ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP

TOÁN CAO CẤP F2
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Dành cho sinh viên đại học chưa từng học đại số tuyến tính, cần hiểu bài để thi học phần Toán cao cấp F2 và dùng được kiến thức trong các môn chuyên ngành

Advanced Mathematics F2: Linear Algebra Exam Review – a bilingual guide

Hệ phương trình · Ma trận · Không gian vectơ · Cơ sở, số chiều

Ánh xạ tuyến tính · Đổi cơ sở · Định thức · Trị riêng, chéo hóa

Tích vô hướng · Gram–Schmidt · Dạng toàn phương · Bài tập có lời giải

Song ngữ Việt – Anh · Vietnamese – English

Phiên bản 1.0 – Tháng 11 năm 2026

https://tailieuso.vin

MỤC LỤC

CONTENTS

Chương 1. Hệ phương trình tuyến tính và phép khử Gauss – *Chapter 1. Linear Systems and Gaussian Elimination* 7

1.1. Phương trình tuyến tính, hệ phương trình và nghiệm – *1.1. Linear Equations, Systems and Their Solutions* 7

1.2. Ba phép biến đổi sơ cấp trên hàng – *1.2. The Three Elementary Row Operations* 10

1.3. Ma trận hệ số, ma trận mở rộng và cách ghi gọn hệ – *1.3. Coefficient Matrix, Augmented Matrix and Compact Notation* 13

1.4. Đưa ma trận về dạng bậc thang và thế ngược – *1.4. Row Echelon Form and Back-Substitution* 16

1.5. Ẩn chính, ẩn tự do và ba khả năng về số nghiệm – *1.5. Leading Variables, Free Variables and the Three Possible Outcomes* 19

1.6. Viết tập nghiệm bằng tham số và dạng vectơ – *1.6. Parametrizing the Solution Set in Vector Form* 22

1.7. Hệ thuần nhất và nghiệm tổng quát bằng nghiệm riêng cộng nghiệm thuần nhất – *1.7. Homogeneous Systems: General Solution Equals Particular Plus Homogeneous* 25

1.8. Biện luận hệ phương trình theo tham số – *1.8. Systems Depending on a Parameter* 28

1.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *1.9. Applied exercises with solutions* 30

1.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *1.10. Essay questions and answer outlines* 32

1.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *1.11. Multiple-choice questions* 34

Chương 2. Khử Gauss–Jordan, hạng ma trận và ứng dụng – *Chapter 2. Gauss–Jordan Reduction, Rank and Applications* 36

2.1. Phép khử Gauss–Jordan và dạng bậc thang rút gọn – *2.1. Gauss–Jordan Reduction and Reduced Echelon Form* 36

2.2. Ma trận tương đương hàng và tính duy nhất của dạng rút gọn – *2.2. Row Equivalence and Uniqueness of the Reduced Form* 39

2.3. Bổ đề tổ hợp tuyến tính giữa các hàng – *2.3. The Linear Combination Lemma for Rows* 41

2.4. Hạng của ma trận và cách tính – *2.4. The Rank of a Matrix and How to Compute It* 44

2.5. Định lý Kronecker–Capelli: hạng quyết định số nghiệm – *2.5. The Rouché–Capelli Theorem: Rank Decides the Number of Solutions* 47

2.6. Ứng dụng: dòng điện trong mạch và dòng xe qua nút giao thông – *2.6. Application: Electrical Networks and Traffic Flow* 50

2.7. Ứng dụng: mô hình cân đối liên ngành – *2.7. Application: Input–Output Analysis* 52

2.8. Sai số làm tròn và giải hệ bằng phần mềm – *2.8. Rounding Error and Solving Systems by Computer* 55

2.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *2.9. Applied exercises with solutions* 58

2.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *2.10. Essay questions and answer outlines* 60

2.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *2.11. Multiple-choice questions* 62

Chương 3. Vectơ trong R^n: hình học, độ dài và góc – *Chapter 3. Vectors in R^n: Geometry, Length and Angle* 64

3.1. Vectơ là mũi tên và là bộ số – *3.1. Vectors as Arrows and as Lists of Numbers* 64

3.2. Cộng vectơ và nhân vectơ với một số – *3.2. Vector Addition and Scalar Multiplication* 66

3.3. Đường thẳng và mặt phẳng viết dưới dạng tham số – *3.3. Lines and Planes in Parametric Form* 69

3.4. Tập nghiệm của hệ nhìn như đường thẳng, mặt phẳng – *3.4. Solution Sets Seen as Lines and Planes* 72

3.5. Độ dài vectơ và khoảng cách giữa hai điểm – *3.5. Vector Length and Distance Between Points* 75

3.6. Tích vô hướng và góc giữa hai vectơ – *3.6. The Dot Product and the Angle Between Vectors* 77

3.7. Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz và bất đẳng thức tam giác – *3.7. The Cauchy–Schwarz and Triangle Inequalities* 80

3.8. Hình chiếu vuông góc của vectơ lên một đường thẳng – *3.8. Orthogonal Projection onto a Line* 83

3.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *3.9. Applied exercises with solutions* 85

3.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *3.10. Essay questions and answer outlines* 87

3.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *3.11. Multiple-choice questions* 89

Chương 4. Ma trận và các phép toán trên ma trận – *Chapter 4. Matrices and Matrix Operations* 91

4.1. Cộng ma trận, nhân với số và chuyển vị – *4.1. Matrix Addition, Scalar Multiples and the Transpose* 91

4.2. Phép nhân hai ma trận: hàng nhân cột – *4.2. Matrix Multiplication: Row Times Column* 94

4.3. Tính chất phép nhân: kết hợp, phân phối, không giao hoán – *4.3. Properties of Matrix Multiplication* 96

4.4. Các ma trận đặc biệt và lũy thừa ma trận – *4.4. Special Matrices and Matrix Powers* 99

4.5. Ma trận sơ cấp: biến đổi hàng bằng phép nhân – *4.5. Elementary Matrices: Row Operations as Multiplication* 102

4.6. Ma trận khả nghịch và các điều kiện tương đương – *4.6. Invertible Matrices and Equivalent Conditions* 104

4.7. Tìm ma trận nghịch đảo bằng Gauss–Jordan – *4.7. Finding the Inverse by Gauss–Jordan Reduction* 108

4.8. Giải phương trình ma trận AX = B và XA = B – *4.8. Solving Matrix Equations $AX = B$ and $XA = B$* 111

4.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *4.9. Applied exercises with solutions* 114

4.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *4.10. Essay questions and answer outlines* 116

4.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *4.11. Multiple-choice questions* 117

Chương 5. Không gian vectơ và không gian con – *Chapter 5. Vector Spaces and Subspaces* 120

5.1. Không gian vectơ qua mười tiên đề – *5.1. Vector Spaces Through Ten Axioms*.....120
5.2. Những không gian vectơ hay gặp: R^n, ma trận, đa thức, hàm số – *5.2. Common Vector Spaces: R^n, Matrices, Polynomials, Functions* 123
5.3. Nhận ra tập không phải không gian vectơ – *5.3. Recognizing Sets That Are Not Vector Spaces*.....126
5.4. Không gian con và tiêu chuẩn kiểm tra nhanh – *5.4. Subspaces and the Quick Subspace Test* 129
5.5. Tổ hợp tuyến tính và bao tuyến tính – *5.5. Linear Combinations and Span* 133
5.6. Tập sinh của một không gian vectơ – *5.6. Spanning Sets of a Vector Space* 135
5.7. Không gian nghiệm của hệ thuần nhất – *5.7. The Solution Space of a Homogeneous System*.....138
5.8. Tổng, giao của không gian con và tổng trực tiếp – *5.8. Sums, Intersections and Direct Sums of Subspaces*.....141
5.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *5.9. Applied exercises with solutions*.....143
5.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *5.10. Essay questions and answer outlines* 146
5.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *5.11. Multiple-choice questions*.....148

Chương 6. Độc lập tuyến tính, cơ sở và số chiều – *Chapter 6. Linear Independence, Basis and Dimension* 150
6.1. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính – *6.1. Linear Independence and Dependence* 150
6.2. Kiểm tra độc lập tuyến tính bằng khử Gauss – *6.2. Testing Independence with Gaussian Elimination*.....153
6.3. Cơ sở của không gian vectơ – *6.3. Basis of a Vector Space*.....155
6.4. Tọa độ của vectơ đối với một cơ sở – *6.4. Coordinates Relative to a Basis* 158
6.5. Số chiều và các hệ quả dùng nhiều – *6.5. Dimension and Its Useful Consequences*160
6.6. Bổ sung tập độc lập và rút gọn tập sinh thành cơ sở – *6.6. Extending Independent Sets and Trimming Spanning Sets to a Basis*.....163
6.7. Không gian hàng, không gian cột và hạng – *6.7. Row Space, Column Space and Rank* 166
6.8. Cơ sở và số chiều của tổng và giao, công thức Grassmann – *6.8. Basis and Dimension of Sums and Intersections*.....169
6.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *6.9. Applied exercises with solutions*.....171
6.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *6.10. Essay questions and answer outlines* 173
6.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *6.11. Multiple-choice questions*.....175

Chương 7. Ánh xạ tuyến tính, hạt nhân và ảnh – *Chapter 7. Linear Maps, Kernel and Range* 178
7.1. Ánh xạ tuyến tính và cách kiểm tra – *7.1. Linear Maps and How to Check Linearity* 178
7.2. Đẳng cấu: hai không gian có cùng cấu trúc – *7.2. Isomorphisms: Spaces with the Same Structure* 181
7.3. Không gian n chiều nào cũng đẳng cấu với R^n – *7.3. Every n-Dimensional Space Is Isomorphic to R^n*.....183

7.4. Xác định ánh xạ tuyến tính qua ảnh của cơ sở – *7.4. Determining a Linear Map from Its Action on a Basis* 186
7.5. Ảnh của ánh xạ tuyến tính và hạng – *7.5. The Range Space and Rank of a Linear Map* 189
7.6. Hạt nhân của ánh xạ tuyến tính và số khuyết – *7.6. The Null Space (Kernel) and Nullity* 191
7.7. Định lý số chiều: hạng cộng số khuyết, đơn ánh và toàn ánh – *7.7. Rank Plus Nullity, One-to-One and Onto Maps* 193
7.8. Cộng, nhân số và hợp các ánh xạ tuyến tính – *7.8. Sums, Scalar Multiples and Composition of Linear Maps* 195
7.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *7.9. Applied exercises with solutions* 198
7.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *7.10. Essay questions and answer outlines* 200
7.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *7.11. Multiple-choice questions* 202

Chương 8. Ma trận của ánh xạ tuyến tính và đổi cơ sở – *Chapter 8. Matrices of Linear Maps and Change of Basis* **204**
8.1. Lập ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính – *8.1. Building the Matrix That Represents a Linear Map* 204
8.2. Tính ảnh của vectơ bằng ma trận biểu diễn – *8.2. Computing Images with the Representing Matrix* 206
8.3. Mỗi ma trận là một ánh xạ tuyến tính – *8.3. Every Matrix Is a Linear Map* 209
8.4. Hợp ánh xạ ứng với tích ma trận – *8.4. Composition Corresponds to Matrix Multiplication* 211
8.5. Ma trận chuyển cơ sở và đổi tọa độ – *8.5. Change of Basis Matrices and Coordinate Change* 215
8.6. Đổi cơ sở cho ánh xạ và ma trận tương đương – *8.6. Changing Bases for a Map: Matrix Equivalence* 217
8.7. Ma trận đồng dạng – *8.7. Similar Matrices* 220
8.8. Hình học của ánh xạ tuyến tính trong mặt phẳng – *8.8. The Geometry of Linear Maps in the Plane* 223
8.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *8.9. Applied exercises with solutions* 225
8.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *8.10. Essay questions and answer outlines* 227
8.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *8.11. Multiple-choice questions* 230

Chương 9. Định thức – *Chapter 9. Determinants* **232**
9.1. Định thức cấp 2, cấp 3 và ý nghĩa diện tích, thể tích – *9.1. 2 × 2 and 3 × 3 Determinants as Area and Volume* 232
9.2. Định nghĩa định thức qua tính chất và hoán vị – *9.2. Defining the Determinant by Properties and Permutations* 235
9.3. Tính chất định thức và tính bằng khử Gauss – *9.3. Properties of Determinants and Computing by Elimination* 238
9.4. Khai triển Laplace theo hàng hoặc cột – *9.4. Laplace Expansion Along a Row or Column* 242
9.5. Định thức của tích, của chuyển vị và điều kiện khả nghịch – *9.5. Determinant of a Product, the Transpose, and Invertibility* 244

9.6. Ma trận phụ hợp và công thức nghịch đảo – *9.6. The Adjugate Matrix and the Inverse Formula* 247
9.7. Quy tắc Cramer – *9.7. Cramer's Rule* 249
9.8. Định thức chứa tham số và các định thức có dạng đặc biệt – *9.8. Determinants with Parameters and Special Patterns* 252
9.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *9.9. Applied exercises with solutions* 256
9.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *9.10. Essay questions and answer outlines* 258
9.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *9.11. Multiple-choice questions* 260

Chương 10. Trị riêng, vectơ riêng và chéo hóa – *Chapter 10. Eigenvalues, Eigenvectors and Diagonalization* 262
10.1. Trị riêng và vectơ riêng: hướng không bị xoay – *10.1. Eigenvalues and Eigenvectors: Directions That Do Not Turn* 262
10.2. Đa thức đặc trưng và cách tìm trị riêng – *10.2. The Characteristic Polynomial and Finding Eigenvalues* 265
10.3. Không gian riêng, bội đại số và bội hình học – *10.3. Eigenspaces, Algebraic and Geometric Multiplicity* 268
10.4. Chéo hóa ma trận: điều kiện và quy trình – *10.4. Diagonalizing a Matrix: Conditions and Procedure* 270
10.5. Tính lũy thừa ma trận nhờ chéo hóa – *10.5. Computing Matrix Powers via Diagonalization* 273
10.6. Ứng dụng: chuỗi Markov và trạng thái ổn định – *10.6. Application: Markov Chains and Steady States* 276
10.7. Định lý Cayley–Hamilton và đa thức tối tiểu – *10.7. The Cayley–Hamilton Theorem and the Minimal Polynomial* 278
10.8. Ma trận lũy linh và dạng chuẩn Jordan – *10.8. Nilpotent Matrices and Jordan Form* 281
10.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *10.9. Applied exercises with solutions* 284
10.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *10.10. Essay questions and answer outlines* 286
10.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *10.11. Multiple-choice questions* 288

Chương 11. Tích vô hướng, trực giao và dạng toàn phương – *Chapter 11. Inner Products, Orthogonality and Quadratic Forms* 291
11.1. Tích vô hướng tổng quát và không gian Euclid – *11.1. General Inner Products and Euclidean Spaces* 291
11.2. Hệ trực giao và hệ trực chuẩn – *11.2. Orthogonal and Orthonormal Sets* 294
11.3. Quá trình trực giao hóa Gram–Schmidt – *11.3. The Gram–Schmidt Orthogonalization Process* 297
11.4. Hình chiếu lên không gian con và bình phương tối thiểu – *11.4. Projection onto a Subspace and Least Squares* 299
11.5. Ma trận trực giao – *11.5. Orthogonal Matrices* 301
11.6. Chéo hóa trực giao ma trận đối xứng – *11.6. Orthogonal Diagonalization of Symmetric Matrices* 304
11.7. Dạng toàn phương và đưa về dạng chính tắc – *11.7. Quadratic Forms and Reduction to Canonical Form* 306

11.8. Xét dấu dạng toàn phương: luật quán tính và tiêu chuẩn Sylvester – *11.8. Definiteness: Sylvester's Law of Inertia and Criterion* 309
11.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *11.9. Applied exercises with solutions* 312
11.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *11.10. Essay questions and answer outlines* ... 314
11.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *11.11. Multiple-choice questions* 316

Phụ lục A. Đáp án trắc nghiệm – *Appendix A. Answers to the multiple-choice questions* 319

Phụ lục B. Bảng thuật ngữ Việt – Anh – *Appendix B. Vietnamese–English glossary*. 332

Phụ lục C. Tài liệu tham khảo – *Appendix C. References* 337

Chương 1. Hệ phương trình tuyến tính và phép khử Gauss – *Chapter 1. Linear Systems and Gaussian Elimination*

Mục tiêu chương – *Chapter objectives*

- Dùng ba phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận mở rộng của một hệ về dạng bậc thang, rồi thế ngược để tìm nghiệm
  Use the three elementary row operations to bring an augmented matrix to echelon form, then back-substitute to find the solution
- Phân biệt ẩn chính với ẩn tự do, từ đó kết luận hệ vô nghiệm, có nghiệm duy nhất hay vô số nghiệm và viết tập nghiệm bằng tham số hoặc dạng vectơ
  Tell leading variables from free variables, decide whether a system has no solution, one solution or infinitely many, and write the solution set with parameters or in vector form
- Biện luận số nghiệm của hệ chứa tham số m và viết nghiệm tổng quát của hệ dưới dạng nghiệm riêng cộng nghiệm của hệ thuần nhất
  Discuss the number of solutions of a system with a parameter m and write the general solution as a particular solution plus a solution of the homogeneous system

1.1. Phương trình tuyến tính, hệ phương trình và nghiệm – *1.1. Linear Equations, Systems and Their Solutions*

Phương trình tuyến tính là phương trình mà mỗi ẩn chỉ xuất hiện ở bậc một, nhân với một số cố định, rồi cộng lại. Ví dụ: 2 ly trà và 3 cái bánh giá 70 nghìn đồng. Gọi giá một ly trà là x, một cái bánh là y, ta có $2x + 3y = 70$. Dạng tổng quát với n ẩn: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, trong đó $a_1, \dots, a_n$ là hệ số, b là hạng tử tự do.

A linear equation is one where each unknown appears only to the first power, multiplied by a fixed number, and the terms are added. Example: 2 cups of tea and 3 pastries cost 70 thousand dong. Let x be the price of a cup and y the price of a pastry, so $2x + 3y = 70$. The general form with n unknowns is $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, where $a_1, \dots, a_n$ are the coefficients and b is the constant term.

Các phương trình $xy = 3$, $x^2 + y = 1$ hay $\sin x = y$ không tuyến tính, vì có tích các ẩn, bình phương hoặc hàm của ẩn.

The equations $xy = 3$, $x^2 + y = 1$ and $\sin x = y$ are not linear: they contain a product of unknowns, a square, or a function of an unknown.

Nghiệm của một phương trình là bộ số thay vào các ẩn làm hai vế bằng nhau. Với $2x + 3y = 70$, bộ $(x, y) = (20, 10)$ là nghiệm vì $40 + 30 = 70$. Bộ $(10, 10)$ không phải nghiệm vì $20 + 30 = 50$.

A solution of an equation is a list of numbers that, put in place of the unknowns, makes both sides equal. For $2x + 3y = 70$, the pair $(x, y) = (20, 10)$ is a solution because $40 + 30 = 70$. The pair $(10, 10)$ is not, because $20 + 30 = 50$.

Hệ phương trình tuyến tính là nhiều phương trình tuyến tính cùng dùng một nhóm ẩn. Nghiệm của hệ là bộ số thỏa mãn tất cả các phương trình cùng lúc. Tập nghiệm là tập mọi nghiệm như vậy. Giải hệ nghĩa là tìm ra tập nghiệm này.

A system of linear equations is several linear equations sharing the same unknowns. A solution of the system is a list of numbers that satisfies every equation at the same time. The solution set is the collection of all such solutions. Solving the system means finding this set.

Hệ có nghiệm khi tập nghiệm khác rỗng. Hệ vô nghiệm khi không bộ số nào thỏa mãn mọi phương trình. Chỉ có ba khả năng: không có nghiệm, đúng một nghiệm, hoặc vô số nghiệm. Không bao giờ có đúng hai hay đúng ba nghiệm.

A system has solutions when its solution set is not empty. It has no solution when no list of numbers satisfies all equations. There are only three possibilities: no solution, exactly one solution, or infinitely many. There is never exactly two or exactly three.

Kiểm tra một bộ số có là nghiệm không – *Checking whether a list of numbers is a solution*

1. Viết bộ số cần thử, ghép từng số với đúng ẩn của nó.
   Write the list to test and match each number with its unknown.
2. Thay vào phương trình thứ nhất, tính vế trái, so với vế phải.
   Substitute into the first equation, compute the left side and compare it with the right side.
3. Làm tương tự với từng phương trình còn lại.
   Repeat for every remaining equation.
4. Chỉ kết luận là nghiệm khi mọi phương trình đều đúng. Sai một phương trình là loại.
   Conclude it is a solution only if every equation holds. One failure rules it out.

> **VÍ DỤ / EXAMPLE –** Hệ $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$, $x - y = -1$. Thử $(1, 2, 3)$: $1 + 2 + 3 = 6$ đúng; $2 - 2 + 3 = 3$ đúng; $1 - 2 = -1$ đúng. Vậy $(1, 2, 3)$ là nghiệm. Thử $(2, 3, 1)$: phương trình đầu $2 + 3 + 1 = 6$ đúng, nhưng phương trình hai cho $4 - 3 + 1 = 2$, khác 3. Vậy $(2, 3, 1)$ không phải nghiệm.
> *System: $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$, $x - y = -1$. Test $(1, 2, 3)$: $1 + 2 + 3 = 6$ holds; $2 - 2 + 3 = 3$ holds; $1 - 2 = -1$ holds. So $(1, 2, 3)$ is a solution. Test $(2, 3, 1)$: the first equation gives $2 + 3 + 1 = 6$, which holds, but the second gives $4 - 3 + 1 = 2$, not 3. So $(2, 3, 1)$ is not a solution.*

Hệ thuần nhất là hệ mà mọi vế phải đều bằng 0, như $3x + 4y = 0$ và $2x - y = 0$. Hệ này luôn có ít nhất một nghiệm: đặt mọi ẩn bằng 0. Vì vậy hệ thuần nhất không bao giờ vô nghiệm. Nó chỉ có thể có đúng nghiệm 0, hoặc vô số nghiệm.

