ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP

TOÁN CAO CẤP F3
GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN

Dành cho sinh viên đại học chưa học giải tích nhiều biến, cần hiểu bài để thi học phần Toán cao cấp F3 và dùng được trong các môn kỹ thuật sau này

Advanced Mathematics F3 Exam Review: Multivariable Calculus – a bilingual guide

Tham số · Tọa độ cực · Vectơ · Hàm vectơ · Đạo hàm riêng

Gradient · Cực trị · Lagrange · Tích phân bội hai, bội ba

Tích phân đường, mặt · Green · Stokes · Gauss · PTVP cấp hai

Song ngữ Việt – Anh · Vietnamese – English

Phiên bản 1.0 – Tháng 11 năm 2026

https://tailieuso.vin

MỤC LỤC

CONTENTS

Chương 1. Đường cong tham số, tọa độ cực và các đường conic – *Chapter 1. Parametric Curves, Polar Coordinates and Conic Sections* 6

1.1. Phương trình tham số và cách khử tham số – *1.1. Parametric Equations and Eliminating the Parameter* 6

1.2. Đạo hàm, tiếp tuyến và độ lõm của đường cong tham số – *1.2. Derivatives, Tangent Lines and Concavity of Parametric Curves* 9

1.3. Diện tích và độ dài cung của đường cong tham số – *1.3. Area and Arc Length for Parametric Curves* 12

1.4. Tọa độ cực và chuyển đổi sang tọa độ Descartes – *1.4. Polar Coordinates and Conversion to Rectangular Form* 14

1.5. Vẽ đường cong cực và nhận dạng đường hoa hồng, đường cardioid – *1.5. Sketching Polar Curves: Roses, Cardioids and Limaçons* 18

1.6. Diện tích và độ dài cung trong tọa độ cực – *1.6. Area and Arc Length in Polar Coordinates* 21

1.7. Parabol, elip, hyperbol: phương trình chính tắc và tiêu điểm – *1.7. Parabolas, Ellipses and Hyperbolas: Standard Forms and Foci* 24

1.8. Tâm sai, conic dạng cực và phép xoay trục – *1.8. Eccentricity, Polar Form of Conics and Rotation of Axes* 27

1.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *1.9. Applied exercises with solutions* 30

1.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *1.10. Essay questions and answer outlines* 32

1.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *1.11. Multiple-choice questions* 34

Chương 2. Vectơ, đường thẳng và mặt trong không gian – *Chapter 2. Vectors, Lines and Surfaces in Space* 36

2.1. Vectơ trong mặt phẳng và các phép toán cơ bản – *2.1. Vectors in the Plane and Basic Operations* 36

2.2. Hệ tọa độ ba chiều, khoảng cách và mặt cầu – *2.2. Three-Dimensional Coordinates, Distance and Spheres* 39

2.3. Tích vô hướng, góc giữa hai vectơ và hình chiếu – *2.3. The Dot Product, Angles and Projections* 43

2.4. Tích có hướng, tích hỗn tạp và ứng dụng diện tích, thể tích – *2.4. The Cross Product, Triple Scalar Product, Area and Volume* 47

2.5. Phương trình đường thẳng trong không gian – *2.5. Equations of Lines in Space* 51

2.6. Phương trình mặt phẳng, góc và khoảng cách – *2.6. Equations of Planes, Angles and Distances* 55

2.7. Mặt trụ và các mặt bậc hai – *2.7. Cylinders and Quadric Surfaces* 58

2.8. Tọa độ trụ và tọa độ cầu – *2.8. Cylindrical and Spherical Coordinates* 61

2.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *2.9. Applied exercises with solutions* 65

2.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *2.10. Essay questions and answer outlines* 67

2.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *2.11. Multiple-choice questions* 69

Chương 3. Hàm vectơ, độ cong và chuyển động trong không gian – *Chapter 3. Vector-Valued Functions, Curvature and Motion in Space* 71

3.1. Hàm vectơ, đường cong không gian, giới hạn và liên tục – *3.1. Vector-Valued Functions, Space Curves, Limits and Continuity* 71

3.2. Đạo hàm hàm vectơ và vectơ tiếp tuyến đơn vị – *3.2. Derivatives of Vector Functions and the Unit Tangent Vector* 74

3.3. Tích phân hàm vectơ và tìm vị trí từ vận tốc – *3.3. Integrals of Vector Functions and Recovering Position* 77

3.4. Độ dài cung và tham số hóa theo độ dài cung – *3.4. Arc Length and the Arc-Length Parameterization* 80

3.5. Độ cong của đường cong phẳng và không gian – *3.5. Curvature of Plane and Space Curves* 82

3.6. Vectơ pháp tuyến chính, vectơ trùng pháp tuyến và mặt phẳng mật tiếp – *3.6. Principal Normal, Binormal Vectors and the Osculating Plane* 85

3.7. Vận tốc, gia tốc và chuyển động ném xiên – *3.7. Velocity, Acceleration and Projectile Motion* 87

3.8. Thành phần tiếp tuyến, pháp tuyến của gia tốc và các định luật Kepler – *3.8. Tangential and Normal Components of Acceleration, Kepler's Laws* 90

3.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *3.9. Applied exercises with solutions* 94

3.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *3.10. Essay questions and answer outlines* 95

3.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *3.11. Multiple-choice questions* 97

Chương 4. Hàm nhiều biến: giới hạn, đạo hàm riêng và mặt phẳng tiếp xúc – *Chapter 4. Functions of Several Variables: Limits, Partial Derivatives and Tangent Planes* 99

4.1. Hàm hai, ba biến: miền xác định và đồ thị – *4.1. Functions of Two and Three Variables: Domain and Graph* 99

4.2. Đường mức, mặt mức và bản đồ đường đồng mức – *4.2. Level Curves, Level Surfaces and Contour Maps* 102

4.3. Giới hạn của hàm hai biến và cách chứng minh không tồn tại – *4.3. Limits of Functions of Two Variables and Showing a Limit Fails to Exist* 104

4.4. Tính liên tục của hàm nhiều biến – *4.4. Continuity of Functions of Several Variables* 108

4.5. Đạo hàm riêng cấp một và ý nghĩa hình học – *4.5. First-Order Partial Derivatives and Their Geometric Meaning* 112

4.6. Đạo hàm riêng cấp cao, định lý Clairaut và phương trình đạo hàm riêng – *4.6. Higher-Order Partial Derivatives, Clairaut's Theorem and Partial Differential Equations* 115

4.7. Mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính – *4.7. Tangent Planes and Linear Approximation* 119

4.8. Khả vi và vi phân toàn phần – *4.8. Differentiability and the Total Differential* 121

4.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *4.9. Applied exercises with solutions* 124

4.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *4.10. Essay questions and answer outlines* 126

4.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *4.11. Multiple-choice questions* 128

Chương 5. Quy tắc dây chuyền, gradient và cực trị hàm nhiều biến – *Chapter 5. Chain Rule, Gradient and Extrema of Functions of Several Variables* 131

5.1. Quy tắc dây chuyền khi các biến cùng phụ thuộc một tham số – *5.1. The Chain Rule with One Independent Variable*.....131
5.2. Quy tắc dây chuyền nhiều biến và sơ đồ cây – *5.2. The Chain Rule with Several Independent Variables and Tree Diagrams*.....134
5.3. Đạo hàm hàm ẩn nhiều biến – *5.3. Implicit Differentiation with Several Variables*136
5.4. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient – *5.4. Directional Derivatives and the Gradient Vector*.....139
5.5. Ý nghĩa gradient: hướng tăng nhanh nhất và mặt phẳng tiếp xúc của mặt mức – *5.5. Meaning of the Gradient: Steepest Ascent and Tangent Planes to Level Surfaces*..142
5.6. Cực trị địa phương và kiểm tra bằng đạo hàm cấp hai – *5.6. Local Extrema and the Second Derivative Test*.....145
5.7. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên miền đóng và bị chặn – *5.7. Absolute Maximum and Minimum on Closed Bounded Regions*.....148
5.8. Phương pháp nhân tử Lagrange – *5.8. The Method of Lagrange Multipliers*.....151
5.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *5.9. Applied exercises with solutions*.....154
5.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *5.10. Essay questions and answer outlines*.....156
5.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *5.11. Multiple-choice questions*.....158

