = \sin(3\pi/2) = -1$. Càng gần 0, giá trị càng lặp lại nhiều lần giữa -1 và 1, không dồn về một số nào, nên giới hạn không tồn tại.

An oscillating function: $f(x) = \sin(1/x)$ as x approaches 0. At $x = 2/\pi$, $f = \sin(\pi/2) = 1$. At $x = 1/\pi$, $f = \sin(\pi) = 0$. At $x = 2/(3\pi)$, $f = \sin(3\pi/2) = -1$. The closer to 0, the more often the values swing between -1 and 1 without settling on any number, so the limit does not exist.

Giới hạn vô cực và tiệm cận đứng – Infinite limits and vertical asymptotes

Đôi khi $f(x)$ tăng không dừng khi x tiến tới a . Ta viết $\lim_{(x \rightarrow a)} f(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$ nếu giảm không dừng). Ký hiệu này mô tả cách hàm cư xử, còn ∞ không phải là một số thực.

Sometimes $f(x)$ grows without bound as x approaches a . We write $\lim_{(x \rightarrow a)} f(x) = +\infty$ (or $-\infty$ if it falls without bound). This symbol describes how the function behaves, and ∞ is not a real number.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xét $f(x) = 1/(x - 3)^2$. Ta có $f(3,1) = 1/0,01 = 100$; $f(3,01) = 1/0,0001 = 10\,000$; $f(2,99) = 1/0,0001 = 10\,000$. Hai phía đều tăng không dừng, nên $\lim_{(x \rightarrow 3)} f(x) = +\infty$. Đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng: đồ thị tiến sát đường này nhưng không chạm.

Take $f(x) = 1/(x - 3)^2$. Then $f(3.1) = 1/0.01 = 100$; $f(3.01) = 1/0.0001 = 10,000$; $f(2.99) = 1/0.0001 = 10,000$. Both sides grow without bound, so $\lim_{(x \rightarrow 3)} f(x) = +\infty$. The line $x = 3$ is a vertical asymptote: the graph hugs this line but never touches it.

Với $g(x) = 1/x$, giới hạn phải tại 0 là $+\infty$ còn giới hạn trái là $-\infty$. Hai phía khác nhau nên giới hạn hai phía không tồn tại, nhưng $x = 0$ vẫn là tiệm cận đứng.

For $g(x) = 1/x$, the right-hand limit at 0 is $+\infty$ and the left-hand limit is $-\infty$. The sides disagree, so the two-sided limit does not exist, yet $x = 0$ is still a vertical asymptote.

Khi gặp một điểm a , chỉ có ba kết cục. Hai phía dồn về cùng số L : giới hạn là L . Hai phía dồn về hai số khác nhau, hoặc dao động không dừng: giới hạn không tồn tại. Hai phía cùng tăng (hoặc cùng giảm) không dừng: giới hạn là $+\infty$ (hoặc $-\infty$).

At any point a there are only three outcomes. Both sides settle on the same number L : the limit is L . The sides settle on different numbers, or keep oscillating: the limit does not exist. Both sides grow (or both fall) without bound: the limit is $+\infty$ (or $-\infty$).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm giới hạn với giá trị hàm: $\lim (x \Rightarrow a) f(x)$ không cần bằng $f(a)$.

Confusing the limit with the function value: $\lim (x \Rightarrow a) f(x)$ need not equal $f(a)$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chỉ thử một phía rồi kết luận. Luôn kiểm tra cả trái lẫn phải.

Testing only one side and concluding. Always check both left and right.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đọc a^- là "a âm". Dấu trừ nhỏ chỉ hướng đến từ phía nhỏ hơn a , còn dấu cộng nhỏ chỉ hướng từ phía lớn hơn a . Chẳng hạn 2^- vẫn gần 2, không phải -2 .

Reading a^- as "negative a ". The small minus sign only means approaching from the side below a , and the small plus sign means approaching from above. For example, 2^- is still near 2, not -2 .

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Tin bảng số quá sớm. Vài giá trị đẹp chưa đủ, như $\sin(1/x)$ cho thấy. Hãy kết hợp bảng với đồ thị.

Trusting a table too early. A few neat values are not enough, as $\sin(1/x)$ shows. Combine the table with a graph.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết "giới hạn bằng ∞ " rồi coi là tồn tại như một số. Ta chỉ nói giới hạn là vô cực để mô tả xu hướng.

Writing "the limit equals ∞ " and treating it as an ordinary number. Saying the limit is infinite only describes a trend.

2.3. Các quy tắc tính giới hạn – 2.3. The Limit Laws

Giới hạn của hàm số là giá trị mà $f(x)$ tiến sát tới khi x tiến sát một số a . Các quy tắc giới hạn cho phép bạn chặt một bài khó thành nhiều bài nhỏ rồi ghép kết quả lại, giống như tính tiền chợ: cộng từng món, nhân số lượng, rồi mới ra tổng.