A homogeneous system is one where every right side is 0, such as $3x + 4y = 0$ and $2x - y = 0$. It always has at least one solution: set every unknown to 0. So a homogeneous system is never without a solution. It has either only the all-zero solution, or infinitely many.

Hai ẩn: hệ là hai đường thẳng – *Two unknowns: the system is two lines*

Trên mặt phẳng, mỗi phương trình hai ẩn là một đường thẳng. Điểm chung của các đường thẳng chính là nghiệm của hệ. Vì vậy hai đường thẳng có đúng ba cách đặt cạnh nhau, ứng với ba khả năng về nghiệm.

In the plane, each equation in two unknowns is a line. A point shared by the lines is a solution of the system. Two lines can be placed in exactly three ways, matching the three possibilities for solutions.

Hai đường thẳng *Two lines*	**Số nghiệm** *Number of solutions*	**Ví dụ** *Example*
Cắt nhau tại một điểm *Cross at one point*	Đúng một nghiệm *Exactly one solution*	x + y = 5 và x − y = 1, nghiệm (3, 2) *x + y = 5 and x − y = 1, solution (3, 2)*
Song song, khác nhau *Parallel and distinct*	Vô nghiệm *No solution*	x + 2y = 4 và 2x + 4y = 9 *x + 2y = 4 and 2x + 4y = 9*
Trùng nhau *Same line*	Vô số nghiệm *Infinitely many solutions*	x + 2y = 4 và 2x + 4y = 8 *x + 2y = 4 and 2x + 4y = 8*

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ x + y = 5, x − y = 1. Cộng hai phương trình: 2x = 6, nên x = 3. Thế vào phương trình đầu: 3 + y = 5, nên y = 2. Thử lại: 3 − 2 = 1 đúng. Tập nghiệm là {(3, 2)}.
System x + y = 5, x − y = 1. Add the equations: 2x = 6, so x = 3. Substitute into the first: 3 + y = 5, so y = 2. Check: 3 − 2 = 1 holds. The solution set is {(3, 2)}.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ x + 2y = 4, 2x + 4y = 9. Nhân phương trình đầu với 2 được 2x + 4y = 8. Vế trái giống phương trình hai nhưng vế phải 8 khác 9, nên không có bộ (x, y) nào thỏa cả hai. Hệ vô nghiệm, hai đường thẳng song song.
System x + 2y = 4, 2x + 4y = 9. Multiplying the first equation by 2 gives 2x + 4y = 8. The left side matches the second equation but 8 differs from 9, so no pair (x, y) satisfies both. The system has no solution; the lines are parallel.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ x + 2y = 4, 2x + 4y = 8. Phương trình hai gấp đôi phương trình một nên hai đường thẳng trùng nhau. Đặt y = t tùy ý thì x = 4 − 2t. Tập nghiệm là {(4 − 2t, t) với t là số thực bất kỳ}. Chẳng hạn t = 1 cho (2, 1): 2 + 2 = 4 và 4 + 4 = 8, đúng.
System x + 2y = 4, 2x + 4y = 8. The second equation is twice the first, so the lines coincide. Let y = t be arbitrary; then x = 4 − 2t. The solution set is {(4 − 2t, t) with t any real number}. For t = 1 we get (2, 1): 2 + 2 = 4 and 4 + 4 = 8, both true.

Khi khử ẩn, hãy nhìn dòng cuối. Nếu một phương trình biến thành 0 = 0 thì nó chỉ lặp lại các phương trình khác, có thể bỏ đi. Nếu biến thành 0 = một số khác 0, hệ vô nghiệm. Ví dụ x + 3y = 5 và 2x + 6y = 4: lấy phương trình hai trừ 2 lần phương trình một, vế trái thành 0, vế phải thành 4 − 10 = −6. Ta được 0 = −6, vô lý, nên hệ vô nghiệm.
When eliminating unknowns, look at the last row. If an equation turns into 0 = 0, it only repeats the others and can be dropped. If it turns into 0 = a nonzero number, the system has no solution. Example: x + 3y = 5 and 2x + 6y = 4. Subtract 2 times the first equation from the second: the left side becomes 0 and the right side becomes 4 − 10 = −6. We get 0 = −6, which is impossible, so the system has no solution.

Với ba ẩn, mỗi phương trình là một mặt phẳng trong không gian, và vẫn chỉ có ba khả năng: không có điểm chung, một điểm chung, hoặc vô số điểm chung.
With three unknowns, each equation is a plane in space, and there are still only three outcomes: no common point, one common point, or infinitely many.

Số phương trình nhiều hơn số ẩn – *More equations than unknowns*

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ $x + y = 4$, $x - y = 2$, $2x + y = 7$ có ba phương trình, hai ẩn. Cộng hai phương trình đầu: $2x = 6$, nên $x = 3$, rồi $y = 1$. Thử phương trình ba: $6 + 1 = 7$ đúng. Hệ có đúng một nghiệm $(3, 1)$. Đổi vế phải phương trình ba thành 8 thì $6 + 1 = 7$ khác 8, và hệ vô nghiệm.
The system $x + y = 4$, $x - y = 2$, $2x + y = 7$ has three equations and two unknowns. Add the first two: $2x = 6$, so $x = 3$, then $y = 1$. Test the third: $6 + 1 = 7$ holds. The system has exactly one solution, $(3, 1)$. Change the right side of the third equation to 8 and $6 + 1 = 7$ no longer matches 8, so the system has no solution.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Thử nghiệm vào một phương trình rồi dừng. Bộ số phải đúng với mọi phương trình của hệ.
Testing a candidate in one equation and stopping. The list must satisfy every equation in the system.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Cho rằng nhiều phương trình hơn ẩn thì vô nghiệm, hay ít phương trình hơn ẩn thì luôn có nghiệm. Cả hai đều sai: điều quyết định là các vế trái và vế phải có ăn khớp nhau hay không. Hệ $x + 2y = 4$, $2x + 4y = 9$ có số phương trình bằng số ẩn mà vẫn vô nghiệm.
Believing more equations than unknowns means no solution, or fewer equations than unknowns means a solution always exists. Both are wrong: what matters is whether left and right sides fit together. The system $x + 2y = 4$, $2x + 4y = 9$ has as many equations as unknowns and still has no solution.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Coi phương trình có tích ẩn hoặc bình phương là tuyến tính. Chỉ cần thấy xy, x^2 hay hàm của ẩn là loại.
Treating an equation with a product of unknowns or a square as linear. As soon as you see xy, x^2 or a function of an unknown, it is not linear.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Hệ tuyến tính chỉ có ba khả năng: vô nghiệm, đúng một nghiệm, vô số nghiệm. Với hai ẩn, chúng ứng với hai đường thẳng song song, cắt nhau, trùng nhau.
A linear system has only three possible outcomes: no solution, exactly one solution, or infinitely many. With two unknowns they match parallel lines, crossing lines, and the same line.

1.2. Ba phép biến đổi sơ cấp trên hàng – *1.2. The Three Elementary Row Operations*

Giải hệ phương trình giống như sắp xếp lại đồ trên bàn: bạn được đổi chỗ, nhưng không được làm mất đồ. Chỉ có ba động tác cho phép đổi hình dạng hệ mà vẫn giữ nguyên tập nghiệm, tức là tập mọi bộ số thỏa cả hệ. Ba động tác ấy gọi là phép biến đổi sơ cấp trên hàng. Mỗi phương trình ứng với một hàng khi ta viết hệ thành bảng số.
P: Solving a system is like rearranging items on a desk: you may move things around, but nothing may go missing. Exactly three moves change the look of a system while keeping its solution set, meaning all the number triples that satisfy every equation. They are called elementary row operations, because each equation corresponds to one row once the system is written as a table of numbers.

Ba phép biến đổi – *The three operations*

- Đổi chỗ: hoán đổi hai phương trình cho nhau. Ví dụ ghi $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$.
  Swap: exchange two equations. For example, write $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$.
- Nhân: nhân cả hai vế của một phương trình với một số c khác 0. Ghi $c\rho_i$.
  Rescale: multiply both sides of one equation by a number c that is not 0. Write $c\rho_i$.
- Cộng bội: lấy k lần phương trình i cộng vào phương trình j (i khác j). Ghi $k\rho_i + \rho_j$; hàng j là hàng bị thay, hàng i giữ nguyên.
  Row combination: add k times equation i to equation j (i different from j). Write $k\rho_i + \rho_j$; row j is the one that gets replaced, row i stays as it was.

Ký hiệu ρ_i đọc là "hàng i" (chữ rho của Hy Lạp). Khi nhiều phép cộng bội cùng dùng một hàng, ta được gộp lại trên một mũi tên cho đỡ viết.

P: The symbol ρ_i stands for "row i" (the Greek letter rho). When several combinations use the same row, you may write them together over one arrow to save space.

Vì sao tập nghiệm không đổi – *Why the solution set stays the same*

Lý do gói trong một ý: cả ba phép đều đảo ngược được. Đổi chỗ hai phương trình lần nữa thì về lại hệ cũ. Nhân với c được hoàn lại bằng nhân với 1/c, và đó là lý do c phải khác 0. Cộng k lần hàng i vào hàng j được hoàn lại bằng cộng $-k$ lần hàng i vào hàng j.

P: The reason fits in one idea: all three operations can be undone. Swapping again returns the old system. Multiplying by c is undone by multiplying by 1/c, which is why c must not be 0. Adding k times row i to row j is undone by adding $-k$ times row i to row j.

Từ đó suy ra hai chiều. Bộ số thỏa hệ cũ thì thỏa hệ mới, vì hệ mới được tạo từ các phương trình cũ. Ngược lại, hệ cũ lại được tạo từ hệ mới, nên nghiệm của hệ mới cũng là nghiệm của hệ cũ. Hai tập nghiệm trùng nhau.

P: This gives both directions. A triple that satisfies the old system satisfies the new one, since the new equations are built from the old ones. Conversely, the old system can be rebuilt from the new one, so every solution of the new system also solves the old one. The two solution sets coincide.

> **VÍ DỤ / EXAMPLE –** Xem việc đảo ngược trên một hệ nhỏ: $x + 2y = 5$; $3x + y = 5$. Dùng $-3\rho_1 + \rho_2$: hàng 2 thành $3x + y - 3x - 6y = 5 - 15$, tức $-5y = -10$. Suy ra $y = 2$, rồi $x = 5 - 4 = 1$. Để đảo lại, dùng $3\rho_1 + \rho_2$: $-5y + 3x + 6y = -10 + 15$, ra $3x + y = 5$, đúng hàng cũ. Thử nghiệm (1, 2) vào hệ gốc: $1 + 4 = 5$ và $3 + 2 = 5$.
> *Watch the undo on a small system: $x + 2y = 5$; $3x + y = 5$. Apply $-3\rho_1 + \rho_2$: row 2 becomes $3x + y - 3x - 6y = 5 - 15$, that is $-5y = -10$. So $y = 2$, then $x = 5 - 4 = 1$. To undo it, apply $3\rho_1 + \rho_2$: $-5y + 3x + 6y = -10 + 15$, giving $3x + y = 5$, the old row. Check (1, 2) in the original system: $1 + 4 = 5$ and $3 + 2 = 5$.*

Ví dụ từng bước – *A step-by-step example*

Giải hệ ba ẩn sau, chỉ dùng ba phép trên: $2y - z = 1$; $x + y + z = 6$; $3x - y + 2z = 7$.

P: Solve this three-unknown system using only the three operations: $2y - z = 1$; $x + y + z = 6$; $3x - y + 2z = 7$.

1. Hàng 1 không có x, nên đổi chỗ hàng 1 và hàng 2 ($\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$). Hệ thành: $x + y + z = 6$; $2y - z = 1$; $3x - y + 2z = 7$.
   Row 1 has no x, so swap rows 1 and 2 ($\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$). The system becomes: $x + y + z = 6$; $2y - z = 1$; $3x - y + 2z = 7$.
2. Khử x ở hàng 3 bằng $-3\rho_1 + \rho_3$. Tính: $-y - 3y = -4y$; $2z - 3z = -z$; $7 - 18 = -11$. Hàng 3 mới: $-4y - z = -11$.
   Remove x from row 3 with $-3\rho_1 + \rho_3$. Compute: $-y - 3y = -4y$; $2z - 3z = -z$; $7 - 18 = -11$. New row 3: $-4y - z = -11$.
3. Khử y ở hàng 3 bằng $2\rho_2 + \rho_3$. Tính: $-4y + 4y = 0$; $-z - 2z = -3z$; $-11 + 2 = -9$. Hàng 3 mới: $-3z = -9$.
   Remove y from row 3 with $2\rho_2 + \rho_3$. Compute: $-4y + 4y = 0$; $-z - 2z = -3z$; $-11 + 2 = -9$. New row 3: $-3z = -9$.
4. Nhân hàng 3 với $-1/3$ (phép nhân, vì $-1/3$ khác 0): $z = 3$.
   Multiply row 3 by $-1/3$ (a rescale, since $-1/3$ is not 0): $z = 3$.
5. Thế ngược. Hàng 2: $2y - 3 = 1$ nên $y = 2$. Hàng 1: $x + 2 + 3 = 6$ nên $x = 1$.
   Substitute back. Row 2: $2y - 3 = 1$, so $y = 2$. Row 1: $x + 2 + 3 = 6$, so $x = 1$.

```
(x, y, z) = (1, 2, 3)
```

Thử vào hệ gốc: $2\cdot2 - 3 = 1$; $1 + 2 + 3 = 6$; $3\cdot1 - 2 + 2\cdot3 = 7$. Cả ba đều đúng.
P: Check in the original system: $2\cdot2 - 3 = 1$; $1 + 2 + 3 = 6$; $3\cdot1 - 2 + 2\cdot3 = 7$. All three hold.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Thử nhân hàng 3 ($-3z = -9$) với 0. Ta được $0 = 0$, hệ còn: $x + y + z = 6$; $2y - z = 1$; $0 = 0$. Hệ này có vô số nghiệm, chẳng hạn $z = 0$, $y = 1/2$, $x = 11/2$ (kiểm tra: $11/2 + 1/2 + 0 = 6$ và $2\cdot(1/2) - 0 = 1$). Nhưng bộ này không thỏa $3x - y + 2z = 7$ của hệ gốc. Nhân với 0 xóa mất thông tin, nên không đảo lại được.
Try multiplying row 3 ($-3z = -9$) by 0. You get $0 = 0$, and the system reads: $x + y + z = 6$; $2y - z = 1$; $0 = 0$. This has infinitely many solutions, for instance $z = 0$, $y = 1/2$, $x = 11/2$ (check: $11/2 + 1/2 + 0 = 6$ and $2\cdot(1/2) - 0 = 1$). But that triple fails $3x - y + 2z = 7$ in the original system. Multiplying by 0 erases information and cannot be undone.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhân một hàng với 0, hoặc làm tương đương: viết $k\rho_i + \rho_i$ với $k = -1$, vì $(-1)\rho_i + \rho_i$ cho ra hàng toàn 0. Cộng bội luôn phải cộng hàng này vào một hàng khác.
Mistake: multiplying a row by 0, or doing so indirectly with $k\rho_i + \rho_i$ and $k = -1$, since $(-1)\rho_i + \rho_i$ gives a row of zeros. A combination must always add one row to a different row.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Khi cộng bội, quên nhân k vào cả vế phải. Ở bước 2 phải trừ $3\cdot6 = 18$ khỏi 7, không phải trừ 3. Sai một số là cả hệ sai.
Mistake: forgetting to multiply the right-hand side by k in a combination. In step 2 you subtract $3\cdot6 = 18$ from 7, not just 3. One wrong number spoils the whole system.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Sau khi làm $k\rho_i + \rho_j$, ghi kết quả đè lên hàng i. Hàng i phải giữ nguyên, chỉ hàng j đổi.
Mistake: after $k\rho_i + \rho_j$, writing the result over row i. Row i must stay as it was; only row j changes.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đổi chỗ hai hàng mà chỉ chuyển vế trái, để vế phải nằm yên. Cả phương trình, gồm cả vế phải, phải dời cùng nhau.

Mistake: swapping two rows but moving only the left sides and leaving the right sides in place. The whole equation, right side included, must move together.

MẸO / TIP – Mỗi lần biến đổi, ghi rõ phép vừa làm (ví dụ $-3\rho_1 + \rho_3$) bên cạnh hệ mới. Sai chỗ nào, bạn lần ngược lại được ngay.
Tip: write the operation you just did (for example $-3\rho_1 + \rho_3$) next to each new system. If something goes wrong, you can trace back right away.

MẸO / TIP – Nếu phép biến đổi cho ra hàng 0 = 0 thì không có gì sai. Nó chỉ báo rằng phương trình đó suy ra được từ các phương trình còn lại, tức là thừa.
Tip: if an operation produces a row 0 = 0, nothing has gone wrong. It only tells you that equation follows from the others, so it was redundant.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Ba phép: đổi chỗ hai hàng; nhân một hàng với số khác 0; cộng bội của hàng này vào hàng khác. Cả ba đảo ngược được, nên tập nghiệm giữ nguyên.
Memorize: the three operations are swapping two rows, multiplying a row by a nonzero number, and adding a multiple of one row to another row. All three are reversible, so the solution set is unchanged.

1.3. Ma trận hệ số, ma trận mở rộng và cách ghi gọn hệ – *1.3. Coefficient Matrix, Augmented Matrix and Compact Notation*

Ma trận là một bảng số hình chữ nhật, xếp thành hàng và cột. Bảng điểm của lớp là ví dụ quen thuộc: mỗi hàng là một sinh viên, mỗi cột là một môn học. Mỗi số trong bảng gọi là một phần tử.
A matrix is a rectangular table of numbers arranged in rows and columns. A class gradebook is a familiar example: each row is a student, each column is a subject. Each number in the table is called an entry.

Ma trận có m hàng và n cột gọi là ma trận cấp m×n, đọc là "m nhân n", số hàng luôn nói trước. Phần tử ở hàng i, cột j ký hiệu a với hai chỉ số: a_{23} là phần tử hàng 2, cột 3. Thứ tự chỉ số quan trọng: a_{23} và a_{32} là hai ô khác nhau.
A matrix with m rows and n columns has size m×n, read "m by n", with the number of rows always stated first. The entry in row i, column j is written a with two subscripts: a_{23} is the entry in row 2, column 3. The order of the subscripts matters: a_{23} and a_{32} are different cells.

```
A = [ 4 0 -1 ; 2 7 3 ]
```

Ma trận A trên có hai hàng (4 0 −1 và 2 7 3) và ba cột, nên là ma trận 2×3. Ở đó $a_{13} = -1$ và $a_{21} = 2$.
The matrix A above has two rows (4 0 −1 and 2 7 3) and three columns, so it is a 2×3 matrix. Here $a_{13} = -1$ and $a_{21} = 2$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xét ma trận B với ba hàng 5 1, 0 −3 và 8 2. Mỗi hàng có hai số, nên B có 3 hàng, 2 cột và là ma trận 3×2. Phần tử hàng 3, cột 1 là $b_{31} = 8$. Phần tử hàng 1, cột 2 là $b_{12} = 1$. Đổi chỗ hai chỉ số thì được ô khác: $b_{21} = 0$.
Take a matrix B with three rows: 5 1, 0 −3 and 8 2. Each row has two numbers, so B has 3 rows and 2 columns and is a 3×2 matrix. The entry in row 3, column 1 is $b_{31} = 8$. The entry in row 1, column 2 is $b_{12} = 1$. Swapping the subscripts gives a different cell: $b_{21} = 0$.

Ma trận giúp ta khỏi chép đi chép lại tên ẩn, dấu cộng và dấu bằng. Giải hệ chỉ cần thao tác trên các con số, còn tên ẩn đã được ngầm hiểu theo thứ tự cột.

Matrices spare us from copying unknown names, plus signs and equals signs over and over. Solving a system only needs work on the numbers, while the unknowns are understood from the column order.

Ghi hệ thành ma trận mở rộng – *Writing a system as an augmented matrix*

Cho hệ m phương trình, n ẩn. Ma trận hệ số gồm riêng các hệ số của ẩn, có cấp m×n. Ma trận mở rộng thêm một cột các hằng số vế phải, nên có cấp m×(n+1). Một vạch đứng đặt trước cột cuối để nhắc rằng cột đó là vế phải.

Take a system of m equations in n unknowns. The coefficient matrix holds only the coefficients of the unknowns and has size m×n. The augmented matrix adds one column for the right-hand constants, so it has size m×(n+1). A vertical bar before the last column reminds you that it is the right-hand side.