Chương 6. Tích phân kép và ứng dụng – *Chapter 6. Double Integrals and Their Applications*.....160
6.1. Tích phân kép trên hình chữ nhật và tổng Riemann – *6.1. Double Integrals over Rectangles and Riemann Sums*.....160
6.2. Tích phân lặp và định lý Fubini – *6.2. Iterated Integrals and Fubini's Theorem*.....163
6.3. Tích phân kép trên miền tổng quát loại I và loại II – *6.3. Double Integrals over General Regions of Type I and Type II*.....166
6.4. Đổi thứ tự tích phân – *6.4. Changing the Order of Integration*.....169
6.5. Tính diện tích, thể tích và giá trị trung bình bằng tích phân kép – *6.5. Area, Volume and Average Value with Double Integrals*.....172
6.6. Tích phân kép trong tọa độ cực – *6.6. Double Integrals in Polar Coordinates*.....175
6.7. Tích phân kép suy rộng và ứng dụng trong xác suất – *6.7. Improper Double Integrals and Applications to Probability*.....178
6.8. Khối lượng, tâm khối và mômen quán tính của tấm phẳng – *6.8. Mass, Center of Mass and Moments of Inertia of Laminas*.....181
6.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *6.9. Applied exercises with solutions*.....184
6.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *6.10. Essay questions and answer outlines*.....186
6.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *6.11. Multiple-choice questions*.....188

Chương 7. Tích phân bội ba và phép đổi biến – *Chapter 7. Triple Integrals and Change of Variables*.....190
7.1. Tích phân bội ba trên hình hộp – *7.1. Triple Integrals over Rectangular Boxes*.....190
7.2. Tích phân bội ba trên miền tổng quát – *7.2. Triple Integrals over General Regions*193
7.3. Đổi thứ tự trong tích phân bội ba – *7.3. Changing the Order in Triple Integrals*....196
7.4. Tích phân bội ba trong tọa độ trụ – *7.4. Triple Integrals in Cylindrical Coordinates*.....199
7.5. Tích phân bội ba trong tọa độ cầu – *7.5. Triple Integrals in Spherical Coordinates*202

7.6. Khối lượng, tâm khối và mômen quán tính của vật thể – *7.6. Mass, Center of Mass and Moments of Inertia of Solids* 204
7.7. Phép đổi biến tổng quát và định thức Jacobi – *7.7. General Change of Variables and the Jacobian* 207
7.8. Chọn phép đổi biến phù hợp để đơn giản miền và hàm – *7.8. Choosing a Substitution to Simplify the Region and Integrand*....210
7.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *7.9. Applied exercises with solutions*....213
7.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *7.10. Essay questions and answer outlines*....215
7.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *7.11. Multiple-choice questions*....217

Chương 8. Trường vectơ, tích phân đường và định lý Green – *Chapter 8. Vector Fields, Line Integrals and Green's Theorem*.... 219
8.1. Trường vectơ và trường gradient – *8.1. Vector Fields and Gradient Fields*....219
8.2. Tích phân đường của hàm vô hướng – *8.2. Scalar Line Integrals* 222
8.3. Tích phân đường của trường vectơ và công – *8.3. Vector Line Integrals and Work*225
8.4. Lưu số và thông lượng qua đường cong phẳng – *8.4. Circulation and Flux Across Plane Curves* 228
8.5. Trường bảo toàn, hàm thế và định lý cơ bản của tích phân đường – *8.5. Conservative Fields, Potential Functions and the Fundamental Theorem for Line Integrals*....231
8.6. Kiểm tra trường bảo toàn và tìm hàm thế – *8.6. Testing for Conservative Fields and Finding Potential Functions*....234
8.7. Định lý Green dạng lưu số và tính diện tích – *8.7. Green's Theorem in Circulation Form and Area Computation* 237
8.8. Định lý Green dạng thông lượng và miền có lỗ – *8.8. Green's Theorem in Flux Form and Regions with Holes*....240
8.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *8.9. Applied exercises with solutions*....243
8.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *8.10. Essay questions and answer outlines*....245
8.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *8.11. Multiple-choice questions*....247

Chương 9. Tích phân mặt và các định lý Stokes, Gauss – *Chapter 9. Surface Integrals and the Theorems of Stokes and Gauss*.... 249
9.1. Divergence và curl của trường vectơ – *9.1. Divergence and Curl of a Vector Field*249
9.2. Mặt tham số và vectơ pháp tuyến – *9.2. Parametric Surfaces and Normal Vectors* 252
9.3. Diện tích mặt cong – *9.3. Surface Area* 255
9.4. Tích phân mặt của hàm vô hướng – *9.4. Surface Integrals of Scalar Functions* 258
9.5. Tích phân mặt của trường vectơ và thông lượng – *9.5. Surface Integrals of Vector Fields and Flux*....262
9.6. Định lý Stokes – *9.6. Stokes' Theorem* 265
9.7. Định lý Divergence (định lý Gauss) – *9.7. The Divergence Theorem (Gauss's Theorem)* 268
9.8. Mối liên hệ giữa các định lý lớn và cách chọn công cụ – *9.8. How the Major Theorems Connect and Which One to Use*....271
9.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *9.9. Applied exercises with solutions*....274
9.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *9.10. Essay questions and answer outlines*....276
9.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *9.11. Multiple-choice questions*....278

Chương 10. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai – *Chapter 10. Second-Order Linear Differential Equations*..... 280

10.1. Phương trình tuyến tính cấp hai, nghiệm độc lập tuyến tính và định thức Wronski – *10.1. Second-Order Linear Equations, Independent Solutions and the Wronskian* 280

10.2. Phương trình thuần nhất hệ số hằng: nghiệm thực phân biệt và nghiệm kép – *10.2. Constant-Coefficient Homogeneous Equations: Distinct and Repeated Real Roots*284

10.3. Phương trình thuần nhất hệ số hằng: nghiệm phức – *10.3. Constant-Coefficient Homogeneous Equations: Complex Roots* 287

10.4. Bài toán giá trị ban đầu và bài toán giá trị biên – *10.4. Initial-Value and Boundary-Value Problems* 290

10.5. Phương trình không thuần nhất: phương pháp hệ số bất định – *10.5. Nonhomogeneous Equations: The Method of Undetermined Coefficients* 292

10.6. Phương trình không thuần nhất: phương pháp biến thiên hằng số – *10.6. Nonhomogeneous Equations: Variation of Parameters*.....296

10.7. Dao động lò xo tự do và tắt dần – *10.7. Free and Damped Spring Oscillations*....298

10.8. Dao động cưỡng bức, cộng hưởng và mạch điện RLC – *10.8. Forced Oscillations, Resonance and RLC Circuits* 302

10.9. Nghiệm của phương trình vi phân dưới dạng chuỗi lũy thừa – *10.9. Series Solutions of Differential Equations*.....305

10.10. Bài tập vận dụng có lời giải – *10.10. Applied exercises with solutions*.....308

10.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *10.11. Essay questions and answer outlines* ...309

10.12. Câu hỏi trắc nghiệm – *10.12. Multiple-choice questions*.....312

Phụ lục A. Đáp án trắc nghiệm – *Appendix A. Answers to the multiple-choice questions* 314

Phụ lục B. Bảng thuật ngữ Việt – Anh – *Appendix B. Vietnamese–English glossary*. 326

Phụ lục C. Tài liệu tham khảo – *Appendix C. References* 331

Chương 1. Đường cong tham số, tọa độ cực và các đường conic

– Chapter 1. Parametric Curves, Polar Coordinates and Conic Sections

Mục tiêu chương *– Chapter objectives*

- Khử tham số và tính được đạo hàm, tiếp tuyến, độ lõm, diện tích, độ dài cung của một đường cong tham số
  Eliminate the parameter and compute the derivative, tangent line, concavity, area and arc length of a parametric curve
- Đổi qua lại giữa tọa độ cực và tọa độ Descartes, nhận ra đường cardioid, đường hoa hồng và tính diện tích, độ dài cung bằng tích phân cực
  Convert between polar and Cartesian coordinates, recognize cardioids and rose curves, and compute polar area and arc length with integrals
- Viết phương trình chính tắc của parabol, elip, hyperbol, tìm tiêu điểm, tâm sai, dạng cực và nhận dạng conic tổng quát bằng $B^2 - 4AC$
  Write the standard equations of parabolas, ellipses and hyperbolas, find foci, eccentricity and polar form, and classify a general conic using $B^2 - 4AC$

1.1. Phương trình tham số và cách khử tham số *– 1.1. Parametric Equations and Eliminating the Parameter*

Hãy hình dung bạn theo dõi một chiếc xe qua ứng dụng bản đồ. Mỗi giây ứng dụng báo một vị trí: cách điểm xuất phát bao xa theo hướng đông, bao xa theo hướng bắc. Thời gian là đại lượng điều khiển, còn vị trí x, y chạy theo nó. Đó là ý của phương trình tham số: x = f(t) và y = g(t), trong đó t là tham số (thường hiểu là thời gian). Mỗi giá trị t cho đúng một điểm (x, y), và khi t tăng thì điểm chạy vẽ ra một đường cong.