The limit of a function is the value $f(x)$ gets close to as x gets close to a number a . The limit laws let you cut a hard problem into small ones and put the answers back together, like adding up a grocery bill item by item.

Điều kiện chung: mỗi giới hạn nhỏ phải tồn tại (là một số thực) thì mới được áp dụng quy tắc. Giả sử $\lim f(x) = L$ và $\lim g(x) = M$ khi x tiến tới a , còn c là một hằng số.

One condition covers every law: each smaller limit must exist as a real number before you use the law. Suppose $\lim f(x) = L$ and $\lim g(x) = M$ as x approaches a , and c is a constant.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Giới hạn của tổng bằng tổng các giới hạn, hiệu bằng hiệu. Hằng số đứng ngoài được. Tích bằng tích. Thương bằng thương, với điều kiện M khác 0. Lũy thừa và căn bậc n cũng "đi qua" dấu giới hạn.

The limit of a sum is the sum of the limits, and the same holds for differences. Constants can be pulled out. Products work the same way. Quotients work too, provided M is not 0. Powers and n th roots also pass through the limit sign.

$$\begin{aligned} \lim [f(x) + g(x)] &= L + M ; \lim [f(x) - g(x)] = L - M ; \lim [c \cdot f(x)] = c \cdot L \\ \lim [f(x) \cdot g(x)] &= L \cdot M ; \lim [f(x)/g(x)] = L/M \quad (M \neq 0) ; \lim [f(x)]^n = L^n \\ \lim \sqrt[n]{f(x)} &= \sqrt[n]{L} \quad (n \text{ chẵn thì cần } L \geq 0) \end{aligned}$$

Hai quy tắc đầu tiên rất đơn giản: $\lim c = c$ (hằng số thì giữ nguyên) và $\lim x = a$ (x tiến tới a thì giá trị x tiến tới a). Ghép với các quy tắc trên, bạn tính được hầu hết giới hạn quen thuộc.

Two basic facts come first: $\lim c = c$ (a constant stays put) and $\lim x = a$ (if x approaches a , then x itself approaches a). Combined with the laws above, they handle most familiar limits.

Thay trực tiếp vào đa thức và hàm hữu tỉ – *Direct substitution for polynomials and rational functions*

Áp dụng liên tiếp các quy tắc tổng, bội hằng và lũy thừa cho một đa thức $P(x)$ sẽ ra $\lim P(x) = P(a)$ với mọi số a . Hàm hữu tỉ là thương của hai đa thức $P(x)/Q(x)$. Nếu $Q(a)$ khác 0 thì $\lim P(x)/Q(x) = P(a)/Q(a)$. Nghĩa là chỉ cần thay số vào.

Applying the sum, constant-multiple and power laws over and over to a polynomial $P(x)$ gives $\lim P(x) = P(a)$ for every number a . A rational function is a quotient $P(x)/Q(x)$ of two polynomials. If $Q(a)$ is not 0, then $\lim P(x)/Q(x) = P(a)/Q(a)$. In other words, you just plug in.

1. Viết rõ hàm số và số a mà x tiến tới.

Write down the function and the number a that x approaches.

2. Nếu là hàm hữu tỉ, tính mẫu tại a trước. Mẫu khác 0 thì đi tiếp.

For a rational function, compute the denominator at a first. If it is not 0, continue.

3. Thay $x = a$ vào tử và vào mẫu, tính từng phần.

Substitute $x = a$ into the numerator and the denominator and calculate each part.

4. Chia tử cho mẫu (hoặc lấy căn, lũy thừa nếu có) rồi rút gọn kết quả.

Divide the numerator by the denominator (or take the root or power if there is one) and simplify.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính lim khi x tiến tới 2 của $(3x^2 - 5x + 1)/(x + 4)$. Mẫu tại $x = 2$ là $2 + 4 = 6$, khác 0 nên được thay trực tiếp. Tử: $3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$. Vậy giới hạn là $3/6 = 1/2$. Theo quy tắc: giới hạn tử là 3 (tổng, bội hằng, lũy thừa), giới hạn mẫu là 6 khác 0, nên dùng quy tắc thương.

Find the limit as x approaches 2 of $(3x^2 - 5x + 1)/(x + 4)$. The denominator at $x = 2$ is $2 + 4 = 6$, not 0, so direct substitution is allowed. Numerator: $3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$. The limit is $3/6 = 1/2$. By the laws: the numerator tends to 3 (sum, constant multiple, power), the denominator tends to 6 which is not 0, so the quotient law applies.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính lim khi x tiến tới 3 của căn bậc hai của $(x^2 + 7)$. Bên trong căn, giới hạn là $9 + 7 = 16$. Số 16 không âm nên quy tắc căn dùng được: kết quả là căn bậc hai của 16, bằng 4.