1. Đưa mỗi phương trình về dạng: các ẩn ở vế trái, hằng số ở vế phải, và các ẩn xuất hiện cùng một thứ tự (ví dụ x, y, z) ở mọi phương trình.
   Rewrite each equation with the unknowns on the left, the constant on the right, and the unknowns in the same order (say x, y, z) in every equation.
2. Với mỗi phương trình, đọc hệ số của từng ẩn theo thứ tự đó. Ẩn không xuất hiện thì hệ số là 0. Ẩn đứng một mình như x có hệ số 1, còn −x có hệ số −1.
   In each equation, read off the coefficient of each unknown in that order. An unknown that does not appear has coefficient 0. A bare x has coefficient 1, and −x has coefficient −1.
3. Mỗi phương trình thành một hàng, hệ số của cùng một ẩn nằm thẳng một cột.
   Each equation becomes one row, and the coefficients of the same unknown line up in one column.
4. Thêm cột hằng số bên phải, ngăn bằng vạch đứng.
   Add the column of constants on the right, separated by a vertical bar.
5. Đếm lại để kiểm tra: số hàng phải bằng số phương trình, số cột trước vạch phải bằng số ẩn.
   Count again as a check: the number of rows must equal the number of equations, and the number of columns before the bar must equal the number of unknowns.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ghi hệ sau thành ma trận mở rộng: $2x - 3y + z = 5$; $x + 4z = 7$; $-y + 2z = 0$. Phương trình hai thiếu y nên hệ số y là 0. Phương trình ba thiếu x nên hệ số x là 0. Hệ số của y trong phương trình ba là −1. Ma trận hệ số có cấp 3×3, ma trận mở rộng có cấp 3×4.
Write this system as an augmented matrix: $2x - 3y + z = 5$; $x + 4z = 7$; $-y + 2z = 0$. Equation two has no y, so its y-coefficient is 0. Equation three has no x, so its x-coefficient is 0. The y-coefficient in equation three is −1. The coefficient matrix is 3×3 and the augmented matrix is 3×4.

```
[ 2 -3 1 | 5 ]
[ 1 0 4 | 7 ]
[ 0 -1 2 | 0 ]
```

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ có bốn ẩn x_1, x_2, x_3, x_4: $x_1 + 2x_2 - x_4 = 3$ và $x_3 + 5x_4 = -1$. Phương trình một thiếu x_3, phương trình hai thiếu x_1 và x_2. Hệ có 2 phương trình, 4 ẩn, nên ma trận hệ

số cấp 2×4 và ma trận mở rộng cấp 2×5.
A system with four unknowns x_1, x_2, x_3, x_4: $x_1 + 2x_2 - x_4 = 3$ and $x_3 + 5x_4 = -1$. Equation one has no x_3, and equation two has no x_1 or x_2. There are 2 equations and 4 unknowns, so the coefficient matrix is 2×4 and the augmented matrix is 2×5.

```
[ 1 2 0 -1 | 3 ]
[ 0 0 1 5 | -1 ]
```

Đọc ngược ma trận thành hệ – ***Reading a matrix back as a system***

1. Đặt tên ẩn cho các cột đứng trước vạch, theo thứ tự từ trái sang phải.
   Name the unknowns for the columns before the bar, from left to right.
2. Mỗi hàng là một phương trình: nhân từng số với ẩn của cột nó, rồi cộng lại. Số sau vạch là vế phải.
   Each row is one equation: multiply each number by the unknown of its column and add. The number after the bar is the right-hand side.
3. Bỏ các số hạng có hệ số 0 cho phương trình gọn hơn.
   Drop the terms with coefficient 0 to keep each equation short.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đọc ma trận sau với ba ẩn x, y, z. Hàng một có hệ số y bằng 0, nên không có số hạng y. Hàng hai có hệ số x bằng 0, nên không có số hạng x. Ta được hệ: x − 2z = 3 và 2y + z = −4.
Read this matrix with the three unknowns x, y, z. Row one has y-coefficient 0, so no y term appears. Row two has x-coefficient 0, so no x term appears. The system is: $x - 2z = 3$ and $2y + z = -4$.

```
[ 1 0 -2 | 3 ]
[ 0 2 1 | -4 ]
```

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ viết lộn xộn: 3y − x = 2 và z + 2x + y = 6. Sắp theo thứ tự x, y, z: −x + 3y + 0z = 2 và 2x + y + z = 6. Ma trận mở rộng có hàng một là −1, 3, 0 | 2 và hàng hai là 2, 1, 1 | 6.
A messy system: $3y - x = 2$ and $z + 2x + y = 6$. In the order x, y, z: $-x + 3y + 0z = 2$ and $2x + y + z = 6$. The augmented matrix has row one −1, 3, 0 | 2 and row two 2, 1, 1 | 6.

GHI CHÚ / NOTE – Phép biến đổi trên phương trình và phép biến đổi trên hàng của ma trận mở rộng là một. Với hệ ở ví dụ đầu, đổi chỗ hàng 1 và hàng 2, rồi lấy hàng 2 trừ 2 lần hàng 1. Hàng 2 mới: (2−2·1, −3−2·0, 1−2·4 | 5−2·7) = (0, −3, −7 | −9), tức là −3y − 7z = −9.
An operation on equations and the same operation on rows of the augmented matrix are the same thing. Take the system from the first example, swap row 1 and row 2, then subtract 2 times row 1 from row 2. The new row 2 is (2−2·1, −3−2·0, 1−2·4 | 5−2·7) = (0, −3, −7 | −9), meaning $-3y - 7z = -9$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bỏ trống ô của ẩn vắng mặt thay vì điền 0. Khi đó các cột lệch nhau và hệ số nằm sai ẩn.
Leaving the cell of a missing unknown empty instead of writing 0. The columns then shift and coefficients land under the wrong unknowns.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Không chuyển hằng số về vế phải. Phương trình 2x + 3 = y phải thành 2x − y = −3, nên hàng là 2, −1 | −3.

Not moving constants to the right side. The equation $2x + 3 = y$ must become $2x - y = -3$, so the row is $2, -1 \mid -3$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên dấu trừ hoặc hệ số ngầm. Với $-x + y$, hệ số x là -1 chứ không phải 1. Với y đứng một mình, hệ số là 1 chứ không phải 0.
Forgetting a minus sign or an implied coefficient. In $-x + y$, the x-coefficient is -1, not 1. A bare y has coefficient 1, not 0.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết các ẩn theo thứ tự khác nhau ở từng phương trình rồi ghi số theo thứ tự xuất hiện.
Writing the unknowns in different orders in different equations and copying the numbers in the order they appear.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Tính cấp của ma trận mở rộng mà bỏ sót cột hằng số. Hệ 3 phương trình, 3 ẩn có ma trận mở rộng cấp 3×4, không phải 3×3. Vạch đứng chỉ để ngăn, không làm mất cột.
Forgetting the constants column when giving the size of an augmented matrix. A system of 3 equations in 3 unknowns has a 3×4 augmented matrix, not 3×3. The bar only separates; it does not remove a column.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Hệ m phương trình, n ẩn có ma trận hệ số cấp m×n và ma trận mở rộng cấp m×(n+1). Một hàng là một phương trình, một cột (trước vạch) là một ẩn, ẩn vắng thì ghi 0.
A system of m equations in n unknowns has an m×n coefficient matrix and an m×(n+1) augmented matrix. One row is one equation, one column before the bar is one unknown, and a missing unknown gets 0.

1.4. Đưa ma trận về dạng bậc thang và thế ngược – *1.4. Row Echelon Form and Back-Substitution*

Hãy nghĩ tới việc gỡ một sợi dây rối: bạn gỡ từng nút từ đầu này sang đầu kia, đến cuối chỉ còn một đoạn thẳng. Với hệ phương trình, ta làm tương tự. Dùng ba phép biến đổi hàng để mỗi hàng bên dưới có ít ẩn hơn hàng bên trên. Hàng cuối chỉ còn một ẩn, đọc ngay được giá trị. Sau đó ta lần ngược lên.
Think of untangling a rope: you work through the knots from one end, and by the last one only a straight piece is left. We do the same with a linear system. Use the three row operations so that each row has fewer unknowns than the row above. The last row ends up with one unknown, which you can read off at once. Then you work back up.

Dạng bậc thang và phần tử trụ – *Echelon form and pivots*

Phần tử trụ (pivot) của một hàng là số khác 0 đầu tiên tính từ bên trái của hàng đó. Ví dụ hàng (0, 0, 5, 7) có trụ là 5. Hàng toàn số 0 thì không có trụ.
The pivot of a row is the first nonzero number counting from the left. For instance, the row (0, 0, 5, 7) has pivot 5. A row of all zeros has no pivot.

Ma trận ở dạng bậc thang khi thỏa hai điều kiện: trụ của mỗi hàng nằm ở cột bên phải trụ của hàng ngay trên nó, và các hàng toàn số 0 (nếu có) nằm dưới cùng. Nhìn vào, các số

khác 0 tạo thành những bậc thang đi xuống về bên phải, còn phía dưới mỗi trụ là một cột toàn số 0.

A matrix is in row echelon form when two conditions hold: each row's pivot sits in a column to the right of the pivot in the row above, and any all-zero rows are at the bottom. The nonzero entries then form steps going down to the right, and below each pivot the column is all zeros.

> **PHẢI THUỘC / MEMORISE –** Bậc thang = trụ của hàng dưới nằm lệch sang phải so với trụ hàng trên, hàng 0 xuống đáy. Dạng này chưa cần trụ bằng 1.
> *Echelon form means each lower pivot sits strictly to the right of the pivot above, with zero rows at the bottom. Pivots do not need to equal 1.*

Quy trình khử từng cột và thế ngược – *Column-by-column elimination and back-substitution*

Bạn cần ma trận mở rộng của hệ (hệ số và vế phải viết chung một bảng, vạch dọc ngăn vế phải). Sau đó làm lần lượt như sau.

Start from the augmented matrix of the system (coefficients and right-hand sides in one table, with a vertical bar before the right-hand side). Then proceed as follows.

1. Nhìn cột đầu tiên chưa xử lý, từ hàng đang xét trở xuống. Chọn một số khác 0 làm trụ. Nếu ô đang xét bằng 0, đổi chỗ hàng này với một hàng bên dưới có số khác 0 ở cột đó.
   Look at the first column not yet handled, from the current row downward. Choose a nonzero entry as the pivot. If the current entry is 0, swap this row with a lower row that has a nonzero entry in that column.
2. Với mỗi hàng bên dưới trụ, tính hệ số m = (số cần khử) ÷ (trụ). Rồi thay hàng đó bằng: hàng đó trừ m lần hàng trụ. Ô dưới trụ thành 0.
   For each row below the pivot, compute m = (entry to remove) ÷ (pivot). Replace that row by: that row minus m times the pivot row. The entry under the pivot becomes 0.
3. Chuyển sang hàng kế tiếp và cột kế tiếp, lặp lại hai bước trên cho tới khi hết hàng hoặc hết cột.
   Move to the next row and next column, and repeat the two steps above until you run out of rows or columns.
4. Thế ngược: đọc hàng cuối khác 0 để tìm một ẩn, thay giá trị đó vào hàng ngay trên để tìm ẩn kế tiếp. Làm tiếp như vậy với từng hàng phía trên, đến hàng 1 thì xong.
   Back-substitution: read the last nonzero row to find one unknown, then substitute it into the row just above to find the next unknown. Do the same with each row above it, and stop once row 1 is done.

> **VÍ DỤ / EXAMPLE –** Xét hệ ba ẩn x + 2y + z = 8, 2x + 5y − z = 9, 3x + 4y + 2z = 17. Ma trận mở rộng của hệ như sau:
> *Take the three-unknown system x + 2y + z = 8, 2x + 5y − z = 9, 3x + 4y + 2z = 17. Its augmented matrix is:*

```
[1 2 1 | 8] ; [2 5 -1 | 9] ; [3 4 2 | 17]
```

Cột 1: trụ là 1 ở hàng 1. Hàng 2 có m = 2÷1 = 2, hàng 3 có m = 3÷1 = 3. Làm H2 − 2·H1: (2−2, 5−4, −1−2, 9−16) = (0, 1, −3, −7). Làm H3 − 3·H1: (3−3, 4−6, 2−3, 17−24) = (0, −2, −1, −7).

Column 1: the pivot is the 1 in row 1. Row 2 has m = 2÷1 = 2 and row 3 has m = 3÷1 = 3. R2 − 2·R1 gives (2−2, 5−4, −1−2, 9−16) = (0, 1, −3, −7). R3 − 3·R1 gives (3−3, 4−6, 2−3, 17−24) = (0, −2, −1, −7).

```
[1 2 1 | 8] ; [0 1 -3 | -7] ; [0 -2 -1 | -7]
```

Cột 2: trụ là 1 ở hàng 2. Số cần khử là −2 nên m = −2÷1 = −2. Làm H3 − (−2)·H2, tức H3 + 2·H2: (0, −2+2, −1−6, −7−14) = (0, 0, −7, −21).

Column 2: the pivot is the 1 in row 2. The entry to remove is −2, so m = −2÷1 = −2. R3 − (−2)·R2, that is R3 + 2·R2, gives (0, −2+2, −1−6, −7−14) = (0, 0, −7, −21).

```
[1 2 1 | 8] ; [0 1 -3 | -7] ; [0 0 -7 | -21]
```

Đã là bậc thang với ba trụ 1, 1, −7. Thế ngược: hàng 3 cho −7z = −21 nên z = 3. Hàng 2 cho y − 3·3 = −7, tức y = 2. Hàng 1 cho x + 2·2 + 3 = 8, tức x = 1. Nghiệm duy nhất là (x, y, z) = (1, 2, 3). Thử vào phương trình thứ ba: 3 + 8 + 6 = 17, đúng.

The matrix is now in echelon form with pivots 1, 1, −7. Back-substitute: row 3 gives −7z = −21, so z = 3. Row 2 gives y − 3·3 = −7, so y = 2. Row 1 gives x + 2·2 + 3 = 8, so x = 1. The unique solution is (x, y, z) = (1, 2, 3). Check in the third equation: 3 + 8 + 6 = 17, correct.

Hệ có nghiệm duy nhất vì mỗi cột hệ số đều chứa một trụ, nên không ẩn nào còn tự do.

The solution is unique because every coefficient column contains a pivot, so no unknown is left free.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ví dụ thứ hai cần đổi hàng. Xét hệ y + z = 4, x + y + 2z = 9, 2x + y − z = 2. Ô đầu của hàng 1 bằng 0 nên chưa chọn được trụ ở cột 1:

A second example needs a row swap. Take the system y + z = 4, x + y + 2z = 9, 2x + y − z = 2. The first entry of row 1 is 0, so there is no pivot yet in column 1:

```
[0 1 1 | 4] ; [1 1 2 | 9] ; [2 1 -1 | 2]
```

Đổi H1 ↔ H2 để có trụ 1 ở góc trên trái. Rồi làm H3 − 2·H1: (0, 1−2, −1−4, 2−18) = (0, −1, −5, −16). Ở cột 2, trụ là 1 (hàng 2), số cần khử là −1 nên H3 + H2 = (0, 0, −4, −12). Thế ngược: z = 3, y + 3 = 4 nên y = 1, x + 1 + 6 = 9 nên x = 2. Nghiệm là (2, 1, 3).

Swap R1 ↔ R2 to put a pivot 1 in the top left. Then R3 − 2·R1 gives (0, 1−2, −1−4, 2−18) = (0, −1, −5, −16). In column 2 the pivot is the 1 in row 2 and the entry to remove is −1, so R3 + R2 = (0, 0, −4, −12). Back-substitute: z = 3, y + 3 = 4 so y = 1, x + 1 + 6 = 9 so x = 2. The solution is (2, 1, 3).

Khi khử xong, hãy đọc hàng cuối. Hàng (0 0 | 1) nghĩa là 0 = 1, vô lý, nên hệ vô nghiệm. Ví dụ x + 2y = 3, 2x + 4y = 7: H2 − 2·H1 = (0, 0, 7−6) = (0, 0 | 1). Hàng (0 0 | 0) chỉ là 0 = 0, bỏ đi được. Nếu sau đó còn cột không có trụ, ẩn của cột ấy là ẩn tự do và hệ có vô số nghiệm.

After elimination, read the last row. A row (0 0 | 1) says 0 = 1, which is impossible, so the system has no solution. For example, x + 2y = 3, 2x + 4y = 7: R2 − 2·R1 = (0, 0, 7−6) = (0, 0 | 1). A

row (0 0 | 0) only says 0 = 0 and can be dropped. If a column then has no pivot, its unknown is free and the system has infinitely many solutions.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Cộng nhầm dấu khi khử. Ở H2 − 2·H1, ô thứ ba là −1 − 2 = −3. Nhiều bạn viết −1 + 2 = 1 vì nghĩ "trừ số âm". Hàng 2 thành (0, 1, 1, −7), kéo theo z, y, x sai dây chuyền. Tương tự, khi m âm như −2, phải viết H3 − (−2)·H2 = H3 + 2·H2. Nếu vẫn trừ 2·H2 thì ô −2 thành −4 chứ không về 0.
Sign slips during elimination. In R2 − 2·R1, the third entry is −1 − 2 = −3. Many students write −1 + 2 = 1, which turns row 2 into (0, 1, 1, −7) and ruins z, y and x in turn. Likewise, when m is negative, like −2, you must write R3 − (−2)·R2 = R3 + 2·R2. If you still subtract 2·R2, the −2 becomes −4 instead of 0.

MẸO / TIP – Sau mỗi phép khử, kiểm ngay ô dưới trụ đã về 0 chưa. Cuối cùng, thay nghiệm vào cả ba phương trình gốc, không thay vào hệ đã biến đổi.
After each elimination, check that the entry under the pivot is now 0. At the end, substitute the solution into the original equations, not the transformed ones.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên đổi hàng khi ô trụ bằng 0, rồi chia cho 0. Cũng đừng quên biến đổi vế phải: phép làm trên hàng phải áp dụng cho cả cột sau vạch.
Forgetting to swap rows when the pivot position holds 0, then dividing by 0. Also remember the right-hand side: every operation on a row must be applied to the entry after the bar as well.

1.5. Ẩn chính, ẩn tự do và ba khả năng về số nghiệm – *1.5. Leading Variables, Free Variables and the Three Possible Outcomes*

Sau khi khử Gauss, mỗi hàng khác 0 có một hệ số khác 0 đầu tiên tính từ trái sang. Ẩn nhân hệ số đó gọi là ẩn chính của hàng ấy. Hình dung mỗi hàng "chốt" một ẩn, giống như mỗi người trong nhóm nhận đúng một việc. Ẩn không được hàng nào chốt gọi là ẩn tự do: bạn muốn cho nó giá trị nào cũng được, các ẩn còn lại sẽ tự điều chỉnh theo.
After Gauss's Method, every nonzero row has a first nonzero coefficient, reading left to right. The variable carrying that coefficient is the leading variable of that row. Picture each row "claiming" one variable, like each person in a team taking exactly one job. A variable that no row claims is a free variable: you may give it any value you like, and the other variables adjust to match.

Bạn chỉ cần nhìn dạng bậc thang là biết hệ thuộc một trong ba kết cục: vô nghiệm, nghiệm duy nhất, hoặc vô số nghiệm. Không có kết cục thứ tư, chẳng hạn đúng hai nghiệm.
The echelon form alone tells you which of three outcomes you have: no solution, exactly one solution, or infinitely many. There is no fourth outcome, such as exactly two solutions.

Cách đọc kết cục từ dạng bậc thang – *How to read the outcome from echelon form*

1. Khử Gauss đưa hệ về dạng bậc thang. Hàng 0 = 0 có thể bỏ đi, nó không mang thông tin.
   Reduce the system to echelon form with Gauss's Method. A row 0 = 0 can be dropped; it carries no information.

2. Tìm hàng có dạng 0 = c với c khác 0 (ví dụ 0 = 1). Hàng này nói rằng 0 bằng một số khác 0, điều không thể xảy ra. Có hàng như vậy thì hệ vô nghiệm, bạn dừng ngay.
Look for a row of the form 0 = c with c nonzero (for example 0 = 1). It claims that zero equals a nonzero number, which is impossible. If such a row exists, the system has no solution and you stop.
3. Nếu không có hàng mâu thuẫn, đếm ẩn chính và so với số ẩn của hệ.
If there is no contradictory row, count the leading variables and compare with the number of unknowns.
4. Mọi ẩn đều là ẩn chính thì hệ có đúng một nghiệm, tìm bằng thế ngược từ hàng cuối lên.
If every variable is leading, the system has exactly one solution, found by back substitution from the last row upward.
5. Còn ít nhất một ẩn tự do thì hệ có vô số nghiệm, vì ẩn tự do nhận được vô số giá trị.
If at least one variable is free, the system has infinitely many solutions, because a free variable can take infinitely many values.
6. Thế nghiệm vừa tìm vào từng phương trình gốc để thử lại. Với hệ có ẩn tự do, thử bằng một giá trị cụ thể của ẩn đó.
Substitute the answer back into each original equation as a check. For a system with a free variable, test it with one specific value of that variable.