Picture tracking a car in a map app. Every second it reports a position: how far east and how far north of the start. Time drives everything, and the position x, y follows it. That is the idea of parametric equations: x = f(t) and y = g(t), where t is the parameter (usually read as time). Each value of t gives exactly one point (x, y), and as t increases the moving point draws a curve.

Cách viết này vẽ được cả những đường mà y = h(x) không biểu diễn nổi, ví dụ cả vòng tròn (một x ứng với hai y). Ngoài hình dạng, nó còn cho biết chiều đi: điểm ứng với t nhỏ đi trước, t lớn đi sau. Chiều này gọi là hướng của đường cong, và ta vẽ mũi tên lên hình.

This form can draw curves that y = h(x) cannot, such as a full circle (one x pairs with two y values). It also tells you the direction of travel: the point for a small t comes first, and the point for a larger t comes later. This is the orientation of the curve, and you draw it as arrows on the sketch.

Khử tham số để ra phương trình theo x và y *– Eliminating the parameter to get an equation in x and y*

Khử tham số nghĩa là loại t đi, chỉ giữ một hệ thức giữa x và y. Làm vậy để nhận ra đường cong quen thuộc (đường thẳng, parabol, elip…). Mất t thì mất cả hướng đi và khoảng chạy, nên phải ghi lại hai thứ đó riêng.

Eliminating the parameter means removing t and keeping one relation between x and y. You do it to recognize a familiar curve (line, parabola, ellipse, and so on). Once t is gone, so are the direction and the range of travel, so you record those separately.

1. Xem hai phương trình có giải được t dễ không. Nếu x hoặc y chỉ có t bậc nhất hay lũy thừa đơn giản, rút t ra.
   Check whether t is easy to solve for. If x or y contains t only to the first power or a simple power, solve for t.
2. Thế t vừa rút vào phương trình còn lại, rồi rút gọn thành hệ thức của x và y.
   Substitute that t into the other equation and simplify to a relation between x and y.
3. Nếu x, y chứa sin t và cos t, đừng rút t. Tách sin t và cos t ra từng vế, bình phương rồi cộng, dùng $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.
   If x and y contain sin t and cos t, do not solve for t. Isolate sin t and cos t, square both and add, using $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.
4. Dùng khoảng của t để tìm khoảng của x và y. Đường cong chỉ là phần của đồ thị nằm trong khoảng đó.
   Use the range of t to find the range of x and y. The curve is only the part of the graph inside that range.
5. Thay vài giá trị t (đầu, giữa, cuối) để xác định điểm đầu, điểm cuối và chiều đi.
   Plug in a few values of t (start, middle, end) to find the start point, end point and direction.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đường tròn: $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Chia cho 4 rồi bình phương cộng lại: $x^2/16 + y^2/16 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, tức $x^2 + y^2 = 16$. Đó là đường tròn tâm O, bán kính 4. Tại $t = 0$ ta có (4, 0); $t = \pi/2$ cho (0, 4); $t = \pi$ cho (−4, 0). Điểm đi từ phải lên trên rồi sang trái, nên chiều ngược kim đồng hồ, vẽ đúng một vòng và về lại (4, 0).
Circle: $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Divide by 4, square and add: $x^2/16 + y^2/16 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, so $x^2 + y^2 = 16$. This is a circle centered at the origin with radius 4. At $t = 0$ we get (4, 0); $t = \pi/2$ gives (0, 4); $t = \pi$ gives (−4, 0). The point moves from right to top to left, so the direction is counterclockwise, and it makes exactly one lap, returning to (4, 0).

VÍ DỤ / EXAMPLE – Elip: $x = 5\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Ta có $x/5 = \cos t$ và $y/2 = \sin t$. Bình phương cộng lại: $x^2/25 + y^2/4 = 1$. Elip nằm ngang, nửa trục dài 5, nửa trục ngắn 2, cũng đi ngược chiều kim đồng hồ.
Ellipse: $x = 5\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. We have $x/5 = \cos t$ and $y/2 = \sin t$. Square and add: $x^2/25 + y^2/4 = 1$. It is a horizontal ellipse with semi-major axis 5 and semi-minor axis 2, also traversed counterclockwise.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đoạn thẳng: $x = 1 + 2t$, $y = 3 - t$, $0 \le t \le 2$. Từ x ta rút $t = (x - 1)/2$. Thế vào y: $y = 3 - (x - 1)/2 = (7 - x)/2$. Với t từ 0 đến 2, x chạy từ 1 đến 5. Điểm đầu (1, 3), điểm cuối (5, 1). Kiểm tra: $x = 5$ thì $y = (7 - 5)/2 = 1$, khớp. Đây là đoạn thẳng, không phải cả đường thẳng.
Line segment: $x = 1 + 2t$, $y = 3 - t$, $0 \le t \le 2$. From x we get $t = (x - 1)/2$. Substitute into y: $y = 3 - (x - 1)/2 = (7 - x)/2$. As t goes from 0 to 2, x runs from 1 to 5. The start is (1, 3) and the end is (5, 1). Check: at $x = 5$, $y = (7 - 5)/2 = 1$, which matches. This is a segment, not the whole line.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Parabol cắt khúc: $x = t + 2$, $y = t^2 - 3$, $-2 \le t \le 3$. Từ x rút $t = x - 2$. Thế vào y: $y = (x - 2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$. Khi t chạy từ −2 đến 3, x chạy từ 0 đến 5. Điểm đầu (0, 1), điểm cuối (5, 6). Tại $t = 0$ điểm ở đáy (2, −3). Kiểm tra: $x = 5$ thì $25 - 20 + 1 = 6$,

khớp. Điểm đi từ trái sang phải, nên chỉ có phần parabol với $0 \le x \le 5$.
Clipped parabola: $x = t + 2$, $y = t^2 - 3$, $-2 \le t \le 3$. From x solve $t = x - 2$. Substitute into y: $y = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$. As t runs from -2 to 3, x runs from 0 to 5. The start is (0, 1) and the end is (5, 6). At $t = 0$ the point is at the bottom, (2, −3). Check: at $x = 5$, $25 - 20 + 1 = 6$, which matches. The point moves left to right, so only the part of the parabola with $0 \le x \le 5$ is drawn.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Nửa đường tròn: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \pi$. Khử như trước ra $x^2 + y^2 = 9$. Nhưng $\sin t \ge 0$ khi t từ 0 đến π, nên $y \ge 0$. Đường cong chỉ là nửa trên, đi từ (3, 0) qua (0, 3) ở $t = \pi/2$ rồi tới (−3, 0).
Half circle: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \pi$. Eliminating as before gives $x^2 + y^2 = 9$. But $\sin t \ge 0$ for t from 0 to π, so $y \ge 0$. The curve is only the upper half, going from (3, 0) through (0, 3) at $t = \pi/2$ to (−3, 0).