Find the limit as x approaches 3 of the square root of $(x^2 + 7)$. Inside the root, the limit is $9 + 7 = 16$. Since 16 is not negative, the root law applies: the answer is the square root of 16, which is 4.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính lim khi x tiến tới -1 của $(2x^3 + x)(x^2 - 4)$. Đây là tích của hai đa thức. Thừa số thứ nhất tiến tới $2 \cdot (-1) + (-1) = -3$. Thừa số thứ hai tiến tới $1 - 4 = -3$. Quy tắc tích cho kết quả $(-3) \cdot (-3) = 9$.

Find the limit as x approaches -1 of $(2x^3 + x)(x^2 - 4)$. This is a product of two polynomials. The first

factor tends to $2 \cdot (-1) + (-1) = -3$. The second factor tends to $1 - 4 = -3$. The product law gives $(-3) \cdot (-3) = 9$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính lim khi x tiến tới 5 của $(x^2 - 25)/(x^2 - 3x - 10)$. Thay $x = 5$: tử 25 - 25 = 0, mẫu 25 - 15 - 10 = 0, ra 0/0. Phân tích tử thành $(x - 5)(x + 5)$ và mẫu thành $(x - 5)(x + 2)$. Rút gọn $(x - 5)$, còn $(x + 5)/(x + 2)$. Mẫu mới tại $x = 5$ là 7, khác 0, nên giới hạn là 10/7. *Find the limit as x approaches 5 of $(x^2 - 25)/(x^2 - 3x - 10)$. Substituting $x = 5$: numerator 25 - 25 = 0, denominator 25 - 15 - 10 = 0, giving 0/0. Factor the numerator as $(x - 5)(x + 5)$ and the denominator as $(x - 5)(x + 2)$. Cancel $(x - 5)$ to get $(x + 5)/(x + 2)$. The new denominator at $x = 5$ is 7, not 0, so the limit is 10/7.*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Thay số khi mẫu bằng 0 mà không kiểm tra. Với $(x^2 - 1)/(x - 1)$ khi x tiến tới 1, thay vào cho 0/0, chưa phải đáp án. Phân tích $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, rút gọn $(x - 1)$ vì x khác 1 khi x chỉ tiến tới 1. Còn lại $x + 1$, giới hạn là 2. *Substituting without checking whether the denominator is 0. For $(x^2 - 1)/(x - 1)$ as x approaches 1, substitution gives 0/0, which is not an answer yet. Factor $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ and cancel $(x - 1)$, which is allowed because x only approaches 1 and never equals it. What remains is $x + 1$, with limit 2.*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Mẫu bằng 0 nhưng tử khác 0, ví dụ $(x + 1)/(x - 2)$ khi x tiến tới 2: tử tiến tới 3, mẫu tiến tới 0. Quy tắc thương không dùng được và giới hạn này không là một số thực. Bạn cần xét từng phía, sẽ học ở mục sau. *The denominator is 0 but the numerator is not, as in $(x + 1)/(x - 2)$ when x approaches 2: the numerator tends to 3, the denominator to 0. The quotient law does not apply, and this limit is not a real number. You will need to check each side, which comes in a later section.*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Tách tổng khi một vế không có giới hạn. Xét $1/x - 1/(x(x + 1))$ khi x tiến tới 0: từng vế không có giới hạn nên không dùng được quy tắc tổng. Quy đồng trước: biểu thức bằng $x/(x(x + 1)) = 1/(x + 1)$, giới hạn là 1. *Splitting a sum when one part has no limit. Take $1/x - 1/(x(x + 1))$ as x approaches 0: neither part has a limit, so the sum law is off the table. Combine the fractions first: the expression equals $x/(x(x + 1)) = 1/(x + 1)$, with limit 1.*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Dùng quy tắc căn khi biểu thức trong căn âm. Với căn bậc hai của x khi x tiến tới -1, giá trị x gần -1 đều âm, nên căn không có nghĩa trong số thực và giới hạn này không tồn tại. Hãy kiểm tra dấu của L trước khi lấy căn bậc chẵn. *Using the root law when the expression under the root is negative. For the square root of x as x approaches -1, every x near -1 is negative, so the root is undefined among real numbers and the limit does not exist. Check the sign of L before taking an even root.*

Tự luyện (đáp án ngay sau mỗi câu) – Practice (answer follows each question)

- lim khi x tiến tới -2 của $(x^2 + 3x)$: thay trực tiếp, $4 - 6 = -2$.
lim as x approaches -2 of $(x^2 + 3x)$: substitute directly, $4 - 6 = -2$.
- lim khi x tiến tới 4 của căn bậc hai của $(2x + 1)$, chia cho $(x - 1)$: tử là căn của $9 = 3$, mẫu là 3, kết quả 1.
lim as x approaches 4 of the square root of $(2x + 1)$, divided by $(x - 1)$: the numerator is the root of $9 = 3$, the denominator is 3, so the answer is 1.
- lim khi x tiến tới 3 của $(x^2 - 9)/(x - 3)$: thay vào cho 0/0, phân tích $(x - 3)(x + 3)$, rút gọn còn $x + 3$, kết quả 6.