Ba hệ cùng cỡ, ba kết cục – ***Three systems of the same size, three outcomes***

Cả ba hệ sau đều có 3 phương trình, 3 ẩn x, y, z. Hai phương trình đầu giống nhau, chỉ khác phương trình thứ ba.
Each of the next three systems has 3 equations and 3 unknowns x, y, z. The first two equations are the same; only the third differs.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ A: x + y + z = 6; 2x + 3y + z = 11; x + 2y + 3z = 14. Lấy dòng 2 trừ 2 lần dòng 1: y − z = −1. Lấy dòng 3 trừ dòng 1: y + 2z = 8. Lấy hai dòng mới trừ nhau: 3z = 9. Ba hàng chốt x, y, z nên mọi ẩn đều chính. Thế ngược: z = 3, y = −1 + 3 = 2, x = 6 − 2 − 3 = 1. Nghiệm duy nhất (1, 2, 3). Thử lại: 2·1 + 3·2 + 3 = 11 và 1 + 2·2 + 3·3 = 14, đều đúng.
System A: x + y + z = 6; 2x + 3y + z = 11; x + 2y + 3z = 14. Row 2 minus 2 times row 1 gives y − z = −1. Row 3 minus row 1 gives y + 2z = 8. Subtracting the two new rows gives 3z = 9. Three rows claim x, y, z, so every variable is leading. Back substitution: z = 3, y = −1 + 3 = 2, x = 6 − 2 − 3 = 1. The unique solution is (1, 2, 3). Check: 2·1 + 3·2 + 3 = 11 and 1 + 2·2 + 3·3 = 14, both correct.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ B: x + y + z = 6; 2x + 3y + z = 11; 3x + 4y + 2z = 18. Dòng 2 trừ 2 lần dòng 1: y − z = −1. Dòng 3 trừ 3 lần dòng 1: y − z = 0. Lấy hai dòng mới trừ nhau: 0 = 1. Hàng mâu thuẫn, hệ vô nghiệm.
System B: x + y + z = 6; 2x + 3y + z = 11; 3x + 4y + 2z = 18. Row 2 minus 2 times row 1 gives y − z = −1. Row 3 minus 3 times row 1 gives y − z = 0. Subtracting the two new rows gives 0 = 1. That is a contradictory row, so there is no solution.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ C: x + y + z = 6; 2x + 3y + z = 11; 3x + 4y + 2z = 17. Dòng 2 trừ 2 lần dòng 1: y − z = −1. Dòng 3 trừ 3 lần dòng 1: y − z = −1. Lấy hai dòng mới trừ nhau: 0 = 0. Ẩn chính là x và y, ẩn tự do là z. Đặt z = t: y = −1 + t, x = 6 − (−1 + t) − t = 7 − 2t. Tập

nghiệm: (7 − 2t, −1 + t, t) với t bất kỳ. Thử t = 3 ra lại (1, 2, 3).
System C: x + y + z = 6; 2x + 3y + z = 11; 3x + 4y + 2z = 17. Row 2 minus 2 times row 1 gives y − z = −1. Row 3 minus 3 times row 1 gives y − z = −1. Subtracting the two new rows gives 0 = 0. The leading variables are x and y; z is free. Set z = t: y = −1 + t, x = 6 − (−1 + t) − t = 7 − 2t. The solution set is (7 − 2t, −1 + t, t) for any t. Taking t = 3 gives (1, 2, 3) again.

Ba hệ cùng cỡ 3×3 mà kết cục khác hẳn. Cỡ của hệ không quyết định số nghiệm, mà do dạng bậc thang quyết định.
Three 3×3 systems, three different outcomes. The size of the system does not decide the number of solutions; the echelon form does.

Kết cục *Outcome*	**Dấu hiệu ở dạng bậc thang** *Sign in echelon form*	**Số nghiệm** *Number of solutions*
Hệ B *System B*	Có hàng 0 = c với c khác 0 *A row 0 = c with c nonzero*	Không có nghiệm nào *No solutions*
Hệ A *System A*	Không mâu thuẫn, mọi ẩn đều là ẩn chính *No contradiction, every variable is leading*	Đúng một nghiệm *Exactly one solution*
Hệ C *System C*	Không mâu thuẫn, có ẩn tự do *No contradiction, at least one free variable*	Vô số nghiệm *Infinitely many solutions*

Nhìn bằng hình: hai phương trình, hai ẩn – ***A picture: two equations, two unknowns***

Với hai ẩn x, y, mỗi phương trình là một đường thẳng trên mặt phẳng. Nghiệm là điểm nằm trên cả hai đường. Hai đường thẳng chỉ có ba cách nằm cạnh nhau: cắt nhau, song song, hoặc trùng nhau. Ba cách ấy khớp đúng ba kết cục ở trên.
With two unknowns x, y, each equation is a line in the plane. A solution is a point lying on both lines. Two lines can sit in only three ways: crossing, parallel, or identical. Those three ways match the three outcomes above.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cắt nhau: x + y = 3 và x − y = 1. Cộng hai vế ra 2x = 4, nên x = 2, y = 1. Một nghiệm (2, 1). Trùng nhau: x + y = 3 và 2x + 2y = 6. Dòng 2 trừ 2 lần dòng 1 ra 0 = 0, y là ẩn tự do, đặt y = t thì x = 3 − t, vô số nghiệm. Song song: x + y = 3 và x + y = 5. Dòng 2 trừ dòng 1 ra 0 = 2, vô nghiệm.
Crossing: x + y = 3 and x − y = 1. Adding the equations gives 2x = 4, so x = 2, y = 1. One solution (2, 1). Identical: x + y = 3 and 2x + 2y = 6. Row 2 minus 2 times row 1 gives 0 = 0, y is free; set y = t and x = 3 − t, infinitely many solutions. Parallel: x + y = 3 and x + y = 5. Row 2 minus row 1 gives 0 = 2, so no solution.

GHI CHÚ / NOTE – Hệ có số phương trình bằng số ẩn (hệ vuông) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi dạng bậc thang của nó có mọi ẩn đều chính.
A system with as many equations as unknowns has a unique solution exactly when every variable is leading in its echelon form.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Thấy hàng 0 = 0 rồi kết luận vô nghiệm. Hàng 0 = 0 luôn đúng và vô hại. Chỉ hàng 0 = c với c khác 0 mới gây vô nghiệm.

Seeing a row 0 = 0 and declaring no solution. A row 0 = 0 is always true and harmless. Only a row 0 = c with c nonzero rules out solutions.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Cho rằng ít phương trình hơn số ẩn thì chắc chắn vô số nghiệm. Hệ như vậy vẫn có thể vô nghiệm, chẳng hạn hai phương trình x + y + z = 1 và x + y + z = 2. Bạn phải kiểm tra mâu thuẫn trước rồi mới đếm ẩn tự do.
Assuming fewer equations than unknowns always means infinitely many solutions. Such a system can still be inconsistent, for example x + y + z = 1 together with x + y + z = 2. Check for a contradiction first, then count free variables.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chọn ẩn tự do là ẩn nằm cuối. Ẩn tự do là ẩn không đứng đầu hàng nào, có thể nằm giữa. Trong dạng bậc thang, hãy gạch chân ẩn đứng đầu mỗi hàng, ẩn còn lại là tự do.
Choosing the last variable as free by habit. A free variable is one that leads no row, and it may sit in the middle. In echelon form, underline the leading variable of each row; the rest are free.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nghĩ rằng có ẩn tự do thì ẩn nào cũng thay đổi theo. Có ẩn chính vẫn mang giá trị cố định, ví dụ hệ có hàng −w = 1 thì w luôn bằng −1 dù ẩn tự do là gì.
Thinking that once a free variable exists, every variable must change with it. A leading variable can still be fixed: if a row reads −w = 1, then w stays −1 whatever the free variable is.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Có hàng 0 = c với c khác 0 thì vô nghiệm. Không mâu thuẫn và mọi ẩn đều chính thì có nghiệm duy nhất. Không mâu thuẫn và có ẩn tự do thì có vô số nghiệm.
A row 0 = c with c nonzero means no solution. No contradiction and every variable leading means exactly one solution. No contradiction and at least one free variable means infinitely many solutions.

1.6. Viết tập nghiệm bằng tham số và dạng vectơ – *1.6. Parametrizing the Solution Set in Vector Form*

Khi hệ có vô số nghiệm, bạn không liệt kê hết được. Cách gọn là chọn vài ẩn cho chạy tự do, gọi chúng là tham số, rồi biểu diễn mọi ẩn còn lại qua các tham số đó. Giống như chỉ đường: "đi từ nhà ra ngã tư, rồi rẽ phải bao nhiêu bước tùy bạn". Một điểm xuất phát cộng với các hướng đi tự do.
When a system has infinitely many solutions, you can't list them all. The neat way is to let a few unknowns run freely, call them parameters, and write every other unknown in terms of them. It works like giving directions: "start at home, walk to the crossroads, then turn right as many steps as you like." One starting point plus some free directions.

Ẩn chính là ẩn đứng ở đầu một hàng sau khi đã đưa về dạng bậc thang. Ẩn tự do là ẩn không đứng đầu hàng nào. Mỗi ẩn tự do được đặt bằng một chữ cái riêng, thường là s, t. Số tham số bằng số ẩn tự do.
A leading unknown is the one at the front of a row once the system is in echelon form. A free unknown is one that leads no row. Each free unknown gets its own letter, usually s, t. The number of parameters equals the number of free unknowns.

Trước khi viết tham số, hãy nhìn dạng bậc thang để biết có cần viết hay không. Nếu có hàng dạng 0 = một số khác 0 thì hệ vô nghiệm. Nếu không có mâu thuẫn và mọi ẩn đều là

ẩn chính thì hệ có đúng một nghiệm. Còn lại, tức là có ít nhất một ẩn tự do, hệ có vô số nghiệm.

Before writing any parameters, look at the echelon form to see whether you need them. A row of the form 0 = a nonzero number means there is no solution. If there is no contradiction and every unknown is a leading unknown, there is exactly one solution. Otherwise, with at least one free unknown, there are infinitely many solutions.

Các bước viết nghiệm – ***Steps for writing the solution***

1. Đưa hệ về dạng bậc thang bằng phép khử Gauss. Bỏ các hàng toàn số 0.
   Reduce the system to echelon form with Gauss's Method. Drop any rows that are all zeros.
2. Gạch dưới ẩn chính của mỗi hàng. Những ẩn còn lại là ẩn tự do.
   Mark the leading unknown of each row. The remaining unknowns are the free ones.
3. Đặt mỗi ẩn tự do bằng một tham số, ví dụ $x_2 = s$, $x_4 = t$.
   Set each free unknown equal to a parameter, for example $x_2 = s$, $x_4 = t$.
4. Đi từ hàng cuối ngược lên hàng thứ nhất. Ở mỗi hàng, giải ra ẩn chính rồi thế các giá trị đã có vào.
   Work from the last row back up to the first row. In each row, solve for the leading unknown and substitute the values you already have.
5. Viết nghiệm dưới dạng một vectơ, rồi tách theo từng chữ: phần không chứa tham số, phần nhân s, phần nhân t.
   Write the solution as one vector, then split it by letter: the part with no parameter, the part multiplied by s, the part multiplied by t.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải hệ: $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$; $2x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 9$; $x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 6$. Lấy hàng 2 trừ 2 lần hàng 1: được $x_3 + 2x_4 = 1$. Lấy hàng 3 trừ hàng 1: được $2x_3 + 4x_4 = 2$. Lấy hàng này trừ 2 lần hàng mới của hàng 2: ra hàng toàn số 0, bỏ đi. Dạng bậc thang còn hai phương trình: $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$ và $x_3 + 2x_4 = 1$. Ẩn chính là x_1, x_3. Ẩn tự do là x_2, x_4. Đặt $x_2 = s$, $x_4 = t$. Từ hàng 2: $x_3 = 1 - 2t$. Từ hàng 1: $x_1 = 4 - 2s + x_3 - x_4 = 4 - 2s + (1 - 2t) - t = 5 - 2s - 3t$. Viết gọn thành tổng các vectơ (ghi theo hàng cho ngắn) như sau:

Solve the system: $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$; $2x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 9$; $x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 6$. Subtract 2 times row 1 from row 2 to get $x_3 + 2x_4 = 1$. Subtract row 1 from row 3 to get $2x_3 + 4x_4 = 2$. Subtract 2 times the new row 2 from this row and you get a row of zeros, which you drop. Echelon form leaves two equations: $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$ and $x_3 + 2x_4 = 1$. The leading unknowns are x_1, x_3. The free unknowns are x_2, x_4. Set $x_2 = s$, $x_4 = t$. From row 2: $x_3 = 1 - 2t$. From row 1: $x_1 = 4 - 2s + x_3 - x_4 = 4 - 2s + (1 - 2t) - t = 5 - 2s - 3t$. Written as a sum of vectors (listed in a row to save space):

```
(x₁, x₂, x₃, x₄) = (5, 0, 1, 0) + s·(−2, 1, 0, 0) + t·(−3, 0, −2, 1), với s, t là số thực bất kỳ
```

Vectơ (5, 0, 1, 0) ứng với s = t = 0, nên là một nghiệm riêng. Hai vectơ còn lại cho hướng thay đổi: mỗi lần s tăng 1 đơn vị, nghiệm dịch đúng một vectơ (−2, 1, 0, 0).

The vector (5, 0, 1, 0) comes from s = t = 0, so it is a particular solution. The other two vectors give the directions of change: each time s goes up by 1, the solution shifts by exactly the vector (−2, 1, 0, 0).

Kiểm tra lại bằng cách thay vào hệ gốc – ***Checking by substituting into the original system***

Thay $x_1 = 5 - 2s - 3t$, $x_2 = s$, $x_3 = 1 - 2t$, $x_4 = t$ vào ba phương trình gốc. Nếu các tham số triệt tiêu hết, nghiệm đúng với mọi s, t.

Substitute $x_1 = 5 - 2s - 3t$, $x_2 = s$, $x_3 = 1 - 2t$, $x_4 = t$ into the three original equations. If the parameters cancel completely, the solution holds for every s and t.

- Phương trình 1: $(5 - 2s - 3t) + 2s - (1 - 2t) + t = 5 - 1 + (-2s + 2s) + (-3t + 2t + t) = 4$. Đúng.
  Equation 1: $(5 - 2s - 3t) + 2s - (1 - 2t) + t = 5 - 1 + (-2s + 2s) + (-3t + 2t + t) = 4$. Correct.
- Phương trình 2: $2(5 - 2s - 3t) + 4s - (1 - 2t) + 4t = 10 - 1 + (-4s + 4s) + (-6t + 2t + 4t) = 9$. Đúng.
  Equation 2: $2(5 - 2s - 3t) + 4s - (1 - 2t) + 4t = 10 - 1 + (-4s + 4s) + (-6t + 2t + 4t) = 9$. Correct.
- Phương trình 3: $(5 - 2s - 3t) + 2s + (1 - 2t) + 5t = 5 + 1 + (-2s + 2s) + (-3t - 2t + 5t) = 6$. Đúng.
  Equation 3: $(5 - 2s - 3t) + 2s + (1 - 2t) + 5t = 5 + 1 + (-2s + 2s) + (-3t - 2t + 5t) = 6$. Correct.

Thử thêm một điểm cụ thể: $s = 1$, $t = 1$ cho $(0, 1, -1, 1)$. Vế trái ba phương trình lần lượt là $0 + 2 + 1 + 1 = 4$, $0 + 4 + 1 + 4 = 9$, $0 + 2 - 1 + 5 = 6$. Khớp vế phải.

Try one concrete point: $s = 1$, $t = 1$ gives $(0, 1, -1, 1)$. The left sides of the three equations are $0 + 2 + 1 + 1 = 4$, $0 + 4 + 1 + 4 = 9$, $0 + 2 - 1 + 5 = 6$. They match the right sides.

Một ví dụ ngắn hơn: ẩn tự do nằm giữa – ***A shorter example: the free unknown sits in the middle***

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải hệ: $x + y + z = 6$ và $2x + 2y + 3z = 14$. Lấy hàng 2 trừ 2 lần hàng 1: được $z = 2$. Ẩn chính là x và z. Ẩn tự do là y, dù nó đứng giữa hai ẩn chính. Đặt $y = s$. Hàng 2 cho $z = 2$. Hàng 1 cho $x = 6 - s - 2 = 4 - s$. Nghiệm là $(x, y, z) = (4, 0, 2) + s \cdot (-1, 1, 0)$. Thử $s = 3$ ra $(1, 3, 2)$: $1 + 3 + 2 = 6$ và $2 + 6 + 6 = 14$. Cả hai đều đúng.

Solve the system: $x + y + z = 6$ and $2x + 2y + 3z = 14$. Subtract 2 times row 1 from row 2 to get $z = 2$. The leading unknowns are x and z. The free unknown is y, even though it sits between the two leading ones. Set $y = s$. Row 2 gives $z = 2$. Row 1 gives $x = 6 - s - 2 = 4 - s$. The solution is $(x, y, z) = (4, 0, 2) + s \cdot (-1, 1, 0)$. Try $s = 3$ to get $(1, 3, 2)$: $1 + 3 + 2 = 6$ and $2 + 6 + 6 = 14$. Both hold.

MẸO / TIP – Hai vectơ nhân tham số chính là nghiệm của hệ thuần nhất (vế phải bằng 0). Thay riêng từng vectơ vào hệ với vế phải 0 là cách kiểm tra nhanh. Chẳng hạn $(-3, 0, -2, 1)$ ở phương trình 1: $-3 + 0 + 2 + 1 = 0$.

The vectors multiplied by parameters solve the homogeneous system (right sides all 0). Plugging each one into the system with zero right sides is a quick check. For instance $(-3, 0, -2, 1)$ in equation 1: $-3 + 0 + 2 + 1 = 0$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chọn nhầm ẩn tự do, ví dụ coi x_3 là tham số chỉ vì nó đứng giữa. Ẩn tự do là ẩn không đứng đầu hàng nào của dạng bậc thang.

Picking the wrong free unknowns, for instance treating x_3 as a parameter just because it sits in the middle. A free unknown is one that leads no row of the echelon form.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên đưa chính tham số vào vectơ. Ở ví dụ trên, hàng x_2 phải là $(0 + s\cdot 1 + t\cdot 0)$, không để trống.
Forgetting to list the parameter's own unknown in the vector. In the example, the x_2 entry must be $0 + s\cdot 1 + t\cdot 0$, not left blank.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Sai dấu khi thế ngược, nhất là khi chuyển vế. Kiểm tra bằng cách thay $s = t = 0$ và một cặp s, t khác vào hệ gốc.
Sign slips during back substitution, especially when moving terms across. Check by plugging $s = t = 0$ and one other pair s, t into the original system.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đếm sai số tham số. Nếu bạn còn ẩn tự do mà chưa đặt chữ cho nó, vectơ nghiệm sẽ thiếu một hướng và bỏ sót vô số nghiệm.
Miscounting the parameters. If a free unknown is left without a letter, the solution vector misses a direction and drops infinitely many solutions.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Số tham số bằng số ẩn tự do. Nghiệm tổng quát có dạng: một nghiệm riêng cộng tổng của từng tham số nhân một vectơ.
The number of parameters equals the number of free unknowns. The general solution has the form: one particular solution plus the sum of each parameter times a vector.

1.7. Hệ thuần nhất và nghiệm tổng quát bằng nghiệm riêng cộng nghiệm thuần nhất – *1.7. Homogeneous Systems: General Solution Equals Particular Plus Homogeneous*

Hệ thuần nhất là hệ mà mọi vế phải đều bằng 0. Ví dụ: $x + 2y = 0$ và $3x + 4y = 0$. Hệ có vế phải khác 0 gọi là không thuần nhất. Mỗi hệ không thuần nhất có một "hệ thuần nhất tương ứng": giữ nguyên hệ số, thay mọi vế phải bằng 0.
A homogeneous system is one where every right-hand side is 0. For example: $x + 2y = 0$ and $3x + 4y = 0$. A system with a nonzero right-hand side is called nonhomogeneous. Each such system has an associated homogeneous system: keep the coefficients and replace every right-hand side with 0.

Bộ toàn số 0 luôn thỏa một hệ thuần nhất, vì thay vào thì mọi vế trái đều bằng 0. Nó gọi là nghiệm tầm thường. Vì vậy hệ thuần nhất không bao giờ vô nghiệm. Chỉ còn hai khả năng: chỉ có nghiệm tầm thường, hoặc có vô số nghiệm.
The all-zero tuple always satisfies a homogeneous system, because every left side becomes 0. It is called the trivial solution. So a homogeneous system is never inconsistent. Only two cases remain: the trivial solution alone, or infinitely many solutions.

Nếu có một nghiệm v khác 0 thì mọi bội số $t\cdot v$ cũng là nghiệm. Các bội số này khác nhau đôi một, nên ta có vô số nghiệm.
If there is one nonzero solution v, every multiple $t\cdot v$ is also a solution. These multiples are all different, so there are infinitely many solutions.

Ma trận suy biến và không suy biến – *Singular and nonsingular matrices*

Hai khái niệm này chỉ dùng cho ma trận vuông, tức số hàng bằng số cột. Ma trận hệ số vuông là không suy biến nếu hệ thuần nhất tương ứng chỉ có nghiệm tầm thường. Ngược lại, nếu hệ thuần nhất có vô số nghiệm thì ma trận suy biến.

These terms apply only to square matrices, meaning the number of rows equals the number of columns. A square coefficient matrix is nonsingular if its homogeneous system has only the trivial solution. If the homogeneous system has infinitely many solutions, the matrix is singular.