Đường xycloit – *The cycloid*

Gắn một chấm sơn lên vành bánh xe bán kính a rồi lăn bánh trên đường thẳng, không trượt. Đường chấm sơn vẽ ra là xycloit. Tâm bánh xe ở (at, a). Chấm quay quanh tâm theo chiều kim đồng hồ, lệch so với tâm $(-a\sin t, -a\cos t)$. Cộng hai phần lại ta có $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
Put a paint dot on the rim of a wheel of radius a and roll it along a straight road without slipping. The path the dot draws is a cycloid. The wheel's center is at (at, a). The dot turns around the center clockwise, offset from it by $(-a\sin t, -a\cos t)$. Adding the two parts gives $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Một nhịp ứng với $0 \le t \le 2\pi$. Tại $t = 0$ chấm chạm đất ở gốc (0, 0). Tại $t = \pi$ chấm ở đỉnh, $(\pi a, 2a)$. Tại $t = 2\pi$ chấm lại chạm đất ở $(2\pi a, 0)$. Tại hai điểm chạm đất, đường cong nhọn lại thành mũi (điểm cusp). Với đường này, rút t từ x là không làm được bằng hàm quen thuộc, nên ta giữ dạng tham số.
One arch corresponds to $0 \le t \le 2\pi$. At $t = 0$ the dot touches the ground at the origin (0, 0). At $t = \pi$ it sits at the top, $(\pi a, 2a)$. At $t = 2\pi$ it touches the ground again at $(2\pi a, 0)$. At the two ground points the curve forms a sharp tip (a cusp). For this curve you cannot solve for t from x using familiar functions, so you keep the parametric form.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Bánh xe bán kính $a = 2$, lấy $t = \pi/2$. Ta có $x = 2(\pi/2 - \sin(\pi/2)) = 2(\pi/2 - 1) = \pi - 2 \approx 1{,}14$. Còn $y = 2(1 - \cos(\pi/2)) = 2(1 - 0) = 2$. Vậy chấm ở khoảng (1,14; 2): đã lăn một phần tư vòng, đang ở ngang tâm bánh. Cả nhịp dài $2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12{,}57$ và cao tối đa $2a = 4$.
Take a wheel of radius $a = 2$ and $t = \pi/2$. We get $x = 2(\pi/2 - \sin(\pi/2)) = 2(\pi/2 - 1) = \pi - 2 \approx 1.14$. And $y = 2(1 - \cos(\pi/2)) = 2(1 - 0) = 2$. So the dot is at about (1.14, 2): the wheel has turned a quarter lap and the dot is level with the center. The whole arch is $2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12.57$ long and at most $2a = 4$ high.

Làm ngược lại: tìm tham số hóa – *Going the other way: finding a parameterization*

Cho sẵn đường cong, ta tự chọn x hoặc y là hàm của t. Cách tham số hóa không duy nhất, nên hai đáp án khác nhau vẫn có thể cùng đúng.
Given a curve, you choose x or y as a function of t yourself. A parameterization is not unique, so two different answers can both be correct.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Bài luyện, đáp án ngay sau mỗi ý. (a) Parabol $y = x^2$: đặt $x = t$, $y = t^2$, t tùy ý. Cách khác: $x = -t$, $y = t^2$ (đi ngược chiều). (b) Đường tròn $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$: đặt $x = 2 + 3\cos t$, $y = -1 + 3\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Thử lại: $(3\cos t)^2 + (3\sin t)^2 = 9$. (c) Đoạn từ $A(1, 2)$ đến $B(4, 6)$: $x = 1 + 3t$, $y = 2 + 4t$, $0 \le t \le 1$. Tại $t = 1$ ta có $(4, 6)$, đúng điểm B.
Practice, with the answer right after each part. (a) Parabola $y = x^2$: set $x = t$, $y = t^2$, any t. Another choice: $x = -t$, $y = t^2$ (opposite direction). (b) Circle $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$: set $x = 2 + 3\cos t$, $y = -1 + 3\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Check: $(3\cos t)^2 + (3\sin t)^2 = 9$. (c) Segment from $A(1, 2)$ to $B(4, 6)$: $x = 1 + 3t$, $y = 2 + 4t$, $0 \le t \le 1$. At $t = 1$ we get $(4, 6)$, which is point B.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên khoảng của t. Ví dụ $x = \sqrt{t}$, $y = t$ với $t \ge 0$ khử ra $y = x^2$, nhưng chỉ lấy nhánh $x \ge 0$, không phải cả parabol. Lỗi thứ hai là khử xong rồi bỏ mất chiều đi và điểm đầu, điểm cuối.
Forgetting the range of t. For example $x = \sqrt{t}$, $y = t$ with $t \ge 0$ gives $y = x^2$, but only the branch $x \ge 0$, not the whole parabola. A second mistake is to eliminate t and then drop the direction and the start and end points.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Cùng một đường cong có thể được vẽ nhanh hay chậm, một hay nhiều lần. Ví dụ $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$ với $0 \le t \le 2\pi$ cũng khử ra $x^2 + y^2 = 1$, nhưng điểm chạy hai vòng chứ không phải một. Khi khử, hãy đếm số vòng theo khoảng của t.
The same curve can be traced fast or slow, once or several times. For example $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$ with $0 \le t \le 2\pi$ also reduces to $x^2 + y^2 = 1$, but the point runs two laps, not one. After eliminating, count the laps using the range of t.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Đường tròn tâm O bán kính r: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Elip: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Xycloit: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Đoạn thẳng từ P_0 đến P_1: điểm $P_0 + t(P_1 - P_0)$, $0 \le t \le 1$.
Circle centered at O with radius r: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Ellipse: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Cycloid: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Segment from P_0 to P_1: the point $P_0 + t(P_1 - P_0)$, $0 \le t \le 1$.

1.2. Đạo hàm, tiếp tuyến và độ lõm của đường cong tham số – *1.2. Derivatives, Tangent Lines and Concavity of Parametric Curves*

Một đường cong tham số cho x và y cùng phụ thuộc vào t, tức là $x = f(t)$, $y = g(t)$. Hình dung bạn đi bộ trên bản đồ: t là thời gian, dx/dt là tốc độ sang phải, dy/dt là tốc độ lên trên. Độ dốc của đường đi chính là tỉ số hai tốc độ ấy. Cách này dùng được cả khi bạn không viết được y thành hàm của x.
A parametric curve lets x and y both depend on t: $x = f(t)$, $y = g(t)$. Picture yourself walking across a map: t is time, dx/dt is your speed to the right, and dy/dt is your speed upward. The slope of your path is the ratio of those two speeds. This works even when you cannot write y as a function of x.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $dy/dx = (dy/dt) / (dx/dt)$, với điều kiện $dx/dt \ne 0$. Đây là độ dốc của tiếp tuyến tại điểm ứng với giá trị t đang xét.
$dy/dx = (dy/dt) / (dx/dt)$, provided $dx/dt \ne 0$. This is the slope of the tangent line at the point that belongs to the chosen value of t.

Công thức đến từ quy tắc dây chuyền: $dy/dt = (dy/dx)\cdot(dx/dt)$. Chia hai vế cho dx/dt là ra.
The formula comes from the chain rule: $dy/dt = (dy/dx)\cdot(dx/dt)$. Divide both sides by dx/dt and you have it.

Đạo hàm cấp hai và độ lõm – *Second derivative and concavity*

Độ lõm cho biết đường cong cong lên (lõm hướng lên, $d^2y/dx^2 > 0$) hay cong xuống (lõm hướng xuống, $d^2y/dx^2 < 0$). Đạo hàm cấp hai là đạo hàm của dy/dx theo x. Nhưng dy/dx đang là hàm của t, nên ta phải đạo hàm theo t rồi chia cho dx/dt một lần nữa.
Concavity tells you whether the curve bends upward (concave up, $d^2y/dx^2 > 0$) or downward (concave down, $d^2y/dx^2 < 0$). The second derivative is the derivative of dy/dx with respect to x. Since dy/dx is a function of t, you differentiate with respect to t and then divide by dx/dt once more.

> **PHẢI THUỘC / MEMORISE –** $d^2y/dx^2 = [d/dt\ (dy/dx)] / (dx/dt)$.
> *$d^2y/dx^2 = [d/dt\ (dy/dx)] / (dx/dt)$.*

Tiếp tuyến ngang và thẳng đứng – *Horizontal and vertical tangents*

- Tiếp tuyến nằm ngang khi $dy/dt = 0$ và $dx/dt \neq 0$. Tử bằng 0, mẫu khác 0, nên độ dốc bằng 0.
  The tangent is horizontal when $dy/dt = 0$ and $dx/dt \neq 0$. The numerator is zero and the denominator is not, so the slope is 0.
- Tiếp tuyến thẳng đứng khi $dx/dt = 0$ và $dy/dt \neq 0$. Mẫu bằng 0 nên độ dốc không tồn tại, đường thẳng song song với trục Oy.
  The tangent is vertical when $dx/dt = 0$ and $dy/dt \neq 0$. The denominator is zero, so the slope is undefined and the line is parallel to the y-axis.
- Nếu cả hai cùng bằng 0 tại một t, công thức chưa kết luận được. Bạn phải xét giới hạn của tỉ số hoặc vẽ đồ thị quanh điểm đó.
  If both are zero at the same t, the formula alone gives no answer. You must take the limit of the ratio or sketch the curve near that point.

Cách viết phương trình tiếp tuyến tại $t = t_0$ – *Writing the tangent line at $t = t_0$*

1. Tính $x(t_0)$ và $y(t_0)$ để có tọa độ điểm tiếp xúc (x_0, y_0).
   Compute $x(t_0)$ and $y(t_0)$ to get the point of tangency (x_0, y_0).
2. Tính dx/dt và dy/dt, rồi thay $t = t_0$ vào cả hai.
   Compute dx/dt and dy/dt, then substitute $t = t_0$ into both.
3. Kiểm tra $dx/dt \neq 0$, rồi lập hệ số góc $m = (dy/dt) / (dx/dt)$.
   Check that $dx/dt \neq 0$, then form the slope $m = (dy/dt) / (dx/dt)$.
4. Viết $y - y_0 = m(x - x_0)$ và rút gọn.
   Write $y - y_0 = m(x - x_0)$ and simplify.
5. Muốn xét độ lõm, tính $d/dt(dy/dx)$, chia cho dx/dt, thay t_0 và đọc dấu.
   To test concavity, compute $d/dt(dy/dx)$, divide by dx/dt, substitute t_0 and read the sign.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $x = t^2 + 1$, $y = t^3 - 3t$. Viết tiếp tuyến tại $t = 2$ và xét độ lõm. Điểm tiếp xúc: $x = 4 + 1 = 5$, $y = 8 - 6 = 2$, tức $(5, 2)$. Ta có $dx/dt = 2t$ và $dy/dt = 3t^2 - 3$. Tại $t = 2$: $dx/dt = 4$, $dy/dt = 9$, nên $m = 9/4$. Phương trình: $y - 2 = (9/4)(x - 5)$, tức $y = (9/4)x - 37/4$. Về độ lõm: $dy/dx = (3t^2 - 3)/(2t) = (3/2)(t - 1/t)$. Đạo hàm theo t được $(3/2)(1 + 1/t^2)$, tại $t = 2$ bằng $(3/2)(5/4) = 15/8$. Chia cho $dx/dt = 4$ ra $d^2y/dx^2 = 15/32 > 0$. Vậy đường cong lõm hướng lên tại điểm này.

Take $x = t^2 + 1$, $y = t^3 - 3t$. Write the tangent at $t = 2$ and test concavity. Point of tangency: $x = 4 + 1 = 5$, $y = 8 - 6 = 2$, so $(5, 2)$. We have $dx/dt = 2t$ and $dy/dt = 3t^2 - 3$. At $t = 2$: $dx/dt = 4$, $dy/dt = 9$, so $m = 9/4$. The equation is $y - 2 = (9/4)(x - 5)$, that is $y = (9/4)x - 37/4$. For concavity: $dy/dx = (3t^2 - 3)/(2t) = (3/2)(t - 1/t)$. Its derivative in t is $(3/2)(1 + 1/t^2)$, which equals $(3/2)(5/4) = 15/8$ at $t = 2$. Divide by $dx/dt = 4$ to get $d^2y/dx^2 = 15/32 > 0$. The curve is concave up at this point.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tìm các điểm có tiếp tuyến ngang hoặc đứng của đường $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t < 2\pi$ (một elip). Ta có $dx/dt = -2\sin t$ và $dy/dt = 3\cos t$. Tiếp tuyến ngang: $\cos t = 0$ và $\sin t \neq 0$, nên $t = \pi/2$ hoặc $t = 3\pi/2$, cho các điểm $(0, 3)$ và $(0, -3)$. Tiếp tuyến đứng: $\sin t = 0$ và $\cos t \neq 0$, nên $t = 0$ hoặc $t = \pi$, cho các điểm $(2, 0)$ và $(-2, 0)$. Kết quả khớp với hình elip: đỉnh trên, đỉnh dưới có tiếp tuyến ngang, hai đỉnh bên có tiếp tuyến đứng.

Find the points with horizontal or vertical tangents on $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t < 2\pi$ (an ellipse). We have $dx/dt = -2\sin t$ and $dy/dt = 3\cos t$. Horizontal: $\cos t = 0$ and $\sin t \neq 0$, so $t = \pi/2$ or $t = 3\pi/2$, giving $(0, 3)$ and $(0, -3)$. Vertical: $\sin t = 0$ and $\cos t \neq 0$, so $t = 0$ or $t = \pi$, giving $(2, 0)$ and $(-2, 0)$. This matches the ellipse: the top and bottom points have horizontal tangents, and the left and right points have vertical ones.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Trường hợp cả hai đạo hàm cùng bằng 0: $x = t^2$, $y = t^3$ tại $t = 0$. Ta có $dx/dt = 2t$ và $dy/dt = 3t^2$, cả hai bằng 0 khi $t = 0$, nên công thức chưa dùng được. Với $t \neq 0$, tỉ số rút gọn thành $dy/dx = 3t/2$. Khi t tiến tới 0 từ cả hai phía, tỉ số tiến tới 0. Vậy tiếp tuyến tại gốc tọa độ nằm ngang, chính là trục Ox. Đây là một điểm nhọn: $x = t^2$ không âm, nên nhánh $t < 0$ và nhánh $t > 0$ cùng nằm bên phải trục Oy rồi gặp nhau ở gốc.

The case where both derivatives vanish: $x = t^2$, $y = t^3$ at $t = 0$. We have $dx/dt = 2t$ and $dy/dt = 3t^2$, and both equal 0 at $t = 0$, so the formula cannot be used directly. For $t \neq 0$, the ratio simplifies to $dy/dx = 3t/2$. As t approaches 0 from either side, the ratio approaches 0. So the tangent at the origin is horizontal: it is the x-axis. The origin is a cusp: $x = t^2$ is never negative, so the branch $t < 0$ and the branch $t > 0$ both lie to the right of the y-axis and meet at the origin.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lấy d^2y/dt^2 chia cho d^2x/dt^2 để ra đạo hàm cấp hai. Cách này sai. Phải đạo hàm dy/dx theo t rồi chia cho dx/dt.

Dividing d^2y/dt^2 by d^2x/dt^2 to get the second derivative. This is wrong. Differentiate dy/dx with respect to t, then divide by dx/dt.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên chia cho dx/dt ở bước cuối, chỉ dừng ở $d/dt(dy/dx)$. Kết quả khi đó chưa phải d^2y/dx^2.

Forgetting the final division by dx/dt and stopping at $d/dt(dy/dx)$. That result is not yet d^2y/dx^2.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Thấy $dy/dt = 0$ là kết luận tiếp tuyến ngang ngay. Hãy kiểm tra dx/dt tại cùng giá trị t đó có khác 0 không.

Declaring a horizontal tangent as soon as $dy/dt = 0$. Check that dx/dt is nonzero at that same t.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Thay t_0 vào dy/dx trước khi đạo hàm theo t. Khi đó biểu thức thành một con số, đạo hàm ra 0 và độ lõm sai. Hãy đạo hàm trước, thay số sau.

Substituting t_0 into dy/dx before differentiating with respect to t. The expression turns into a plain

number, its derivative is 0, and the concavity comes out wrong. Differentiate first, substitute afterward.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bỏ qua dấu của dx/dt khi chia ở bước cuối. Nếu dx/dt âm tại t_0, dấu của d^2y/dx^2 đảo so với d/dt(dy/dx).
Ignoring the sign of dx/dt in the final division. If dx/dt is negative at t_0, the sign of d^2y/dx^2 is the opposite of the sign of d/dt(dy/dx).

MẸO / TIP – Tìm điểm tiếp tuyến ngang và đứng thì giải hai phương trình dy/dt = 0 và dx/dt = 0 riêng rẽ, lập bảng các nghiệm t, rồi so sánh để loại nghiệm chung.
To find horizontal and vertical tangents, solve dy/dt = 0 and dx/dt = 0 separately, list the roots, and compare the lists to discard any shared root.

1.3. Diện tích và độ dài cung của đường cong tham số – *1.3. Area and Arc Length for Parametric Curves*

Một đường cong tham số cho x = x(t), y = y(t) với t chạy từ α đến β. Hãy hình dung t là thời gian, còn (x, y) là vị trí của một con kiến đang bò trên giấy. Từ cách viết này ta tính được ba thứ: diện tích dưới đường cong, quãng đường con kiến bò (độ dài cung) và diện tích mặt tạo ra khi quay đường cong quanh một trục. Ý chung là đổi hết mọi thứ sang biến t.

A parametric curve is given by x = x(t), y = y(t) for t running from α to β. Think of t as time and (x, y) as the position of an ant crawling across a sheet of paper. From this description you can compute three things: the area under the curve, the distance the ant travels (arc length), and the area of the surface made by spinning the curve about an axis. The common idea is to rewrite everything in terms of t.