1. Viết hệ thuần nhất có ma trận hệ số đó, mọi vế phải bằng 0.
   Write the homogeneous system with that coefficient matrix, every right-hand side 0.
2. Khử Gauss đưa hệ về dạng bậc thang.
   Reduce it to echelon form with Gauss's method.
3. Đếm ẩn tự do. Không còn ẩn tự do thì ma trận không suy biến. Còn ít nhất một ẩn tự do thì ma trận suy biến.
   Count the free variables. None left means the matrix is nonsingular. At least one free variable means it is singular.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xét ma trận [1 2; 3 4], tức hệ $x + 2y = 0$, $3x + 4y = 0$. Lấy hàng 2 trừ 3 lần hàng 1 được $-2y = 0$, nên $y = 0$ rồi $x = 0$. Chỉ có nghiệm tầm thường, ma trận không suy biến. Xét ma trận [1 2; 3 6]: trừ 3 lần hàng 1 khỏi hàng 2 được $0 = 0$. Còn một phương trình $x + 2y = 0$ với y tự do, nên có vô số nghiệm $(x, y) = (-2y, y)$. Ma trận suy biến.
Take the matrix [1 2; 3 4], that is, $x + 2y = 0$ and $3x + 4y = 0$. Subtract 3 times row 1 from row 2 to get $-2y = 0$, so $y = 0$ and then $x = 0$. Only the trivial solution exists, so the matrix is nonsingular. Now take [1 2; 3 6]: subtracting 3 times row 1 from row 2 gives $0 = 0$. One equation $x + 2y = 0$ remains with y free, so there are infinitely many solutions $(x, y) = (-2y, y)$. The matrix is singular.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xét ma trận 3×3 [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]. Hàng 2 trừ 4 lần hàng 1 được $-3y - 6z = 0$. Hàng 3 trừ 7 lần hàng 1 được $-6y - 12z = 0$. Hàng 3 trừ 2 lần hàng 2 cho $0 = 0$. Còn hai phương trình cho ba ẩn, z tự do. Ta có $y = -2z$ và $x = -2y - 3z = z$. Nghiệm là $z \cdot (1, -2, 1)$. Kiểm tra: $1 - 4 + 3 = 0$, $4 - 10 + 6 = 0$, $7 - 16 + 9 = 0$. Ma trận suy biến.
Take the 3×3 matrix [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]. Row 2 minus 4 times row 1 gives $-3y - 6z = 0$. Row 3 minus 7 times row 1 gives $-6y - 12z = 0$. Row 3 minus 2 times row 2 gives $0 = 0$. Two equations remain for three unknowns, with z free. So $y = -2z$ and $x = -2y - 3z = z$. The solutions are $z \cdot (1, -2, 1)$. Check: $1 - 4 + 3 = 0$, $4 - 10 + 6 = 0$, $7 - 16 + 9 = 0$. The matrix is singular.

Ma trận không suy biến cho hệ vuông có đúng một nghiệm với mọi vế phải. Ma trận suy biến thì không bao giờ cho đúng một nghiệm: hệ hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

A nonsingular matrix gives a square system exactly one solution for every right-hand side. A singular matrix never gives exactly one solution: the system has either none or infinitely many.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cùng ma trận suy biến [1 2; 3 6], đổi vế phải. Hệ $x + 2y = 5$ và $3x + 6y = 15$: hàng 2 trừ 3 lần hàng 1 được $0 = 0$, nên có vô số nghiệm $(5, 0) + y \cdot (-2, 1)$. Hệ $x + 2y = 5$ và $3x + 6y = 10$: cùng phép trừ được $0 = -5$, vô nghiệm. Cả hai kết quả đều khác "đúng một nghiệm".
Keep the same singular matrix [1 2; 3 6] and change the right-hand sides. The system $x + 2y = 5$ and $3x + 6y = 15$: row 2 minus 3 times row 1 gives $0 = 0$, so there are infinitely many solutions $(5, 0) +$

y·(−2, 1). The system x + 2y = 5 and 3x + 6y = 10: the same subtraction gives 0 = −5, so there is no solution. Neither outcome is "exactly one solution".

Nghiệm tổng quát = nghiệm riêng + nghiệm thuần nhất – *General = particular + homogeneous*

Nghiệm riêng là một nghiệm bất kỳ của hệ đang xét, chọn tùy ý. Nghiệm tổng quát gồm mọi vectơ dạng p + h, trong đó p là nghiệm riêng và h chạy khắp tập nghiệm của hệ thuần nhất tương ứng. Hình dung: bạn đứng ở một điểm p trên "bản đồ nghiệm", rồi dịch chuyển theo mọi hướng mà hệ thuần nhất cho phép.

A particular solution is any one solution of the system, chosen freely. The general solution consists of all vectors p + h, where p is a particular solution and h runs over the solution set of the associated homogeneous system. Picture standing at a point p on the solution map, then moving in every direction the homogeneous system allows.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Hệ có nghiệm riêng p thì tập nghiệm là {p + h | h là nghiệm của hệ thuần nhất tương ứng}. Hệ không có nghiệm riêng thì tập nghiệm rỗng.
If the system has a particular solution p, its solution set is {p + h | h solves the associated homogeneous system}. If there is no particular solution, the solution set is empty.

1. Khử Gauss hệ đã cho để tìm một nghiệm riêng p: cho mọi ẩn tự do bằng 0 rồi thế ngược.
   Apply Gauss's method to the given system and find one particular solution p: set every free variable to 0, then back-substitute.
2. Viết hệ thuần nhất tương ứng bằng cách đổi mọi vế phải thành 0. Khử Gauss với cùng các phép biến đổi hàng.
   Write the associated homogeneous system by changing every right-hand side to 0. Reduce it with the same row operations.
3. Viết nghiệm của hệ thuần nhất theo các ẩn tự do, dưới dạng tổng các vectơ nhân tham số.
   Write the homogeneous solution in terms of the free variables, as a sum of vectors times parameters.
4. Cộng p với kết quả bước 3 để được nghiệm tổng quát.
   Add p to the result of step 3 to get the general solution.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải x + 2y − z = 3 và 2x + 4y + z = 9. Lấy hàng 2 trừ 2 lần hàng 1 được 3z = 3, nên z = 1. Hàng 1 còn x + 2y = 4, với y tự do. Cho y = 0 thì x = 4, nghiệm riêng p = (4, 0, 1). Kiểm tra: 4 + 0 − 1 = 3 và 8 + 0 + 1 = 9. Hệ thuần nhất: x + 2y − z = 0 và 2x + 4y + z = 0. Phép khử cho 3z = 0, nên z = 0 và x = −2y. Nghiệm là y·(−2, 1, 0). Vậy nghiệm tổng quát là (4, 0, 1) + y·(−2, 1, 0) với y thuộc R. Chọn nghiệm riêng khác, y = 1 ra (2, 1, 1): vẫn đúng, vì (2, 1, 1) = (4, 0, 1) + 1·(−2, 1, 0).
Solve x + 2y − z = 3 and 2x + 4y + z = 9. Subtract 2 times row 1 from row 2 to get 3z = 3, so z = 1. Row 1 becomes x + 2y = 4, with y free. Setting y = 0 gives x = 4, so p = (4, 0, 1). Check: 4 + 0 − 1 = 3 and 8 + 0 + 1 = 9. The homogeneous system is x + 2y − z = 0 and 2x + 4y + z = 0. Elimination gives 3z = 0, so z = 0 and x = −2y. The solutions are y·(−2, 1, 0). The general solution is (4, 0, 1) +

y·(−2, 1, 0) for y in R. A different particular solution, y = 1, gives (2, 1, 1): still correct, since (2, 1, 1) = (4, 0, 1) + 1·(−2, 1, 0).

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải x + y = 1 và 2x + 2y = 5. Lấy hàng 2 trừ 2 lần hàng 1 được 0 = 3, vô lý. Hệ không có nghiệm riêng nên tập nghiệm rỗng. Hệ thuần nhất x + y = 0 vẫn có vô số nghiệm, nhưng không có p để cộng vào.
Solve x + y = 1 and 2x + 2y = 5. Subtract 2 times row 1 from row 2 to get 0 = 3, a contradiction. With no particular solution, the solution set is empty. The homogeneous system x + y = 0 still has infinitely many solutions, but there is no p to add them to.

Vì thế tập nghiệm của một hệ tuyến tính chỉ có ba khả năng: rỗng, đúng một phần tử, hoặc vô số phần tử. Hệ có đúng một nghiệm khi có nghiệm riêng và hệ thuần nhất chỉ có nghiệm tầm thường.
So the solution set of a linear system has only three possibilities: empty, exactly one element, or infinitely many. It has exactly one solution when a particular solution exists and the homogeneous system has only the trivial solution.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Cộng nhầm nghiệm của hai hệ khác loại. Phần h phải lấy từ hệ thuần nhất (vế phải bằng 0), không phải từ hệ gốc.
Mixing up the two systems. The part h must come from the homogeneous system (right sides 0), not from the original system.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Thấy hệ thuần nhất có nghiệm rồi kết luận hệ gốc có nghiệm. Hệ gốc có thể vô nghiệm, như ví dụ x + y = 1 và 2x + 2y = 5.
Seeing that the homogeneous system has solutions and concluding the original one does too. The original may be inconsistent, as in x + y = 1 and 2x + 2y = 5.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nói ma trận 2×3 "suy biến". Chỉ ma trận vuông mới xét suy biến hay không.
Calling a 2×3 matrix "singular". Only square matrices are classified as singular or nonsingular.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Tưởng nghiệm riêng là duy nhất nên đối chiếu đáp án với một p cố định. Nhiều p khác nhau cùng đúng, miễn hiệu của chúng là nghiệm của hệ thuần nhất.
Assuming the particular solution is unique and matching your answer against one fixed p. Many different p all work, as long as their difference solves the homogeneous system.

1.8. Biện luận hệ phương trình theo tham số – *1.8. Systems Depending on a Parameter*

Khi hệ có tham số m, mỗi lần khử bạn sẽ gặp một phần tử trụ chứa m. Phần tử trụ là số đứng đầu hàng dùng để triệt các số bên dưới. Nếu nó bằng 0 thì phép chia hỏng, và kết luận về nghiệm cũng đổi. Nên ta khử như bình thường, rồi chia trường hợp theo giá trị m làm trụ bằng 0.
When a system contains a parameter m, some pivots will involve m. A pivot is the leading entry of the row you use to clear the entries below it. If it equals 0, division fails and the conclusion about solutions changes. So eliminate as usual, then split into cases by the values of m that make a pivot zero.

Quy trình – ***Procedure***

1. Lập ma trận mở rộng, giữ nguyên m ở các ô. Đưa số 1 hoặc số không chứa m lên làm trụ đầu tiên nếu có thể, bằng cách đổi chỗ hai hàng.
   Write the augmented matrix and keep m in its cells. If possible, swap rows so that a pivot free of m comes first.
2. Khử về dạng bậc thang bằng phép biến đổi hàng chỉ dùng phép nhân với số không chứa m rồi cộng hàng. Tránh chia cả hàng cho biểu thức có m.
   Reduce to echelon form using only row additions with multiples free of m. Avoid dividing a whole row by an expression containing m.
3. Nhìn hàng cuối, thường có dạng (hệ số theo m) · z = (vế phải theo m). Phân tích hệ số và vế phải thành nhân tử.
   Look at the last row, usually of the form (coefficient in m) · z = (right side in m). Factor both.
4. Giải hệ số bằng 0 để tìm các giá trị m đặc biệt. Mọi m còn lại thuộc một trường hợp chung.
   Solve coefficient = 0 to find the special values of m. All other m form one general case.
5. Với từng giá trị đặc biệt, thay m vào rồi xét hàng đó: dạng 0 = 0 thì có tự do, dạng 0 = số khác 0 thì vô nghiệm. Kết luận từng trường hợp.
   For each special value, substitute m and inspect that row: 0 = 0 leaves a free variable, 0 = nonzero means no solution. State a conclusion for each case.
6. Thử lại một giá trị m cụ thể trong mỗi trường hợp bằng cách thay vào cả ba phương trình gốc. Bước này bắt lỗi tính toán nhanh hơn đọc lại cả bài.
   Test one concrete value of m in each case by substituting into all the original equations. This catches arithmetic slips faster than rereading the whole solution.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Biện luận hệ: x + y + z = 1; x + 2y + 3z = 2; x + 3y + (m²+4)z = m+2. Lấy hàng 2 trừ hàng 1: y + 2z = 1. Lấy hàng 3 trừ hàng 1: 2y + (m²+3)z = m+1. Lấy kết quả này trừ 2 lần (y + 2z = 1): (m²−1)z = m−1, tức (m−1)(m+1)z = m−1. Trụ bằng 0 khi m = 1 hoặc m = −1. Trường hợp m = 1: phương trình thành 0 = 0, z tự do. Đặt z = t thì y = 1−2t, x = t. Vô số nghiệm (t, 1−2t, t). Thử vào hàng 3 với m = 1: t + 3 − 6t + 5t = 3 = m+2, đúng. Trường hợp m = −1: phương trình thành 0 = −2, hệ vô nghiệm. Trường hợp m khác 1 và −1: z = 1/(m+1), y = (m−1)/(m+1), x = 1/(m+1), nghiệm duy nhất. Thử m = 0: (1, −1, 1) thỏa cả ba phương trình.
Discuss the system: x + y + z = 1; x + 2y + 3z = 2; x + 3y + (m²+4)z = m+2. Row 2 minus row 1 gives y + 2z = 1. Row 3 minus row 1 gives 2y + (m²+3)z = m+1. Subtract 2 times (y + 2z = 1) from it: (m²−1)z = m−1, that is (m−1)(m+1)z = m−1. The pivot vanishes at m = 1 or m = −1. Case m = 1: the equation becomes 0 = 0 and z is free. Put z = t, then y = 1−2t, x = t. Infinitely many solutions (t, 1−2t, t). Check in row 3 with m = 1: t + 3 − 6t + 5t = 3 = m+2, correct. Case m = −1: the equation becomes 0 = −2, so there is no solution. Case m not 1 and not −1: z = 1/(m+1), y = (m−1)/(m+1), x = 1/(m+1), a unique solution. Check m = 0: (1, −1, 1) satisfies all three equations.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ví dụ thứ hai, ngắn hơn: hệ x + y = 1; 2x + 2y = m. Lấy hàng 2 trừ 2 lần hàng 1 được 0 = m − 2. Hệ số của mọi biến đã bằng 0 nên không còn trụ nào để chia. Khi m = 2 thì 0 = 0, vô số nghiệm (1−t, t). Khi m khác 2 thì 0 bằng một số khác 0, vô nghiệm. Hệ này không bao giờ có nghiệm duy nhất, dù m lấy giá trị nào.

A second, shorter example: the system x + y = 1; 2x + 2y = m. Row 2 minus 2 times row 1 gives 0 = m − 2. Every variable's coefficient is already 0, so no pivot is left to divide by. For m = 2, 0 = 0 and the solutions are (1−t, t). For m not 2, 0 equals a nonzero number, so there is no solution. This system never has a unique solution, whatever m is.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Với hệ vuông, nghiệm duy nhất khi mọi trụ khác 0. Hàng cuối dạng 0 = 0 cho vô số nghiệm, dạng 0 = số khác 0 cho vô nghiệm.
For a square system, the solution is unique when every pivot is nonzero. A last row 0 = 0 gives infinitely many solutions; 0 = nonzero gives none.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chia hai vế cho m−1 để rút gọn thành z = 1/(m+1). Làm vậy là ngầm giả sử m khác 1, nên mất trường hợp m = 1 và kết luận thiếu. Mỗi khi muốn chia cho một biểu thức có m, hãy tách riêng trường hợp biểu thức đó bằng 0 trước.
Dividing both sides by m−1 to get z = 1/(m+1) silently assumes m is not 1, so the case m = 1 is lost and the answer is incomplete. Before dividing by any expression containing m, handle the case where it equals 0 separately.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Kết luận m = −1 vô nghiệm chỉ vì hệ số bằng 0, mà quên so với vế phải. Hệ số bằng 0 và vế phải cũng bằng 0 thì vô số nghiệm, không phải vô nghiệm.
Declaring no solution at m = −1 just because the coefficient is 0, without checking the right side. A zero coefficient with a zero right side gives infinitely many solutions, not none.

MẸO / TIP – Bài đề thi hay hỏi ba ý: vô nghiệm, duy nhất, vô số nghiệm. Hãy ghi bảng kết luận cuối bài gồm đủ giá trị m cho cả ba, và nếu một ý không xảy ra thì viết rõ "không có m nào".
Exam questions often ask for three cases: no solution, unique, infinitely many. End with a conclusion listing the values of m for all three, and write "no such m" when a case never occurs.

- Luyện: hệ x + y = 1; 2x + m y = 2. Hàng 2 trừ 2 lần hàng 1 cho (m−2)y = 0. Khi m khác 2 thì y = 0, x = 1, duy nhất. Khi m = 2 thì 0 = 0, vô số nghiệm (1−t, t). Không có m nào làm hệ vô nghiệm.
  Practice: the system x + y = 1; 2x + m y = 2. Row 2 minus 2 times row 1 gives (m−2)y = 0. For m not 2, y = 0 and x = 1, unique. For m = 2, 0 = 0 and the solutions are (1−t, t). No m makes the system inconsistent.

1.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *1.9. Applied exercises with solutions*

Bài 1. Giải hệ ba phương trình ba ẩn bằng phép khử Gauss và thế ngược – *Exercise 1. Solving a three-by-three system by Gaussian elimination and back-substitution*

Giải hệ x + y + z = 6, 2x − y + z = 3, x + 2y − z = 2 bằng cách đưa ma trận mở rộng về dạng bậc thang rồi thế ngược.
Solve the system x + y + z = 6, 2x − y + z = 3, x + 2y − z = 2 by reducing the augmented matrix to echelon form and then back-substituting.

1. Viết ma trận mở rộng với ba hàng: (1 1 1 | 6), (2 −1 1 | 3), (1 2 −1 | 2).
   Write the augmented matrix with three rows: (1 1 1 | 6), (2 −1 1 | 3), (1 2 −1 | 2).

2. Khử cột 1: hàng 2 trừ 2 lần hàng 1 ra (0 −3 −1 | −9); hàng 3 trừ hàng 1 ra (0 1 −2 | −4).
Clear column 1: row 2 minus 2 times row 1 gives (0 −3 −1 | −9); row 3 minus row 1 gives (0 1 −2 | −4).

3. Đổi chỗ hàng 2 với hàng 3, rồi cộng 3 lần hàng 2 mới vào hàng 3: được (0 0 −7 | −21). Ma trận đã có dạng bậc thang.
Swap rows 2 and 3, then add 3 times the new row 2 to row 3: this gives (0 0 −7 | −21). The matrix is now in echelon form.

4. Thế ngược từ hàng cuối: $-7z = -21$ nên $z = 3$. Hàng 2: $y - 2\cdot 3 = -4$ nên $y = 2$. Hàng 1: $x + 2 + 3 = 6$ nên $x = 1$.
Back-substitute from the last row: $-7z = -21$ gives $z = 3$. Row 2: $y - 2\cdot 3 = -4$ gives $y = 2$. Row 1: $x + 2 + 3 = 6$ gives $x = 1$.

5. Kết quả: nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Thử vào phương trình 2: $2 - 2 + 3 = 3$, đúng.
Result: the unique solution is $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Check in equation 2: $2 - 2 + 3 = 3$, correct.

Bài 2. Hệ bốn ẩn có ẩn tự do, viết nghiệm dạng vectơ – ***Exercise 2. A four-unknown system with a free variable, solution in vector form***

Giải hệ $x + 2y - z + t = 3$, $2x + 4y - z + 4t = 8$, $x + 2y + z + 3t = 5$. Xác định ẩn chính, ẩn tự do và viết tập nghiệm dạng vectơ riêng cộng thuần nhất.
Solve the system $x + 2y - z + t = 3$, $2x + 4y - z + 4t = 8$, $x + 2y + z + 3t = 5$. Identify the leading and free variables and write the solution set in vector form as a particular solution plus a homogeneous part.

1. Ma trận mở rộng: (1 2 −1 1 | 3), (2 4 −1 4 | 8), (1 2 1 3 | 5). Cột ẩn theo thứ tự x, y, z, t.
Augmented matrix: (1 2 −1 1 | 3), (2 4 −1 4 | 8), (1 2 1 3 | 5). Columns are in the order x, y, z, t.

2. Hàng 2 trừ 2 lần hàng 1 ra (0 0 1 2 | 2); hàng 3 trừ hàng 1 ra (0 0 2 2 | 2).
Row 2 minus 2 times row 1 gives (0 0 1 2 | 2); row 3 minus row 1 gives (0 0 2 2 | 2).

3. Hàng 3 trừ 2 lần hàng 2 ra (0 0 0 −2 | −2). Dạng bậc thang có phần tử dẫn đầu ở cột x, cột z và cột t.
Row 3 minus 2 times row 2 gives (0 0 0 −2 | −2). The echelon form has leading entries in the columns of x, z and t.

4. Ẩn chính là x, z, t. Cột y không có phần tử dẫn đầu nên y là ẩn tự do; đặt $y = s$.
The leading variables are x, z, t. Column y has no leading entry, so y is free; set $y = s$.

5. Thế ngược: $-2t = -2$ nên $t = 1$; $z + 2\cdot 1 = 2$ nên $z = 0$; $x + 2s - 0 + 1 = 3$ nên $x = 2 - 2s$.
Back-substitute: $-2t = -2$ gives $t = 1$; $z + 2\cdot 1 = 2$ gives $z = 0$; $x + 2s - 0 + 1 = 3$ gives $x = 2 - 2s$.

6. Kết quả: $(x, y, z, t) = (2, 0, 0, 1) + s(-2, 1, 0, 0)$ với s tùy ý. Với $s = 1$ ta được $(0, 1, 0, 1)$; thử vào phương trình 3: $0 + 2 + 0 + 3 = 5$, đúng.

Result: (x, y, z, t) = (2, 0, 0, 1) + s(−2, 1, 0, 0) for any s. With s = 1 we get (0, 1, 0, 1); check in equation 3: 0 + 2 + 0 + 3 = 5, correct.