Diện tích dưới đường cong – *Area under the curve*

Với hàm thường, diện tích dưới đồ thị là $\int y\,dx$. Khi x = x(t) thì dx = x′(t) dt, nên ta thay thẳng vào. Điều kiện: $y \geq 0$ và đường cong đi từ trái sang phải, tức x tăng theo t.

For an ordinary function, the area under a graph is $\int y\,dx$. When x = x(t), dx = x′(t) dt, so you substitute directly. This needs $y \geq 0$ and the curve moving left to right, meaning x increases with t.

$$A = \int y(t)\cdot x'(t)\,dt, \text{ với } \alpha \leq t \leq \beta$$

Độ dài cung – *Arc length*

Một đoạn cực nhỏ của đường cong có độ dài $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, theo định lý Pythagore. Chia cả hai vế cho dt rồi cộng lại, ta được tích phân của tốc độ của con kiến.

A tiny piece of the curve has length $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, by the Pythagorean theorem. Divide through by dt and add up the pieces, and you get the integral of the ant's speed.

$$L = \int \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt, \text{ với } \alpha \leq t \leq \beta$$

Diện tích mặt tròn xoay – *Surface area of revolution*

Quay một đoạn ds quanh trục thì nó vẽ ra một dải hẹp dạng vòng đai. Chu vi vòng đai là 2π nhân bán kính, còn bề rộng là ds. Bán kính chính là khoảng cách từ điểm đó tới trục quay.

Spin a small piece ds about an axis and it sweeps out a narrow band shaped like a ring. The ring's circumference is 2π times the radius, and its width is ds. The radius is the distance from that point to the axis.

```
Quay quanh trục Ox (y ≥ 0): S = ∫ 2π·y(t)·√( (x′)² + (y′)² ) dt
Quay quanh trục Oy (x ≥ 0): S = ∫ 2π·x(t)·√( (x′)² + (y′)² ) dt
```

Cách làm – *Procedure*

1. Tính $x'(t)$ và $y'(t)$.
   Compute $x'(t)$ and $y'(t)$.
2. Xác định khoảng t sao cho đường cong được vẽ đúng một lần.
   Find the interval of t that traces the curve exactly once.
3. Chọn công thức (diện tích, độ dài hay mặt tròn xoay) và thay vào.
   Pick the formula (area, length or surface) and substitute.
4. Rút gọn biểu thức dưới căn bằng đồng nhất thức lượng giác hoặc phép đặt ẩn phụ, rồi tính tích phân.
   Simplify the expression under the root with a trig identity or a substitution, then integrate.
5. Kiểm tra kết quả: diện tích và độ dài phải dương, độ dài không được nhỏ hơn khoảng cách thẳng giữa hai đầu cung.
   Check the result: area and length must be positive, and the length cannot be shorter than the straight-line distance between the endpoints.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Một nhịp xycloit (đường cong do một điểm trên vành bánh xe lăn tạo ra): $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$. Ta có $x' = 1 - \cos t$ và $y' = \sin t$. Diện tích: $A = \int (1 - \cos t)^2\,dt = \int (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt$. Thay $\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2$ được $\int (3/2 - 2\cos t + (1/2)\cos 2t)\,dt$. Hai số hạng sau tích phân ra 0 trên $[0, 2\pi]$, còn $(3/2)\cdot 2\pi = 3\pi$. Vậy $A = 3\pi$. Độ dài: $(x')^2 + (y')^2 = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t = 4\sin^2(t/2)$. Căn là $2\sin(t/2)$, dương trên $[0, 2\pi]$. $L = \int 2\sin(t/2)\,dt = [-4\cos(t/2)]$ từ 0 đến $2\pi = 4 + 4 = 8$.

One arch of a cycloid (the path of a point on a rolling wheel's rim): $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$. Here $x' = 1 - \cos t$ and $y' = \sin t$. Area: $A = \int (1 - \cos t)^2\,dt = \int (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt$. Replace $\cos^2 t$ with $(1 + \cos 2t)/2$ to get $\int (3/2 - 2\cos t + (1/2)\cos 2t)\,dt$. The last two terms integrate to 0 over $[0, 2\pi]$, leaving $(3/2)\cdot 2\pi = 3\pi$. So $A = 3\pi$. Length: $(x')^2 + (y')^2 = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t = 4\sin^2(t/2)$. The root is $2\sin(t/2)$, which is positive on $[0, 2\pi]$. $L = \int 2\sin(t/2)\,dt = [-4\cos(t/2)]$ from 0 to $2\pi = 4 + 4 = 8$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đường tròn bán kính r: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Có $x' = -r\sin t$, $y' = r\cos t$, nên $\sqrt{(x'^2 + y'^2)} = \sqrt{(r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t)} = r$. Cung một phần tư ($0 \le t \le \pi/2$): $L = \int r\,dt = \pi r/2$. Quay nửa đường tròn trên ($0 \le t \le \pi$) quanh Ox: $S = \int 2\pi\cdot r\sin t\cdot r\,dt = 2\pi r^2\,[-\cos t]$ từ 0 đến $\pi = 2\pi r^2\cdot 2 = 4\pi r^2$. Đây đúng là diện tích mặt cầu. Với $r = 3$: cung dài $3\pi/2$, mặt cầu có diện tích 36π.

A circle of radius r: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Then $x' = -r\sin t$, $y' = r\cos t$, so $\sqrt{(x'^2 + y'^2)} = \sqrt{(r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t)} = r$. Quarter arc ($0 \le t \le \pi/2$): $L = \int r\,dt = \pi r/2$. Spin the upper half circle ($0 \le t \le \pi$) about

the x-axis: $S = \int 2\pi \cdot r \sin t \cdot r\, dt = 2\pi r^2\,[-\cos t]$ from 0 to $\pi = 2\pi r^2 \cdot 2 = 4\pi r^2$. This is the familiar sphere area. With $r = 3$, the arc has length $3\pi/2$ and the sphere has area 36π.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đường cong $x = t^2$, $y = t^3$ với $0 \le t \le 1$, đi từ (0, 0) đến (1, 1). Có $x' = 2t$, $y' = 3t^2$. Diện tích dưới đường cong: $A = \int t^3 \cdot 2t\, dt = \int 2t^4\, dt = 2/5$ (từ 0 đến 1). Độ dài: $\sqrt{(4t^2 + 9t^4)} = t\sqrt{(4 + 9t^2)}$ vì $t \ge 0$. Đặt $u = 4 + 9t^2$ thì $du = 18t\, dt$, cận u chạy từ 4 đến 13. $L = (1/18)\int \sqrt{u}\, du = (1/18)\cdot(2/3)\cdot(13\sqrt{13} - 8) = (13\sqrt{13} - 8)/27 \approx 1{,}44$. Con số này hợp lý: nó lớn hơn đoạn thẳng nối hai đầu, dài $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.
The curve $x = t^2$, $y = t^3$ with $0 \le t \le 1$ runs from (0, 0) to (1, 1). Here $x' = 2t$ and $y' = 3t^2$. Area under the curve: $A = \int t^3 \cdot 2t\, dt = \int 2t^4\, dt = 2/5$ (from 0 to 1). Length: $\sqrt{(4t^2 + 9t^4)} = t\sqrt{(4 + 9t^2)}$ because $t \ge 0$. Let $u = 4 + 9t^2$, so $du = 18t\, dt$ and u runs from 4 to 13. $L = (1/18)\int \sqrt{u}\, du = (1/18)\cdot(2/3)\cdot(13\sqrt{13} - 8) = (13\sqrt{13} - 8)/27 \approx 1.44$. The number is sensible: it is longer than the straight segment between the endpoints, which measures $\sqrt{2} \approx 1.41$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Ba công thức đều có chung thừa số $\sqrt{((x')^2 + (y')^2)}\, dt$ cho độ dài và mặt tròn xoay. Riêng diện tích dưới đường cong dùng $y \cdot x'\, dt$, không có căn.
Arc length and surface area share the factor $\sqrt{(x')^2 + (y')^2)}\, dt$. Area under the curve is the odd one out: it uses $y \cdot x'\, dt$, with no root.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lấy căn sai: $\sqrt{(4\sin^2(t/2))}$ bằng $2|\sin(t/2)|$, không phải $2\sin(t/2)$ trong mọi trường hợp. Phải xét dấu trên khoảng t đang tính, nếu không độ dài có thể ra số âm hoặc sai.
Taking the root carelessly: $\sqrt{(4\sin^2(t/2))}$ equals $2|\sin(t/2)|$, not always $2\sin(t/2)$. Check the sign on your interval of t, or the length can come out wrong or negative.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên nhân $x'(t)$ trong công thức diện tích, hoặc dùng sai hướng. Ở ví dụ đường tròn, khi t từ 0 đến $\pi/2$ thì x giảm, nên $\int y \cdot x'\, dt$ ra $-\pi r^2/4$. Diện tích là giá trị tuyệt đối $\pi r^2/4$, hoặc ta đổi cận.
Forgetting the factor $x'(t)$ in the area formula, or ignoring direction. In the circle example, x decreases as t goes from 0 to $\pi/2$, so $\int y \cdot x'\, dt$ gives $-\pi r^2/4$. The area is the absolute value $\pi r^2/4$, or you can swap the limits.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lấy khoảng t quá rộng. Xycloit lặp lại sau mỗi 2π, nên tính trên $[0, 4\pi]$ sẽ ra gấp đôi; đường tròn tính trên $[0, 2\pi]$ khi quay quanh Ox sẽ làm mặt cầu bị tính hai lần.
Using too wide an interval of t. The cycloid repeats every 2π, so $[0, 4\pi]$ doubles the answer. Spinning a full circle over $[0, 2\pi]$ about the x-axis counts the sphere twice.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm trục quay. Quay quanh Ox thì bán kính vòng đai là y(t); quay quanh Oy thì bán kính là x(t). Đặt nhầm một trong hai sẽ ra diện tích của một mặt khác hẳn.
Mixing up the axis. Spinning about the x-axis gives a ring radius of y(t); spinning about the y-axis gives x(t). Swap them and you get the area of a different surface.

1.4. Tọa độ cực và chuyển đổi sang tọa độ Descartes – *1.4. Polar Coordinates and Conversion to Rectangular Form*

Khi chỉ đường, bạn có thể nói "sang phải 3 bước, lên 4 bước". Bạn cũng có thể nói "quay mặt về hướng đông bắc rồi đi thẳng 5 bước". Cách thứ nhất là tọa độ Descartes (x, y).

Cách thứ hai là tọa độ cực: định vị điểm bằng khoảng cách tới một điểm gốc và hướng nhìn.

When you give directions, you can say "3 steps right, 4 steps up". Or you can say "face north-east and walk 5 steps straight". The first is Cartesian coordinates (x, y). The second is polar coordinates: you locate a point by its distance from a starting point and the direction you face.

Hệ cực có một điểm gốc O gọi là cực, và một tia xuất phát từ O gọi là trục cực (thường trùng với nửa trục Ox dương). Điểm P có tọa độ cực (r, θ). Ở đó r là khoảng cách từ O tới P, còn θ là góc quay từ trục cực tới tia OP. Góc dương quay ngược chiều kim đồng hồ và thường tính bằng radian.

The polar system has a starting point O called the pole, and a ray from O called the polar axis (usually the positive x-axis). A point P gets coordinates (r, θ). Here r is the distance from O to P, and θ is the angle swept from the polar axis to the ray OP. Positive angles turn counter-clockwise and are usually measured in radians.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Công thức đổi: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = y/x$ (khi $x \neq 0$).
Conversion formulas: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = y/x$ (when $x \neq 0$).

Đổi tọa độ một điểm – *Converting a single point*

1. Từ cực sang Descartes: lấy r và θ đã cho, tính $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$.
   Polar to Cartesian: take the given r and θ, then compute $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$.
2. Từ Descartes sang cực: tính $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.
   Cartesian to polar: compute $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.
3. Xác định điểm nằm ở góc phần tư nào bằng dấu của x và y. Phác nhanh điểm lên mặt phẳng.
   Decide which quadrant the point lies in from the signs of x and y. Sketch the point quickly.
4. Tìm θ sao cho $\tan\theta = y/x$, rồi chọn góc nằm đúng góc phần tư vừa xác định.
   Find θ with $\tan\theta = y/x$, then pick the angle that sits in the quadrant you just found.
5. Nếu $x = 0$ thì không chia được cho x. Khi đó lấy $\theta = \pi/2$ nếu $y > 0$, và $\theta = 3\pi/2$ nếu $y < 0$. Điểm (0, 0) có $r = 0$ và θ tùy ý.
   If $x = 0$ you cannot divide by x. Then take $\theta = \pi/2$ when $y > 0$, and $\theta = 3\pi/2$ when $y < 0$. The point (0, 0) has $r = 0$ and any θ.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đổi $(r, \theta) = (2, \pi/3)$ sang Descartes: $x = 2\cdot\cos(\pi/3) = 2\cdot(1/2) = 1$ và $y = 2\cdot\sin(\pi/3) = 2\cdot(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}$. Kết quả: $(1, \sqrt{3})$. Đổi ngược $(x, y) = (-1, 1)$: $r = \sqrt{(1 + 1)} = \sqrt{2}$. Điểm nằm ở góc phần tư II và $\tan\theta = -1$, nên $\theta = 3\pi/4$. Kết quả: $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$.
Convert $(r, \theta) = (2, \pi/3)$ to Cartesian: $x = 2\cdot\cos(\pi/3) = 2\cdot(1/2) = 1$ and $y = 2\cdot\sin(\pi/3) = 2\cdot(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}$. Result: $(1, \sqrt{3})$. Now go back with $(x, y) = (-1, 1)$: $r = \sqrt{(1 + 1)} = \sqrt{2}$. The point is in quadrant II and $\tan\theta = -1$, so $\theta = 3\pi/4$. Result: $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đổi $(x, y) = (-\sqrt{3}, -1)$ sang cực. Tính $r = \sqrt{(3 + 1)} = 2$. Cả x và y đều âm nên điểm ở góc phần tư III. Ta có $\tan\theta = (-1)/(-\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$, góc nhọn tương ứng là $\pi/6$. Vì ở góc phần tư III, $\theta = \pi + \pi/6 = 7\pi/6$. Kết quả: $(2, 7\pi/6)$. Kiểm tra: $2\cdot\cos(7\pi/6) = -\sqrt{3}$ và $2\cdot\sin(7\pi/6) = -1$.

Convert (x, y) = (−√3, −1) to polar. Compute r = √(3 + 1) = 2. Both x and y are negative, so the point is in quadrant III. Here tanθ = (−1)/(−√3) = 1/√3, and the matching acute angle is π/6. In quadrant III, θ = π + π/6 = 7π/6. Result: (2, 7π/6). Check: 2·cos(7π/6) = −√3 and 2·sin(7π/6) = −1.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bấm arctan(−1) trên máy tính được −π/4. Dùng góc này cho điểm (−1, 1) sẽ ra điểm (1, −1), nằm sai góc phần tư. Máy chỉ trả góc trong khoảng từ −π/2 đến π/2, nên bạn phải tự cộng π khi x < 0.
Pressing arctan(−1) on a calculator gives −π/4. Using that angle for the point (−1, 1) lands you on (1, −1), the wrong quadrant. The calculator only returns angles between −π/2 and π/2, so you must add π yourself when x < 0.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Máy tính đang để chế độ độ (DEG) trong khi đề cho radian cũng cho kết quả sai. Hãy kiểm tra chế độ góc trước khi bấm sin, cos.
A calculator left in degree mode (DEG) while the problem uses radians also gives wrong results. Check the angle mode before you press sin or cos.

Một điểm, nhiều cách viết – *One point, many names*

Trong hệ Descartes, mỗi điểm có đúng một cặp (x, y). Trong hệ cực thì khác, vì quay thêm một vòng đầy 2π vẫn về đúng chỗ cũ. Do đó (r, θ) và (r, θ + 2kπ) là cùng một điểm, với k là số nguyên bất kỳ.
In the Cartesian system, each point has exactly one pair (x, y). Polar is different, because one extra full turn of 2π brings you back to the same spot. So (r, θ) and (r, θ + 2kπ) are the same point, for any integer k.