Bài 3. Biện luận số nghiệm của hệ theo tham số m – ***Exercise 3. Discussing the number of solutions by the parameter m***

Biện luận theo m số nghiệm của hệ x + y + z = 1, x + 2y + 3z = 2, x + 3y + mz = 4; khi có nghiệm duy nhất hãy tìm nghiệm.

Discuss, by the value of m, the number of solutions of x + y + z = 1, x + 2y + 3z = 2, x + 3y + mz = 4; when the solution is unique, find it.

1. Ma trận mở rộng: (1 1 1 | 1), (1 2 3 | 2), (1 3 m | 4).
   Augmented matrix: (1 1 1 | 1), (1 2 3 | 2), (1 3 m | 4).
2. Hàng 2 trừ hàng 1 ra (0 1 2 | 1); hàng 3 trừ hàng 1 ra (0 2 m−1 | 3).
   Row 2 minus row 1 gives (0 1 2 | 1); row 3 minus row 1 gives (0 2 m−1 | 3).
3. Hàng 3 trừ 2 lần hàng 2 ra (0 0 m−5 | 1), tức là phương trình (m − 5)z = 1.
   Row 3 minus 2 times row 2 gives (0 0 m−5 | 1), which is the equation (m − 5)z = 1.
4. Nếu m = 5 thì phương trình thành 0·z = 1, tức 0 = 1, mâu thuẫn nên hệ vô nghiệm.
   If m = 5 the equation becomes 0·z = 1, that is 0 = 1, a contradiction, so the system has no solution.
5. Nếu m khác 5 thì cả ba cột đều có phần tử dẫn đầu, hệ có nghiệm duy nhất. Thế ngược: z = 1/(m−5); y = 1 − 2z = (m−7)/(m−5); x = 1 − y − z = 1/(m−5).
   If m is not 5, all three columns have leading entries and the solution is unique. Back-substitute: z = 1/(m−5); y = 1 − 2z = (m−7)/(m−5); x = 1 − y − z = 1/(m−5).
6. Kết quả: m = 5 thì vô nghiệm; m khác 5 thì nghiệm duy nhất x = 1/(m−5), y = (m−7)/(m−5), z = 1/(m−5). Thử m = 6: (1, −1, 1) thỏa cả ba phương trình.
   Result: m = 5 gives no solution; m not equal to 5 gives the unique solution x = 1/(m−5), y = (m−7)/(m−5), z = 1/(m−5). Check m = 6: (1, −1, 1) satisfies all three equations.

1.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *1.10. Essay questions and answer outlines*

Câu 1. Nêu ba phép biến đổi sơ cấp trên hàng và giải thích vì sao chúng không làm đổi tập nghiệm của hệ.

Question 1. *State the three elementary row operations and explain why they do not change the solution set of a system.*

- Ba phép: đổi chỗ hai hàng, nhân một hàng với số khác 0, cộng vào một hàng một bội của hàng khác.
  The three operations: swap two rows, multiply a row by a nonzero number, add a multiple of one row to another.
- Đổi chỗ chỉ đổi thứ tự viết các phương trình; nhân với số khác 0 thì có thể nhân ngược lại để trở về hệ cũ.
  Swapping only changes the order in which equations are written; multiplying by a nonzero number can be undone by multiplying back.
- Cộng bội của hàng khác cũng đảo ngược được bằng cách trừ đúng bội đó, nên hai hệ có cùng nghiệm.

Adding a multiple of another row can be undone by subtracting that same multiple, so both systems have the same solutions.

- Nhân với 0 bị cấm vì làm mất một phương trình và không quay lại được.
  Multiplying by 0 is forbidden because it destroys an equation and cannot be undone.

Câu 2. Trình bày cách đọc số nghiệm của hệ từ dạng bậc thang của ma trận mở rộng.

Question 2. *Explain how to read the number of solutions of a system from the echelon form of its augmented matrix.*

- Có hàng dạng (0 … 0 | c) với c khác 0 thì hệ vô nghiệm, vì hàng đó nói 0 = c.
  A row of the form (0 ... 0 | c) with c nonzero means no solution, since that row says 0 = c.
- Không mâu thuẫn và mọi cột ẩn đều có phần tử dẫn đầu thì hệ có đúng một nghiệm, tìm bằng thế ngược.
  No contradiction and a leading entry in every unknown's column means exactly one solution, found by back-substitution.
- Không mâu thuẫn và còn ít nhất một cột ẩn không có phần tử dẫn đầu thì hệ có vô số nghiệm.
  No contradiction and at least one unknown's column without a leading entry means infinitely many solutions.
- Ví dụ nhanh: hệ 4 ẩn có 3 hàng khác 0, không mâu thuẫn, thì có 1 ẩn tự do.
  Quick example: a 4-unknown system with 3 nonzero rows and no contradiction has 1 free variable.

Câu 3. Phân biệt ẩn chính và ẩn tự do, rồi nêu cách viết tập nghiệm bằng tham số và dạng vectơ.

Question 3. *Distinguish leading variables from free variables and describe how to write the solution set with parameters and in vector form.*

- Ẩn chính là ẩn có phần tử dẫn đầu của một hàng trong dạng bậc thang; ẩn còn lại là ẩn tự do.
  A leading variable is one whose column holds a row's leading entry in echelon form; the remaining unknowns are free.
- Mỗi ẩn tự do được gán một tham số (như s, t); các ẩn chính tính theo tham số bằng thế ngược.
  Each free variable gets a parameter (such as s, t); the leading variables are computed from the parameters by back-substitution.
- Gom các số hạng không chứa tham số thành một vectơ cố định, các số hạng chứa từng tham số thành vectơ nhân với tham số đó.
  Collect the terms without parameters into one fixed vector, and the terms with each parameter into a vector multiplied by that parameter.
- Thử lại bằng cách thay vài giá trị tham số vào hệ gốc.
  Check by substituting a few parameter values into the original system.

Câu 4. Vì sao nghiệm tổng quát của hệ không thuần nhất bằng một nghiệm riêng cộng nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất tương ứng?

Question 4. *Why is the general solution of a nonhomogeneous system a particular solution plus the general solution of the corresponding homogeneous system?*

- Hệ thuần nhất là hệ có vế phải toàn số 0; nó luôn có nghiệm tầm thường (0, 0, …, 0).
  A homogeneous system has all right-hand sides equal to 0; it always has the trivial solution (0, 0, …, 0).
- Nếu p là một nghiệm riêng của hệ gốc và q là nghiệm bất kỳ của hệ gốc thì q − p thỏa hệ thuần nhất.
  If p is a particular solution of the original system and q is any solution of it, then q − p satisfies the homogeneous system.
- Ngược lại, p cộng với bất kỳ nghiệm thuần nhất nào vẫn thỏa hệ gốc, nên hai tập nghiệm khớp nhau.
  Conversely, p plus any homogeneous solution still satisfies the original system, so the two descriptions give the same set.
- Ví dụ: (2, 0, 0, 1) là nghiệm riêng, s(−2, 1, 0, 0) là phần thuần nhất.
  Example: (2, 0, 0, 1) is the particular solution and s(−2, 1, 0, 0) is the homogeneous part.

1.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *1.11. Multiple-choice questions*

1. Phép nào sau đây KHÔNG phải là phép biến đổi sơ cấp trên hàng?
Which of the following is NOT an elementary row operation?

A. Nhân một hàng với −3 / *Multiply a row by −3*
B. Cộng vào một hàng 4 lần một hàng khác / *Add 4 times another row to a row*
C. Đổi chỗ hai hàng / *Swap two rows*
D. Nhân một hàng với 0 / *Multiply a row by 0*

2. Ma trận mở rộng của hệ hai ẩn sau khi khử là (1 2 | 3) và (0 0 | 5). Hệ này có bao nhiêu nghiệm?
After elimination, the augmented matrix of a two-unknown system is (1 2 | 3) and (0 0 | 5). How many solutions does it have?

A. Vô số nghiệm với một tham số / *Infinitely many solutions with one parameter*
B. Vô nghiệm / *No solution*
C. Đúng một nghiệm / *Exactly one solution*
D. Đúng hai nghiệm / *Exactly two solutions*

3. Hệ có 4 ẩn, dạng bậc thang có 3 hàng khác 0 và không có hàng mâu thuẫn. Số ẩn tự do là bao nhiêu?
A system has 4 unknowns, its echelon form has 3 nonzero rows and no contradictory row. How many free variables are there?

A. 0
B. 3
C. 4
D. 1

4. Phát biểu nào đúng về hệ thuần nhất ba ẩn ba phương trình?
Which statement about a homogeneous system of three equations in three unknowns is correct?

A. Luôn có vô số nghiệm / *It always has infinitely many solutions*
B. Luôn có nghiệm (0, 0, 0) / *It always has the solution (0, 0, 0)*
C. Luôn có đúng một nghiệm / *It always has exactly one solution*
D. Có thể vô nghiệm nếu hệ số lớn / *It may have no solution if the coefficients are large*

5. Cho p là một nghiệm riêng của hệ không thuần nhất. Nghiệm tổng quát của hệ đó là gì?
Let p be a particular solution of a nonhomogeneous system. What is its general solution?

A. Tổng của hai nghiệm riêng khác nhau của chính hệ đó / *The sum of two different particular solutions of that same system*
B. p nhân với nghiệm của hệ thuần nhất / *p multiplied by a solution of the homogeneous system*
C. p cộng với nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất tương ứng / *p plus the general solution of the corresponding homogeneous system*
D. Chỉ riêng nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất tương ứng / *Only the general solution of the corresponding homogeneous system*

6. Hệ $x + y = 3$ và $2x + 2y = k$ có vô số nghiệm khi k bằng bao nhiêu?
The system $x + y = 3$ and $2x + 2y = k$ has infinitely many solutions when k equals what?

A. 6
B. 0
C. 3
D. 12

7. Hệ $x + 2y = 5$, $z = 4$ có ẩn tự do $y = t$. Tập nghiệm dạng vectơ (x, y, z) là gì?
The system $x + 2y = 5$, $z = 4$ has free variable $y = t$. What is the solution set in vector form (x, y, z)?

A. $(5, 0, 4) + t(-2, 1, 0)$
B. $(5, 0, 4) + t(1, -2, 0)$
C. $(5, 0, 4) + t(2, 1, 0)$
D. $(0, 5, 4) + t(-2, 1, 0)$

8. Dạng bậc thang của một hệ là $x + y + z = 6$, $y + 2z = 7$, $z = 2$. Nghiệm của hệ là gì?
An echelon form of a system is $x + y + z = 6$, $y + 2z = 7$, $z = 2$. What is the solution?

A. (3, 2, 1)
B. (2, 3, 1)
C. (1, 3, 2)
D. (1, 2, 3)

Chương 2. Khử Gauss–Jordan, hạng ma trận và ứng dụng – *Chapter 2. Gauss–Jordan Reduction, Rank and Applications*

Mục tiêu chương – *Chapter objectives*

- Đưa được một ma trận về dạng bậc thang rút gọn bằng các phép biến đổi hàng, rồi đọc nghiệm của hệ từ dạng đó
  Reduce a matrix to reduced echelon form with row operations, then read the solutions of the system from it
- Tính được hạng ma trận và dùng định lý Kronecker–Capelli để kết luận hệ vô nghiệm, có một nghiệm hay vô số nghiệm
  Compute the rank of a matrix and use the Kronecker–Capelli theorem to decide whether a system has no solution, one solution or infinitely many
- Lập và giải được hệ phương trình cho mạch điện, nút giao thông và mô hình liên ngành, rồi kiểm tra kết quả bằng phần mềm
  Set up and solve systems for electric circuits, traffic junctions and input–output models, then check the result with software

2.1. Phép khử Gauss–Jordan và dạng bậc thang rút gọn – *2.1. Gauss–Jordan Reduction and Reduced Echelon Form*

Khử Gauss đưa ma trận về dạng bậc thang, rồi bạn còn phải thế ngược từ dưới lên. Khử Gauss–Jordan làm thêm một đoạn nữa trên chính ma trận, để nghiệm hiện ra ngay mà không cần thế ngược. Cách này giống việc dọn bàn tới cùng: mỗi cột trụ chỉ còn đúng một con số 1, chỗ khác sạch trơn.

Gauss's method brings a matrix to echelon form, and then you still back-substitute from the bottom up. Gauss–Jordan reduction keeps going on the same matrix so the solution appears at once, with no back-substitution. Think of tidying a desk all the way: each pivot column keeps a single 1 and everything else in it is cleared.

Trước hết nhắc lại hai từ. Phần tử trụ là số khác 0 đầu tiên tính từ bên trái của mỗi hàng khác 0. Cột chứa nó gọi là cột trụ.

First, two terms. The pivot of a nonzero row is its first nonzero entry from the left, and the column holding it is a pivot column.

> **PHẢI THUỘC / MEMORISE –** Ma trận ở dạng bậc thang rút gọn khi: (1) nó đã ở dạng bậc thang; (2) mọi phần tử trụ bằng 1; (3) trong mỗi cột trụ, các số khác đều bằng 0 (cả phía trên lẫn phía dưới trụ).
> *A matrix is in reduced echelon form when: (1) it is already in echelon form; (2) every pivot equals 1; (3) in each pivot column all other entries are 0, above the pivot as well as below it.*

Cách làm – *How to do it*

1. Khử Gauss như thường: dùng phép biến đổi hàng để đưa ma trận mở rộng về dạng bậc thang.
   Run ordinary Gauss elimination: use row operations to bring the augmented matrix to echelon form.

2. Đi từ trụ cuối cùng (dưới cùng, bên phải) ngược lên. Nhân hàng chứa trụ với số nghịch đảo để trụ thành 1.
   Start at the last pivot (bottom right) and work upward. Multiply the pivot's row by a reciprocal so the pivot becomes 1.
3. Cộng vào mỗi hàng phía trên một bội của hàng trụ đó, sao cho số nằm trên trụ trong cột ấy thành 0.
   Add a multiple of that pivot row to each row above it so the entries above the pivot become 0.
4. Lặp lại với trụ kế tiếp phía trên, cho tới trụ đầu tiên. Rồi đọc nghiệm trực tiếp từ ma trận.
   Repeat with the next pivot up, until you reach the first one. Then read the solution straight off the matrix.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Giải hệ x + 2y + z = 8; 2x + 5y + z = 15; x + y + 3z = 12. Ma trận mở rộng 3 × 4 (cột cuối là vế phải), các hàng cách nhau dấu chấm phẩy.
Solve x + 2y + z = 8; 2x + 5y + z = 15; x + y + 3z = 12. The augmented matrix is 3 × 4 (last column is the right-hand side), rows separated by semicolons.

```
[1 2 1 | 8 ; 2 5 1 | 15 ; 1 1 3 | 12]
```

Phần khử Gauss gồm 3 phép. Trừ 2 lần hàng 1 khỏi hàng 2, trừ hàng 1 khỏi hàng 3, rồi cộng hàng 2 vào hàng 3. Các trụ 1, 1, 1 đã bằng 1 sẵn nên không cần nhân.
The Gauss part takes 3 operations: subtract 2 times row 1 from row 2, subtract row 1 from row 3, then add row 2 to row 3. The pivots 1, 1, 1 are already 1, so no scaling is needed.

```
[1 2 1 | 8 ; 0 1 -1 | -1 ; 0 0 1 | 3]
```

Phần Jordan, từ trụ dưới cùng. Cộng hàng 3 vào hàng 2, trừ hàng 3 khỏi hàng 1, rồi trừ 2 lần hàng 2 khỏi hàng 1.
The Jordan part, from the bottom pivot. Add row 3 to row 2, subtract row 3 from row 1, then subtract 2 times row 2 from row 1.

```
[1 0 0 | 1 ; 0 1 0 | 2 ; 0 0 1 | 3]
```

Đọc ra x = 1, y = 2, z = 3. Thử vào phương trình thứ hai: 2·1 + 5·2 + 3 = 15, đúng.
Reading off gives x = 1, y = 2, z = 3. Check in the second equation: 2·1 + 5·2 + 3 = 15, correct.

So sánh số bước: khử Gauss mất 3 phép biến đổi hàng, rồi thế ngược thêm 3 phép tính (z, rồi y, rồi x). Gauss–Jordan mất 3 + 3 = 6 phép biến đổi hàng và không cần thế ngược. Tổng công việc gần như nhau; Gauss–Jordan chỉ chuyển phần thế ngược thành thao tác trên hàng. Lợi ích là kết quả sạch, dễ đọc, ít nhầm khi có nhiều ẩn tự do.
Step count: Gauss takes 3 row operations plus 3 back-substitution calculations (z, then y, then x). Gauss–Jordan takes 3 + 3 = 6 row operations and no back-substitution. The total work is about the same; Gauss–Jordan just turns back-substitution into row operations. The gain is a clean result that is easy to read and harder to get wrong when there are free variables.

Khi có ẩn tự do, dạng rút gọn cũng đọc thẳng được. Với ma trận mở rộng [1 0 2 | 3 ; 0 1 -1 | 4], cột 3 không có trụ nên z là ẩn tự do, đặt z = t. Hàng 1 cho x = 3 - 2t, hàng 2 cho y = 4 + t.

With free variables, the reduced form still reads off directly. For the augmented matrix [1 0 2 | 3 ; 0 1 -1 | 4], column 3 has no pivot, so z is free; set z = t. Row 1 gives x = 3 - 2t and row 2 gives y = 4 + t.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Thêm một hệ hai ẩn mà trụ đầu chưa bằng 1: 2x + 4y = 10; x + 3y = 6. Ma trận mở rộng như sau:
One more example, a two-unknown system whose first pivot is not yet 1: 2x + 4y = 10; x + 3y = 6. The augmented matrix is:

```
[2 4 | 10 ; 1 3 | 6]
```

Nhân hàng 1 với 1/2 để được [1 2 | 5]. Trừ hàng 1 khỏi hàng 2 để được [0 1 | 1]. Hai trụ đã bằng 1. Cuối cùng trừ 2 lần hàng 2 khỏi hàng 1.
Multiply row 1 by 1/2 to get [1 2 | 5]. Subtract row 1 from row 2 to get [0 1 | 1]. Both pivots are now 1. Finally subtract 2 times row 2 from row 1.

```
[1 0 | 3 ; 0 1 | 1]
```

Đọc ra x = 3, y = 1. Thử phương trình đầu: 2·3 + 4·1 = 10, đúng; phương trình hai: 3 + 3·1 = 6, đúng.
Reading off gives x = 3, y = 1. Check the first equation: 2·3 + 4·1 = 10, correct; the second: 3 + 3·1 = 6, correct.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Dọn sạch số phía trên trụ nhưng quên mất số phía dưới (hoặc ngược lại). Sau mỗi trụ, hãy soi cả cột đó từ trên xuống dưới.
Clearing the entries above a pivot but forgetting those below it (or the reverse). After each pivot, scan the whole column top to bottom.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Làm cột đầu rồi cột hai theo chiều xuôi sau khi đã đưa về bậc thang. Cách này làm hỏng các số 0 đã tạo. Hãy đi từ trụ cuối ngược lên.
Working forward column by column after reaching echelon form. This can destroy zeros you already made. Go from the last pivot upward.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhân hàng với số nghịch đảo nhưng quên nhân cả cột vế phải. Mỗi phép biến đổi phải tác động lên cả hàng của ma trận mở rộng.
Scaling a row but forgetting the right-hand-side entry. Every operation must act on the whole row of the augmented matrix.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Dừng khi trụ còn là 2 hay 3 vì thấy cột đã có các số 0. Trụ chưa bằng 1 thì ma trận chưa ở dạng rút gọn, nên hãy chia hàng cho trụ đó.
Stopping while a pivot is still 2 or 3 because the column already has zeros. With a pivot other than 1 the matrix is not yet reduced, so divide that row by its pivot.

MẸO / TIP – Dạng bậc thang rút gọn của một ma trận là duy nhất, dù bạn chọn thứ tự phép biến đổi nào. Nếu hai người làm ra kết quả khác nhau, chắc chắn có một người tính sai.
The reduced echelon form of a matrix is unique, whatever order of operations you choose. If two people get different results, at least one made an arithmetic slip.

2.2. Ma trận tương đương hàng và tính duy nhất của dạng rút gọn – *2.2. Row Equivalence and Uniqueness of the Reduced Form*

Hai ma trận cùng cỡ gọi là tương đương hàng nếu từ ma trận này, dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng, ta biến được thành ma trận kia. Ba phép đó là đổi chỗ hai hàng, nhân một hàng với số khác 0, cộng vào một hàng bội của hàng khác.

Two matrices of the same size are row equivalent if row operations can turn one into the other. The three operations are swapping two rows, multiplying a row by a nonzero number, and adding a multiple of one row to another.

Hãy nghĩ tới phân số: 3/5 và 9/15 trông khác nhau nhưng rút gọn đều ra 3/5. Ở đây cũng vậy, "rút gọn" là đưa về dạng bậc thang rút gọn (dạng có mỗi số 1 đầu hàng là số khác 0 duy nhất trong cột của nó, đã làm ở mục 2.1).

Think of fractions: 3/5 and 9/15 look different, yet both reduce to 3/5. Here, "reducing" means reaching reduced row echelon form (each leading 1 is the only nonzero entry in its column, as in section 2.1).

Quan hệ này công bằng theo cả hai chiều, vì mỗi phép biến đổi đều đảo ngược được: đổi chỗ thì đổi lại, nhân c thì nhân 1/c, cộng k lần hàng i thì trừ k lần hàng đó. Nếu A biến được thành B thì B cũng biến được về A. Ghép hai chuỗi biến đổi liên tiếp thì A tới C qua B. Nhờ vậy các ma trận cùng cỡ chia thành từng "lớp", mỗi ma trận nằm trong đúng một lớp.

The relation works both ways, because every operation can be undone: swap again, multiply by 1/c, or subtract k times the row you added. If A becomes B, then B becomes A. Chaining two sequences takes A to C through B. So matrices of one size split into classes, and each matrix lies in exactly one class.

Dạng rút gọn là duy nhất – *The reduced form is unique*

> **PHẢI THUỘC / MEMORISE –** Mỗi ma trận tương đương hàng với đúng một ma trận bậc thang rút gọn. Hệ quả: hai ma trận cùng cỡ tương đương hàng khi và chỉ khi chúng có cùng dạng bậc thang rút gọn.
> *Every matrix is row equivalent to exactly one reduced row echelon matrix. Consequence: two matrices of the same size are row equivalent if and only if they have the same reduced row echelon form.*

Chữ "có" do phép khử Gauss–Jordan đảm bảo: làm đủ các bước thì luôn tới được dạng rút gọn. Chữ "duy nhất" nghĩa là bạn khử theo thứ tự nào, đổi chỗ hàng nào, kết quả cuối vẫn là một ma trận đó. Vị trí các cột chủ và các số còn lại không phụ thuộc cách làm. Chứng minh chi tiết không cần cho kỳ thi, bạn chỉ cần dùng kết luận.

Existence comes from Gauss–Jordan elimination: carry out all the steps and you always reach the reduced form. Uniqueness means that whatever order you work in, you end at the same matrix. The pivot columns and the other entries do not depend on your method. The full proof is not needed for the exam; you only need to use the result.

Mỗi lớp có một "đại diện" chuẩn là dạng rút gọn của nó. Với ma trận cỡ 2×2, mọi lớp chỉ thuộc bốn kiểu đại diện: ma trận không, ma trận (1 a; 0 0) với a là số thực bất kỳ, ma trận (0 1; 0 0), và ma trận đơn vị. Lớp của ma trận đơn vị gồm mọi ma trận 2×2 khả nghịch.
Each class has a standard representative: its reduced form. For 2×2 matrices, every class has one of four kinds of representative: the zero matrix, (1 a; 0 0) with a any real number, (0 1; 0 0), and the identity matrix. The identity's class contains all invertible 2×2 matrices.

Cách kiểm tra hai ma trận có tương đương hàng không – ***How to test whether two matrices are row equivalent***

1. Kiểm tra hai ma trận có cùng cỡ không. Khác cỡ thì kết luận ngay là không tương đương hàng.
   Check that the two matrices have the same size. If not, they are not row equivalent.
2. Đưa từng ma trận về dạng bậc thang rút gọn bằng Gauss–Jordan, ghi rõ từng phép biến đổi.
   Reduce each matrix to reduced row echelon form with Gauss–Jordan, writing down each operation.
3. So sánh hai dạng rút gọn từng ô một. Giống hệt nhau thì tương đương hàng, khác ở dù một ô thì không.
   Compare the two reduced forms entry by entry. If identical, the matrices are row equivalent; if any entry differs, they are not.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xét ba ma trận cỡ 3×3: A có các hàng (1, 2, 1), (2, 5, 4), (3, 7, 5). B có các hàng (1, 0, −3), (1, 1, −1), (2, 1, −4). C có các hàng (1, 2, 1), (2, 4, 3), (3, 6, 5). Hỏi A, B, C ma trận nào tương đương hàng với nhau? Với A: lấy hàng 2 trừ 2 lần hàng 1 ra (0, 1, 2); lấy hàng 3 trừ 3 lần hàng 1 ra (0, 1, 2). Lấy hàng 3 trừ hàng 2 ra (0, 0, 0). Lấy hàng 1 trừ 2 lần hàng 2 ra (1, 0, −3). Dạng rút gọn của A: (1, 0, −3), (0, 1, 2), (0, 0, 0). Với B: hàng 2 trừ hàng 1 ra (0, 1, 2); hàng 3 trừ 2 lần hàng 1 ra (0, 1, 2); hàng 3 trừ hàng 2 ra (0, 0, 0). Hàng 1 đã đúng nên dạng rút gọn của B cũng là (1, 0, −3), (0, 1, 2), (0, 0, 0). Vậy A và B tương đương hàng. Với C: hàng 2 trừ 2 lần hàng 1 ra (0, 0, 1); hàng 3 trừ 3 lần hàng 1 ra (0, 0, 2); hàng 3 trừ 2 lần hàng 2 ra (0, 0, 0). Hàng 1 trừ hàng 2 ra (1, 2, 0). Dạng rút gọn của C: (1, 2, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0). Khác dạng của A, nên C không tương đương hàng với A và B.
Take three 3×3 matrices: A has rows (1, 2, 1), (2, 5, 4), (3, 7, 5). B has rows (1, 0, −3), (1, 1, −1), (2, 1, −4). C has rows (1, 2, 1), (2, 4, 3), (3, 6, 5). Which are row equivalent? For A: row 2 minus 2 times row 1 gives (0, 1, 2); row 3 minus 3 times row 1 gives (0, 1, 2). Row 3 minus row 2 gives (0, 0, 0). Row 1 minus 2 times row 2 gives (1, 0, −3). Reduced form of A: (1, 0, −3), (0, 1, 2), (0, 0, 0). For B: row 2 minus row 1 gives (0, 1, 2); row 3 minus 2 times row 1 gives (0, 1, 2); row 3 minus row 2 gives (0, 0, 0). Row 1 is already right, so B also reduces to (1, 0, −3), (0, 1, 2), (0, 0, 0). So A and B are row equivalent. For C: row 2 minus 2 times row 1 gives (0, 0, 1); row 3 minus 3 times row 1 gives (0, 0, 2); row 3 minus 2 times row 2 gives (0, 0, 0). Row 1 minus row 2 gives (1, 2, 0). Reduced form of C: (1, 2, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0). It differs from A's, so C is not row equivalent to A or B.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Thêm một ví dụ cỡ 2×2 để thấy các lớp. Cho D có hàng (2, 4), (3, 6); E có hàng (1, 2), (5, 10); F có hàng (1, 2), (3, 7). Với D: chia hàng 1 cho 2 ra (1, 2); lấy hàng 2 trừ 3 lần hàng 1 ra (0, 0). Dạng rút gọn của D: (1, 2), (0, 0). Với E: lấy hàng 2 trừ 5 lần hàng 1 ra (0, 0), nên dạng rút gọn của E cũng là (1, 2), (0, 0). Vậy D và E cùng lớp, đại diện kiểu (1 a; 0 0) với a = 2. Với F: hàng 2 trừ 3 lần hàng 1 ra (0, 1); hàng 1 trừ 2 lần hàng 2 ra (1, 0). Dạng rút gọn của F là ma trận đơn vị, nên F nằm ở lớp khác, lớp các ma trận khả nghịch.

Here is a 2×2 example showing the classes. Let D have rows (2, 4), (3, 6); E have rows (1, 2), (5, 10); F have rows (1, 2), (3, 7). For D: divide row 1 by 2 to get (1, 2); row 2 minus 3 times row 1 gives (0, 0). Reduced form of D: (1, 2), (0, 0). For E: row 2 minus 5 times row 1 gives (0, 0), so E also reduces to (1, 2), (0, 0). So D and E share a class, with representative type (1 a; 0 0) and a = 2. For F: row 2 minus 3 times row 1 gives (0, 1); row 1 minus 2 times row 2 gives (1, 0). F reduces to the identity matrix, so it lies in a different class, the invertible matrices.

MẸO / TIP – Muốn chứng tỏ KHÔNG tương đương, thường không cần khử hết. Cột chủ của dạng rút gọn là bất biến: A có cột chủ là cột 1 và 2, C có cột 1 và 3. Khác nhau là đủ để loại. Số hàng khác 0 cũng phải bằng nhau.
To show matrices are NOT row equivalent you often need not finish. The pivot columns are fixed: A has pivots in columns 1 and 2, C in columns 1 and 3. That difference is enough. The number of nonzero rows must also match.

MẸO / TIP – Khi cần kết luận "có" thì phải khử trọn cả hai ma trận. Nếu muốn thử nhanh trước, hãy nhìn xem một hàng có là bội của hàng kia không, như D và E ở trên: hai hàng tỉ lệ nhau thì dạng rút gọn chỉ còn một hàng khác 0.
To conclude "yes" you must reduce both matrices fully. For a quick first look, check whether one row is a multiple of the other, as in D and E above: proportional rows leave only one nonzero row in the reduced form.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Hai ma trận có cùng số hàng khác 0 vẫn có thể không tương đương, như A và C ở trên. Cũng đừng so sánh dạng bậc thang thường: dạng đó không duy nhất, nên hai dạng bậc thang khác nhau chưa kết luận được gì. Phải đưa về dạng rút gọn.
Two matrices with the same number of nonzero rows can still fail to be equivalent, like A and C above. Also do not compare ordinary echelon forms: they are not unique, so two different echelon forms prove nothing. Reduce fully.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Hay quên điều kiện cùng cỡ, và hay tính sai một phép cộng hàng rồi kết luận sai. Cẩn thận hơn: kiểm tra bằng cách thay lại vài hàng gốc.
Students forget the same-size condition, or slip on one row addition and reach the wrong verdict. Safer: re-check by substituting back into a few original rows.

- Luyện: ma trận (1, 3; 2, 6) và ma trận (2, 6; 1, 3) có tương đương hàng không? Đáp án: có. Cả hai về (1, 3; 0, 0), vì ma trận thứ hai chỉ cần đổi chỗ hai hàng rồi lấy hàng 2 trừ 2 lần hàng 1.
  Practice: are (1, 3; 2, 6) and (2, 6; 1, 3) row equivalent? Answer: yes. Both reduce to (1, 3; 0, 0), since the second only needs a row swap and then row 2 minus 2 times row 1.

2.3. Bổ đề tổ hợp tuyến tính giữa các hàng – *2.3. The Linear Combination Lemma for Rows*

Khi khử Gauss, mỗi lần biến đổi là lấy các hàng đang có, nhân với vài số rồi cộng lại để ra hàng mới. Việc này gọi là lấy tổ hợp tuyến tính. Giống pha nước chấm: bạn múc 2 muỗng từ lọ này, 3 muỗng từ lọ kia rồi trộn. Hàng mới chính là "công thức pha" từ các hàng cũ.
When you run Gaussian elimination, each step takes the rows you have, multiplies them by some numbers and adds them up to make a new row. This is called a linear combination. It works like

mixing a dipping sauce: 2 spoons from one jar, 3 from another, stirred together. The new row is a "recipe" built from the old rows.

Cả ba phép biến đổi sơ cấp đều có dạng này. Đổi chỗ hai hàng: hàng mới là 1 lần hàng kia cộng 0 lần các hàng còn lại. Nhân một hàng với k: hàng mới là k lần hàng đó. Cộng k lần hàng i vào hàng j: hàng mới là 1 lần hàng j cộng k lần hàng i.

All three elementary row operations have this form. Swapping two rows: the new row is 1 times the other row plus 0 times the rest. Scaling a row by k: the new row is k times that row. Adding k times row i to row j: the new row is 1 times row j plus k times row i.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $\alpha_1 = (0, 1)$ và $\alpha_2 = (2, 3)$. Sau khi đổi chỗ, hàng 1 mới là $(2, 3) = 0\alpha_1 + 1\alpha_2$ và hàng 2 mới là $(0, 1) = 1\alpha_1 + 0\alpha_2$.
Let $\alpha_1 = (0, 1)$ and $\alpha_2 = (2, 3)$. After swapping, the new row 1 is $(2, 3) = 0\alpha_1 + 1\alpha_2$ and the new row 2 is $(0, 1) = 1\alpha_1 + 0\alpha_2$.

Tổ hợp của các tổ hợp – *A combination of combinations*

Sau nhiều bước, hàng mới được làm từ hàng đã là kết quả của bước trước. Vậy nó có còn "pha từ hàng ban đầu" không? Còn. Giả sử $u = 2a + b$ và $v = a – 3b$. Lấy $w = 4u + v$ thì $w = 8a + 4b + a – 3b = 9a + b$. Kết quả vẫn là số nhân a cộng số nhân b.

After several steps, a new row is built from rows that were themselves built earlier. Is it still a recipe from the starting rows? Yes. Say $u = 2a + b$ and $v = a – 3b$. Take $w = 4u + v$, so $w = 8a + 4b + a – 3b = 9a + b$. The result is still some multiple of a plus some multiple of b.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Bổ đề: nếu các vectơ u, v, … đều đã là tổ hợp tuyến tính của a, b, … thì mọi tổ hợp của u, v, … vẫn chỉ là một tổ hợp của a, b, …. Hệ quả: khi ma trận A biến đổi hàng thành ma trận B, hàng nào của B cũng viết được bằng cách nhân các hàng của A với vài số rồi cộng lại.
Lemma: if u, v, ... are already built from a, b, ... by scaling and adding, then anything built from u, v, ... the same way is again just a mix of a, b, ... Consequence: when row operations take matrix A to matrix B, you can get each row of B by scaling the rows of A by suitable numbers and adding them up.

Cách viết một hàng mới thành tổ hợp của hàng cũ – *Writing a new row as a combination of the old rows*

1. Đặt tên các hàng ban đầu là $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ và giữ nguyên tên này đến hết.
   Name the starting rows $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ and keep these names to the end.
2. Sau mỗi phép biến đổi, ghi hàng bị đổi dưới dạng "số × α_1 + số × α_2 + …".
   After each operation, write the changed row as "number × α_1 + number × α_2 + ...".
3. Khi một bước dùng hàng đã sửa trước đó, thay hàng ấy bằng biểu thức đã ghi, rồi gộp các hệ số cùng loại.
   When a step uses a row that was changed earlier, substitute its recorded expression and merge the like coefficients.
4. Kiểm tra bằng cách tính lại: nhân hệ số với α_1, α_2 rồi cộng, phải ra đúng hàng cuối.
   Check by recomputing: multiply the coefficients by α_1, α_2 and add; you must get the final row.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho A có $\alpha_1 = (1, 2, 1)$ và $\alpha_2 = (3, 5, 4)$. Bước 1: cộng –3 lần hàng 1 vào hàng 2. Hàng 2 thành $(0, -1, 1) = -3\alpha_1 + \alpha_2$. Bước 2: nhân hàng 2 với –1, được $(0, 1, -1) = 3\alpha_1 - \alpha_2$. Bước 3: cộng –2 lần hàng 2 vào hàng 1. Hàng 1 thành $\alpha_1 - 2(3\alpha_1 - \alpha_2) = -5\alpha_1 + 2\alpha_2$. Kiểm tra: $-5(1, 2, 1) + 2(3, 5, 4) = (-5, -10, -5) + (6, 10, 8) = (1, 0, 3)$. Kết quả: B có hàng $(1, 0, 3) = -5\alpha_1 + 2\alpha_2$ và hàng $(0, 1, -1) = 3\alpha_1 - \alpha_2$.
Let A have $\alpha_1 = (1, 2, 1)$ and $\alpha_2 = (3, 5, 4)$. Step 1: add –3 times row 1 to row 2. Row 2 becomes $(0, -1, 1) = -3\alpha_1 + \alpha_2$. Step 2: multiply row 2 by –1 to get $(0, 1, -1) = 3\alpha_1 - \alpha_2$. Step 3: add –2 times row 2 to row 1. Row 1 becomes $\alpha_1 - 2(3\alpha_1 - \alpha_2) = -5\alpha_1 + 2\alpha_2$. Check: $-5(1, 2, 1) + 2(3, 5, 4) = (-5, -10, -5) + (6, 10, 8) = (1, 0, 3)$. Result: B has row $(1, 0, 3) = -5\alpha_1 + 2\alpha_2$ and row $(0, 1, -1) = 3\alpha_1 - \alpha_2$.

Mọi phép biến đổi hàng đều đảo ngược được, nên chiều ngược lại cũng đúng: hàng của A viết được từ hàng của B. Ở ví dụ trên, đặt $\beta_1 = (1, 0, 3)$ và $\beta_2 = (0, 1, -1)$. Ta có $\beta_1 + 2\beta_2 = (1, 2, 1) = \alpha_1$ và $3\beta_1 + 5\beta_2 = (3, 5, 4) = \alpha_2$. Vì thế hai ma trận cho ra cùng một tập mọi tổ hợp của các hàng.
Every row operation can be undone, so the reverse also holds: each row of A can be built from the rows of B. In the example, let $\beta_1 = (1, 0, 3)$ and $\beta_2 = (0, 1, -1)$. Then $\beta_1 + 2\beta_2 = (1, 2, 1) = \alpha_1$ and $3\beta_1 + 5\beta_2 = (3, 5, 4) = \alpha_2$. So both matrices produce the same set of all combinations of their rows.

Các hàng khác 0 của dạng bậc thang không phụ thuộc nhau – *Nonzero rows of an echelon form do not depend on each other*

Khử Gauss xóa dần các mối liên hệ giữa các hàng. Khi đã tới dạng bậc thang, bạn không thể dựng một hàng khác 0 nào từ những hàng khác 0 còn lại. Lý do: phần tử dẫn đầu (số khác 0 đầu tiên của hàng) của mỗi hàng nằm ở cột mà mọi hàng bên dưới đều bằng 0.
Gaussian elimination wipes out relations among rows. Once you reach echelon form, you cannot build any nonzero row out of the remaining nonzero ones. The reason: the leading entry (first nonzero number in a row) of each row sits in a column where every row below it has a zero.

Cách chứng minh: giả sử $c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + \ldots = 0$, rồi xét từng cột chứa phần tử dẫn đầu, từ trên xuống. Ở cột đầu tiên chỉ ρ_1 khác 0, nên $c_1 = 0$. Bỏ ρ_1 đi, cột kế tiếp chỉ còn ρ_2 khác 0, nên $c_2 = 0$. Cứ thế đến hết.
The proof idea: suppose $c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + \ldots = 0$, then look at each leading-entry column from the top. In the first such column only ρ_1 is nonzero, so $c_1 = 0$. With ρ_1 gone, the next column leaves only ρ_2 nonzero, so $c_2 = 0$. Continue down the rows.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Lấy $\rho_1 = (1, 2, 0, 3)$, $\rho_2 = (0, 0, 2, 1)$, $\rho_3 = (0, 0, 0, 5)$, cộng thêm một hàng 0. Giả sử $c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + c_3\rho_3 = (0, 0, 0, 0)$. Cột 1: $c_1 \times 1 = 0$ nên $c_1 = 0$. Cột 3: $c_2 \times 2 = 0$ nên $c_2 = 0$. Cột 4: $c_3 \times 5 = 0$ nên $c_3 = 0$. Chỉ có cách chọn toàn hệ số 0, nên ba hàng không phụ thuộc nhau.
Take $\rho_1 = (1, 2, 0, 3)$, $\rho_2 = (0, 0, 2, 1)$, $\rho_3 = (0, 0, 0, 5)$, plus a zero row. Suppose $c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + c_3\rho_3 = (0, 0, 0, 0)$. Column 1: $c_1 \times 1 = 0$, so $c_1 = 0$. Column 3: $c_2 \times 2 = 0$, so $c_2 = 0$. Column 4: $c_3 \times 5 = 0$, so $c_3 = 0$. Only the all-zero choice of coefficients works, so the three rows do not depend on each other.

Thử đổi ρ_2 thành $(0, 0, 0, 1)$. Khi ấy $\rho_3 = 5\rho_2$, hai hàng phụ thuộc nhau. Nhưng ma trận lúc này không còn là bậc thang, vì hai phần tử dẫn đầu cùng nằm ở cột 4. Khử thêm một bước sẽ đưa ρ_3 về hàng 0.

Try changing ρ_2 to (0, 0, 0, 1). Then $\rho_3 = 5\rho_2$, so the two rows depend on each other. But the matrix is no longer in echelon form, since both leading entries sit in column 4. One more elimination step turns ρ_3 into a zero row.

Hai ý trên là nền để tính hạng ma trận ở phần sau: số hàng khác 0 của dạng bậc thang đếm được số hàng thật độc lập.

These two facts are the base for computing matrix rank next: the number of nonzero rows in an echelon form counts the genuinely independent rows.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết tổ hợp theo hàng đã bị sửa thay vì hàng ban đầu. Mọi hệ số phải quy về α_1, α_2, …

Writing the combination in terms of rows already changed instead of the starting rows. Every coefficient must be reduced to α_1, α_2, ….

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên nhân số ngoài ngoặc vào mọi hạng tử khi gộp. Ở bước 3 của ví dụ, –2 phải nhân cả với $3\alpha_1$ lẫn với $-\alpha_2$, ra $-6\alpha_1 + 2\alpha_2$.

Forgetting to multiply the number outside the brackets into every term when merging. In step 3 of the example, –2 multiplies both $3\alpha_1$ and $-\alpha_2$, giving $-6\alpha_1 + 2\alpha_2$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Tính cả hàng 0 vào nhóm độc lập. Hàng 0 luôn bằng 0 lần các hàng khác, nên chỉ xét hàng khác 0.

Counting the zero row among the independent ones. A zero row always equals 0 times the others, so look only at nonzero rows.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Áp kết luận độc lập cho ma trận chưa về dạng bậc thang. Hai hàng (1, 2) và (2, 4) vẫn phụ thuộc nhau.

Applying the independence result to a matrix not yet in echelon form. The rows (1, 2) and (2, 4) still depend on each other.

2.4. Hạng của ma trận và cách tính – *2.4. The Rank of a Matrix and How to Compute It*

Hạng của ma trận là số hàng khác 0 sau khi bạn đưa ma trận về dạng bậc thang. Hình dung một hệ phương trình có vài phương trình chỉ lặp lại ý của các phương trình khác. Hạng cho biết có bao nhiêu phương trình mang thông tin riêng. Ta viết hạng của A là r(A) hoặc rank A.

The rank of a matrix is the number of nonzero rows left after you reduce it to echelon form. Picture a system where some equations just repeat what others already say. The rank tells you how many equations carry information of their own. We write the rank of A as r(A) or rank A.

Dù khử theo thứ tự nào, bạn vẫn ra cùng một số hàng khác 0, vì dạng bậc thang rút gọn của một ma trận là duy nhất. Ma trận cỡ m×n có hạng không vượt quá m và không vượt quá n.

However you carry out the elimination, you end with the same number of nonzero rows, because the reduced echelon form of a matrix is unique. An m×n matrix has rank at most m and at most n.

Hạng cũng nối thẳng với số ẩn tự do. Nếu hệ có n ẩn và ma trận hệ số có hạng r thì khi hệ có nghiệm sẽ có $n - r$ ẩn tự do.

Rank also ties directly to free variables. If a system has n unknowns and its coefficient matrix has rank r, a consistent system has n − r free variables.

Số hàng khác 0 luôn bằng số cột chứa phần tử dẫn. Vì thế hạng tính theo hàng và hạng tính theo cột là một số. Bạn đếm bên nào cũng được.

The number of nonzero rows always equals the number of columns that hold a pivot. So the rank counted by rows and the rank counted by columns are the same number. You can count either way.

Cách tính hạng của ma trận số – ***Computing the rank of a numeric matrix***

1. Chọn một ô khác 0 ở cột đầu tiên chưa xử lý làm phần tử dẫn. Nếu ô đang xét bằng 0, đổi chỗ hai hàng để đưa số khác 0 lên.
   Pick a nonzero entry in the first column you have not handled yet as the pivot. If the entry is 0, swap two rows to bring a nonzero number up.
2. Dùng phần tử dẫn để làm các ô bên dưới nó bằng 0: lấy hàng dưới trừ k lần hàng dẫn.
   Use the pivot to clear the entries below it: subtract k times the pivot row from each lower row.
3. Lặp lại với phần ma trận nằm dưới và bên phải phần tử dẫn, cho đến khi hết cột hoặc hết hàng.
   Repeat on the part of the matrix below and to the right of the pivot until you run out of columns or rows.
4. Chỉ khi quá trình khử đã xong, bạn mới đếm các hàng còn có ít nhất một số khác 0. Số đó là hạng.
   Only when the elimination is finished, count the rows that still contain at least one nonzero number. That count is the rank.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tìm hạng của A có các hàng (1, 2, 1, 3), (2, 4, 3, 8), (3, 6, 4, 11). Lấy $h_2 - 2h_1 \Rightarrow h_2$ được (0, 0, 1, 2). Lấy $h_3 - 3h_1 \Rightarrow h_3$ được (0, 0, 1, 2). Lấy $h_3 - h_2 \Rightarrow h_3$ được (0, 0, 0, 0). Còn hai hàng khác 0 là (1, 2, 1, 3) và (0, 0, 1, 2). Vậy r(A) = 2. Kiểm tra: hạng 2 nhỏ hơn số ẩn 4, nên hệ có hạng này sẽ có 4 − 2 = 2 ẩn tự do nếu có nghiệm. Hai phần tử dẫn nằm ở cột 1 và cột 3, nên ẩn tự do là x_2 và x_4.

Find the rank of A with rows (1, 2, 1, 3), (2, 4, 3, 8), (3, 6, 4, 11). Take $R_2 - 2R_1 \Rightarrow R_2$ to get (0, 0, 1, 2). Take $R_3 - 3R_1 \Rightarrow R_3$ to get (0, 0, 1, 2). Take $R_3 - R_2 \Rightarrow R_3$ to get (0, 0, 0, 0). Two nonzero rows remain: (1, 2, 1, 3) and (0, 0, 1, 2). So r(A) = 2. Check: rank 2 is less than 4 unknowns, so a consistent system with this coefficient matrix has 4 − 2 = 2 free variables. The two pivots sit in columns 1 and 3, so the free variables are x_2 and x_4.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tìm hạng của C có các hàng (0, 2, 4), (1, 1, 1), (2, 2, 3). Ô đầu của hàng 1 bằng 0, nên đổi $h_1 \leftrightarrow h_2$ để được (1, 1, 1), (0, 2, 4), (2, 2, 3). Lấy $h_3 - 2h_1 \Rightarrow h_3$ được (0, 0, 1). Ba hàng đều khác 0 và phần tử dẫn nằm ở ba cột khác nhau. Vậy r(C) = 3.

Find the rank of C with rows (0, 2, 4), (1, 1, 1), (2, 2, 3). The first entry of row 1 is 0, so swap $R_1 \leftrightarrow R_2$ to get (1, 1, 1), (0, 2, 4), (2, 2, 3). Take $R_3 - 2R_1 \Rightarrow R_3$ to get (0, 0, 1). All three rows are nonzero and the pivots lie in three different columns. So r(C) = 3.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đừng đếm hàng trước khi khử xong. Sau bước đầu của ví dụ A, hàng 3 là (0, 0, 1, 2), nhìn như khác 0, nhưng phép trừ $h_3 - h_2$ biến nó thành

hàng không. Cũng đừng đếm số hàng của ma trận gốc. Hạng chỉ tính các hàng khác 0 của dạng bậc thang cuối cùng.
Do not count rows before the elimination is done. After the first step of example A, row 3 is (0, 0, 1, 2) and looks nonzero, but the subtraction $R_3 - R_2$ turns it into a zero row. Do not count the rows of the original matrix either. Rank counts only the nonzero rows of the final echelon form.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Khi đổi chỗ hai hàng, hạng không đổi, nên đừng coi đó là mất thông tin. Lỗi hay gặp hơn là quên đổi hàng và chia nhầm cho số 0 ở ô dẫn.
Swapping two rows leaves the rank unchanged, so a swap loses no information. The more common slip is forgetting to swap and dividing by a 0 in the pivot position.

Hạng của ma trận chứa tham số – *Rank of a matrix with a parameter*

Cách làm giống hệt, nhưng tham số có thể làm phần tử dẫn bằng 0 ở một số giá trị. Vì vậy bạn khử bằng phép trừ bội của hàng, tránh chia cho biểu thức chứa tham số. Khi xong, phân tích các phần tử dẫn thành nhân tử, tìm giá trị tham số làm chúng bằng 0, rồi xét từng trường hợp.
The method is the same, but the parameter can make a pivot equal 0 at certain values. So eliminate by subtracting multiples of rows and avoid dividing by an expression containing the parameter. When you finish, factor the pivots, find the parameter values that make them 0, and treat each case separately.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tìm hạng của B theo m, với các hàng (1, 1, m), (1, m, 1), (m, 1, 1). Lấy $h_2 - h_1 \Rightarrow h_2$ được (0, m − 1, 1 − m). Lấy $h_3 - m \cdot h_1 \Rightarrow h_3$ được (0, 1 − m, 1 − m^2). Lấy $h_3 + h_2 \Rightarrow h_3$ được (0, 0, 2 − m − m^2), và 2 − m − m^2 = −(m − 1)(m + 2). Dạng bậc thang là hàng 1 (1, 1, m), hàng 2 (0, m − 1, 1 − m), hàng 3 (0, 0, −(m − 1)(m + 2)). Xét ba trường hợp. Nếu $m \neq 1$ và $m \neq -2$: cả ba hàng khác 0, r(B) = 3. Nếu m = 1: hàng 2 và hàng 3 đều bằng 0, r(B) = 1. Nếu m = −2: hàng 2 là (0, −3, 3) khác 0, hàng 3 bằng 0, r(B) = 2. Kiểm tra m = 1: mọi hàng gốc là (1, 1, 1), nên hạng 1 là đúng.
Find the rank of B in terms of m, with rows (1, 1, m), (1, m, 1), (m, 1, 1). Take $R_2 - R_1 \Rightarrow R_2$ to get (0, m − 1, 1 − m). Take $R_3 - m \cdot R_1 \Rightarrow R_3$ to get (0, 1 − m, 1 − m^2). Take $R_3 + R_2 \Rightarrow R_3$ to get (0, 0, 2 − m − m^2), and 2 − m − m^2 = −(m − 1)(m + 2). The echelon form has row 1 (1, 1, m), row 2 (0, m − 1, 1 − m), row 3 (0, 0, −(m − 1)(m + 2)). Split into three cases. If $m \neq 1$ and $m \neq -2$: all three rows are nonzero, r(B) = 3. If m = 1: rows 2 and 3 are both 0, r(B) = 1. If m = −2: row 2 is (0, −3, 3), nonzero, and row 3 is 0, r(B) = 2. Check m = 1: every original row is (1, 1, 1), so rank 1 is right.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chia cả hàng cho (m − 1) mà không xét m = 1 sẽ làm mất một trường hợp. Quên không thay riêng từng giá trị tới hạn vào ma trận cũng hay dẫn tới thiếu đáp án.
Dividing a whole row by (m − 1) without checking m = 1 loses a case. Forgetting to substitute each critical value back into the matrix also often leaves an answer missing.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Hạng = số hàng khác 0 của dạng bậc thang cuối cùng. Hạng không đổi khi dùng phép biến đổi sơ cấp trên hàng, và $r(A) \leq \min(m, n)$. Với tham số: khử không chia, tìm giá trị làm phần tử dẫn bằng 0, rồi xét từng trường hợp.
Rank = the number of nonzero rows in the final echelon form. Rank does not change under elementary

row operations, and r(A) ≤ min(m, n). With a parameter: eliminate without dividing, find the values that make a pivot 0, then handle each case.

2.5. Định lý Kronecker–Capelli: hạng quyết định số nghiệm – *2.5. The Rouché–Capelli Theorem: Rank Decides the Number of Solutions*

Một hệ phương trình tuyến tính chỉ có ba kết cục: vô nghiệm, đúng một nghiệm, hoặc vô số nghiệm. Hạng cho bạn biết kết cục nào xảy ra mà chưa cần viết ra nghiệm. Hạng của ma trận là số hàng khác không sau khi đưa nó về dạng bậc thang. Hãy hình dung bạn kiểm tra một đơn hàng: trước khi đi gom hàng, bạn xem đơn có đòi điều vô lý không.

P: A linear system has only three possible outcomes: no solution, exactly one solution, or infinitely many. Rank tells you which one happens before you write down any solution. The rank of a matrix is the number of nonzero rows left after reducing it to echelon form. Think of checking an order before filling it: you first see whether it asks for something impossible.

Ký hiệu: hệ có n ẩn, A là ma trận hệ số (chỉ chứa các hệ số bên trái dấu bằng), (A|b) là ma trận mở rộng (thêm cột hằng số bên phải). Viết r(A) và r(A|b) cho hai hạng tương ứng.

P: Notation: the system has n unknowns, A is the coefficient matrix (only the numbers on the left of the equals signs), and (A|b) is the augmented matrix (with the constants column added on the right). Write r(A) and r(A|b) for the two ranks.

Dạng bậc thang là dạng mà hàng sau bắt đầu muộn hơn hàng trước, hàng toàn số 0 nằm cuối. Một ma trận có thể rút gọn theo nhiều đường khác nhau và cho các ma trận bậc thang khác nhau. Nhưng số hàng khác không luôn như nhau, nên hạng không phụ thuộc cách bạn khử.

P: Echelon form means each row starts further right than the one above it, with all-zero rows at the bottom. A matrix can be reduced in several ways and give different echelon matrices. The number of nonzero rows is always the same, so the rank does not depend on how you eliminate.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Định lý Kronecker–Capelli: hệ có nghiệm khi và chỉ khi r(A) = r(A|b). Khi có nghiệm, đặt r là hạng chung. Nếu r = n thì nghiệm duy nhất. Nếu r < n thì có vô số nghiệm, và số ẩn tự do bằng n − r.

THUOC: Rouché–Capelli theorem: the system has a solution if and only if r(A) = r(A|b). When it does, let r be the common rank. If r = n the solution is unique. If r < n there are infinitely many solutions, and the number of free variables is n − r.

Vì sao đúng? Thêm cột b chỉ có thể làm hạng tăng tối đa 1. Nó tăng khi xuất hiện một hàng dạng (0 0 … 0 | c) với c khác 0, tức phương trình 0 = c, vô lý. Không có hàng như vậy thì mỗi hàng khác không đều có ẩn chính (ẩn đứng đầu hàng), và các ẩn còn lại, đúng n − r ẩn, được tự do chọn.

P: Why does it hold? Adding the column b can raise the rank by at most 1. It does so exactly when a row of the form (0 0 … 0 | c) with c nonzero appears, which says 0 = c, an impossible equation. Without such a row, every nonzero row has a leading variable, and the remaining n − r unknowns can be chosen freely.

Cách biện luận nhanh bằng hai hạng – ***TIEUDE: Quick case analysis with the two ranks***

1. Lập ma trận mở rộng (A|b), giữ nguyên vạch ngăn trước cột hằng số.
   BUOC: Write the augmented matrix (A|b) and keep the bar before the constants column.
2. Khử Gauss đến dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng.
   BUOC: Use Gaussian elimination with elementary row operations to reach echelon form.
3. Đếm hàng khác không của phần bên trái vạch, được r(A). Đếm hàng khác không của cả ma trận, được r(A|b).
   BUOC: Count the nonzero rows of the part left of the bar to get r(A). Count the nonzero rows of the whole matrix to get r(A|b).
4. So sánh. Nếu r(A) < r(A|b) thì vô nghiệm, dừng lại.
   BUOC: Compare. If r(A) < r(A|b) there is no solution; stop.
5. Nếu hai hạng bằng nhau (gọi là r), so r với n. Bằng n thì nghiệm duy nhất. Nhỏ hơn n thì vô số nghiệm với n − r ẩn tự do.
   BUOC: If the ranks are equal (call it r), compare r with n. Equal to n means a unique solution. Less than n means infinitely many solutions with n − r free variables.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ x + 2y − z = 1; 2x + 4y − 2z = 3; x + y + z = 2 (n = 3). Lấy hàng 2 trừ 2 lần hàng 1: ra (0 0 0 | 1). Lấy hàng 3 trừ hàng 1: ra (0 −1 2 | 1). Phần hệ số có 2 hàng khác không nên r(A) = 2. Cả ma trận có 3 hàng khác không nên r(A|b) = 3. Hai hạng khác nhau, hệ vô nghiệm. Đổi hằng số của phương trình hai thành 2 thì hàng đó thành (0 0 0 | 0), cả hai hạng đều bằng 2 < 3, hệ có 3 − 2 = 1 ẩn tự do. Thật vậy, y = 2z − 1, x = 3 − 3z với z tùy ý; thử lại ở phương trình ba: (3 − 3z) + (2z − 1) + z = 2.
VIDU: The system x + 2y − z = 1; 2x + 4y − 2z = 3; x + y + z = 2 (n = 3). Row 2 minus 2 times row 1 gives (0 0 0 | 1). Row 3 minus row 1 gives (0 −1 2 | 1). The coefficient part has 2 nonzero rows, so r(A) = 2. The whole matrix has 3, so r(A|b) = 3. The ranks differ, so there is no solution. Change the constant in equation two to 2 and that row becomes (0 0 0 | 0); both ranks equal 2 < 3, leaving 3 − 2 = 1 free variable. Indeed y = 2z − 1, x = 3 − 3z for any z; check in equation three: (3 − 3z) + (2z − 1) + z = 2.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Biện luận theo m hệ x + y + z = 1; x + 2y + 3z = 2; x + 3y + mz = 4. Hàng 2 trừ hàng 1: (0 1 2 | 1). Hàng 3 trừ hàng 1: (0 2 m−1 | 3). Hàng 3 trừ 2 lần hàng 2: (0 0 m−5 | 1). Nếu m khác 5 thì r(A) = r(A|b) = 3 = n, nghiệm duy nhất. Nếu m = 5 thì hàng cuối là (0 0 0 | 1), r(A) = 2 còn r(A|b) = 3, vô nghiệm. Hệ này không có giá trị m nào cho vô số nghiệm.
VIDU: Discuss by m the system x + y + z = 1; x + 2y + 3z = 2; x + 3y + mz = 4. Row 2 minus row 1: (0 1 2 | 1). Row 3 minus row 1: (0 2 m−1 | 3). Row 3 minus 2 times row 2: (0 0 m−5 | 1). If m is not 5, r(A) = r(A|b) = 3 = n, so the solution is unique. If m = 5, the last row is (0 0 0 | 1), r(A) = 2 and r(A|b) = 3, so there is no solution. No value of m gives infinitely many solutions here.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ 3 phương trình, 4 ẩn: x + y + z + w = 4; 2x + 3y + z + 2w = 9; 3x + 4y + 2z + 3w = 13 (n = 4). Hàng 2 trừ 2 lần hàng 1: (0 1 −1 0 | 1). Hàng 3 trừ 3 lần hàng 1: (0 1 −1 0 | 1). Hàng 3 trừ hàng 2: (0 0 0 0 | 0). Còn 2 hàng khác không, nên r(A) = r(A|b) = 2 < 4. Hệ có 4 − 2 = 2 ẩn tự do. Chọn z và w làm ẩn tự do: y = 1 + z, rồi x = 4 − y − z − w = 3 − 2z − w. Thử ở phương trình hai: 2(3 − 2z − w) + 3(1 + z) + z + 2w = 6 − 4z − 2w + 3 + 3z + z + 2w = 9. Đúng. Phương trình ba chính là tổng của hai phương trình đầu, nên nó không thêm điều kiện nào.

VIDU: A system of 3 equations in 4 unknowns: $x + y + z + w = 4$; $2x + 3y + z + 2w = 9$; $3x + 4y + 2z + 3w = 13$ ($n = 4$). Row 2 minus 2 times row 1: (0 1 −1 0 | 1). Row 3 minus 3 times row 1: (0 1 −1 0 | 1). Row 3 minus row 2: (0 0 0 0 | 0). Two nonzero rows remain, so $r(A) = r(A|b) = 2 < 4$. The system has $4 − 2 = 2$ free variables. Take z and w as the free ones: $y = 1 + z$, then $x = 4 − y − z − w = 3 − 2z − w$. Check in equation two: $2(3 − 2z − w) + 3(1 + z) + z + 2w = 6 − 4z − 2w + 3 + 3z + z + 2w = 9$. It holds. Equation three is just the sum of the first two, so it adds no new condition.

Hệ thuần nhất (mọi hằng số bằng 0) luôn có r(A) = r(A|0), nên luôn có nghiệm, ít nhất là nghiệm không. Nó có nghiệm khác không khi và chỉ khi r(A) < n.

P: A homogeneous system (all constants zero) always has $r(A) = r(A|0)$, so it always has a solution, at least the zero one. It has a nonzero solution exactly when $r(A) < n$.

Điều kiện về hạng *Rank condition*	**Kết luận** *Conclusion*	**Số ẩn tự do** *Free variables*
r(A) < r(A|b)	Hệ vô nghiệm. *No solution.*	Không có nghiệm nên không đặt câu hỏi này. *The question does not arise.*
r(A) = r(A|b) = n	Hệ có đúng một nghiệm. *Exactly one solution.*	Không có ẩn tự do. *None.*
r(A) = r(A|b) = r < n	Hệ có vô số nghiệm. *Infinitely many solutions.*	Có n − r ẩn tự do. *There are $n − r$.*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lấy n là số phương trình. n là số ẩn. Hệ 5 phương trình 3 ẩn với hai hạng cùng bằng 3 vẫn có nghiệm duy nhất.
LOI: Taking n to be the number of equations. n is the number of unknowns. A system with 5 equations and 3 unknowns whose two ranks both equal 3 still has a unique solution.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Tính n − r khi hai hạng khác nhau. Hệ vô nghiệm thì không có ẩn tự do nào để đếm.
LOI: Computing $n − r$ when the two ranks differ. A system with no solution has no free variables to count.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Cho rằng ít phương trình hơn ẩn thì chắc chắn có vô số nghiệm. Hệ $x + y + z = 1$; $x + y + z = 2$ có 2 phương trình, 3 ẩn mà vẫn vô nghiệm, vì r(A) = 1 còn r(A|b) = 2.
LOI: Assuming fewer equations than unknowns always gives infinitely many solutions. The system $x + y + z = 1$; $x + y + z = 2$ has 2 equations and 3 unknowns yet no solution, since $r(A) = 1$ and $r(A|b) = 2$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đếm hàng khi chưa khử. Ma trận ban đầu có thể không có hàng nào toàn số 0 mà hạng vẫn nhỏ hơn số hàng, như ví dụ 3 phương trình 4 ẩn ở trên. Hãy khử xong rồi mới đếm.
LOI: Counting rows before eliminating. The starting matrix may have no all-zero row and still have rank below its number of rows, as in the 3-equation, 4-unknown example above. Finish the elimination, then count.

- Tự kiểm tra: hệ 3 phương trình 4 ẩn có r(A) = r(A|b) = 2. Kết luận: vô số nghiệm, 4 − 2 = 2 ẩn tự do.