Còn một cách nữa: cho r âm. Khi r < 0, bạn đi lùi về phía đối diện với hướng θ. Vì vậy (r, θ) trùng với (−r, θ + π). Riêng cực O có r = 0, và θ nhận giá trị nào cũng được.
There is one more way: let r be negative. When r < 0, you walk backwards, opposite to the direction θ. So (r, θ) equals (−r, θ + π). The pole O itself has r = 0, and θ can be anything.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Điểm (3, π/6) cũng viết được là (3, 13π/6), vì 13π/6 = π/6 + 2π. Nó còn viết được là (−3, 7π/6), vì 7π/6 = π/6 + π. Cả ba cách đều cho x = 3·cos(π/6) = 3√3/2 và y = 3/2.
The point (3, π/6) can also be written (3, 13π/6), since 13π/6 = π/6 + 2π. It can be written (−3, 7π/6) too, since 7π/6 = π/6 + π. All three give x = 3·cos(π/6) = 3√3/2 and y = 3/2.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đổi (r, θ) = (−4, π/2) sang Descartes. Ta có x = −4·cos(π/2) = −4·0 = 0 và y = −4·sin(π/2) = −4·1 = −4. Kết quả: (0, −4). Cách viết có r dương của cùng điểm này là (4, 3π/2), vì 3π/2 = π/2 + π.
Convert (r, θ) = (−4, π/2) to Cartesian. We get x = −4·cos(π/2) = −4·0 = 0 and y = −4·sin(π/2) = −4·1 = −4. Result: (0, −4). The same point with positive r is (4, 3π/2), since 3π/2 = π/2 + π.

Đổi phương trình giữa hai hệ – *Converting equations between systems*

Để đổi phương trình, bạn thay x, y bằng r cosθ, r sinθ, hoặc thay ngược lại. Hai mẹo hay dùng là nhân cả hai vế với r để tạo ra r cosθ hay r sinθ, và gom $x^2 + y^2$ thành r^2.
To convert an equation, replace x and y with r cosθ and r sinθ, or the other way round. Two handy tricks: multiply both sides by r to create r cosθ or r sinθ, and bundle $x^2 + y^2$ into r^2.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đổi $r = 6\cos\theta$ sang Descartes. Nhân hai vế với r: $r^2 = 6r\cos\theta$. Thay $r^2 = x^2 + y^2$ và $r\cos\theta = x$: $x^2 + y^2 = 6x$. Chuyển vế và hoàn thành bình phương: $(x - 3)^2 + y^2 = 9$. Đây là đường tròn tâm (3, 0), bán kính 3, đi qua gốc tọa độ. Phép nhân với r có thể thêm điểm O, nhưng O đã thuộc đường cong ($\theta = \pi/2$ cho $r = 0$) nên không có điểm thừa.
Convert $r = 6\cos\theta$ to Cartesian. Multiply both sides by r: $r^2 = 6r\cos\theta$. Substitute $r^2 = x^2 + y^2$ and $r\cos\theta = x$: $x^2 + y^2 = 6x$. Move terms and complete the square: $(x - 3)^2 + y^2 = 9$. This is a circle with center (3, 0) and radius 3, passing through the origin. Multiplying by r can add the point O, but O already lies on the curve ($\theta = \pi/2$ gives $r = 0$), so no extra point appears.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đổi $r = 4\sin\theta$ sang Descartes. Nhân hai vế với r: $r^2 = 4r\sin\theta$. Thay $r^2 = x^2 + y^2$ và $r\sin\theta = y$: $x^2 + y^2 = 4y$. Chuyển vế: $x^2 + y^2 - 4y = 0$. Hoàn thành bình phương theo y: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Đây là đường tròn tâm (0, 2), bán kính 2. Nó đi qua gốc tọa độ, vì $0^2 + (0 - 2)^2 = 4$.
Convert $r = 4\sin\theta$ to Cartesian. Multiply both sides by r: $r^2 = 4r\sin\theta$. Substitute $r^2 = x^2 + y^2$ and $r\sin\theta = y$: $x^2 + y^2 = 4y$. Move terms: $x^2 + y^2 - 4y = 0$. Complete the square in y: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. This is a circle with center (0, 2) and radius 2. It passes through the origin, since $0^2 + (0 - 2)^2 = 4$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đổi $\theta = \pi/4$ sang Descartes. Lấy tan hai vế: $y/x = 1$, tức $y = x$. Đó là đường thẳng qua gốc với hệ số góc 1. Vì r được phép âm, bạn thu được cả đường thẳng, gồm nửa tia phía đối diện.
Convert $\theta = \pi/4$ to Cartesian. Take the tangent of both sides: $y/x = 1$, so $y = x$. That is a line through the origin with slope 1. Since r may be negative, you get the whole line, including the opposite half-ray.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đổi ngược sang cực. Đường $x^2 + y^2 = 9$ thành $r^2 = 9$, tức $r = 3$. Đường thẳng $y = x + 2$ thành $r\sin\theta = r\cos\theta + 2$, tức $r(\sin\theta - \cos\theta) = 2$, hay $r = 2/(\sin\theta - \cos\theta)$.
Now go the other way. The curve $x^2 + y^2 = 9$ becomes $r^2 = 9$, so $r = 3$. The line $y = x + 2$ becomes $r\sin\theta = r\cos\theta + 2$, so $r(\sin\theta - \cos\theta) = 2$, or $r = 2/(\sin\theta - \cos\theta)$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đường thẳng đứng $x = 5$ thành $r\cos\theta = 5$, tức $r = 5/\cos\theta$. Công thức này chỉ dùng được khi $\cos\theta \neq 0$, và đúng là đường thẳng đứng không bao giờ cắt hướng $\theta = \pi/2$.
The vertical line $x = 5$ becomes $r\cos\theta = 5$, so $r = 5/\cos\theta$. The formula only works when $\cos\theta \neq 0$, which fits: a vertical line never meets the direction $\theta = \pi/2$.

Phương trình cực *Polar equation*	**Đồ thị** *Graph*	**Dạng Descartes** *Cartesian form*
$r = k$, với $k > 0$ *$r = k$, with $k > 0$*	Đường tròn tâm O, bán kính k *Circle centered at O with radius k*	$x^2 + y^2 = k^2$
$\theta = \alpha$, với α là hằng số *$\theta = \alpha$, where α is a constant*	Đường thẳng qua O, hệ số góc $\tan\alpha$ *Line through O with slope $\tan\alpha$*	$y = (\tan\alpha)\cdot x$, khi $\alpha \neq \pi/2$ *$y = (\tan\alpha)\cdot x$, when $\alpha \neq \pi/2$*
$r = a\cos\theta$, với $a \neq 0$ *$r = a\cos\theta$, with $a \neq 0$*	Đường tròn tâm $(a/2, 0)$, bán kính $\lvert a\rvert/2$ *Circle with center $(a/2, 0)$ and radius $\lvert a\rvert/2$*	$(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$
$r = a\sin\theta$, với $a \neq 0$ *$r = a\sin\theta$, with $a \neq 0$*	Đường tròn tâm $(0, a/2)$, bán kính $\lvert a\rvert/2$ *Circle with center $(0, a/2)$ and radius $\lvert a\rvert/2$*	$x^2 + (y - a/2)^2 = a^2/4$

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bình phương hay nhân hai vế với r có thể thêm điểm không thuộc đường cong gốc. Sau khi biến đổi, hãy kiểm tra xem cực O có đúng là điểm thêm vào hay không.
Squaring or multiplying both sides by r can add points that are not on the original curve. After transforming, check whether the pole O is a newly added point.

MẸO / TIP – Trước khi đổi, hãy thử nhận dạng theo bảng. Dạng r = a cosθ hay r = a sinθ luôn là đường tròn đi qua gốc.
Before converting, try to recognize the shape from the table. A form like r = a cosθ or r = a sinθ is always a circle through the origin.

1.5. Vẽ đường cong cực và nhận dạng đường hoa hồng, đường cardioid – *1.5. Sketching Polar Curves: Roses, Cardioids and Limaçons*

Đường cong cực gồm các điểm (r, θ) thỏa r = f(θ). Hình dung bạn đứng ở gốc, xoay người một góc θ rồi bước thẳng r bước: chỗ bạn dừng là một điểm của đường cong. Nếu r âm, bạn bước lùi, nên điểm rơi về phía đối diện hướng θ.
A polar curve is the set of points (r, θ) that satisfy r = f(θ). Picture yourself standing at the origin, turning by an angle θ, then walking r steps straight ahead: where you stop is a point on the curve. If r is negative, you walk backward, so the point lands opposite the direction θ.

Bốn bước vẽ – *Four steps to sketch a curve*

1. Kiểm tra đối xứng để chỉ phải vẽ một phần. Đối xứng qua trục cực (trục hoành): thay θ bằng −θ mà phương trình không đổi. Đối xứng qua trục đứng (đường θ = π/2): thay θ bằng π − θ, hoặc thay đồng thời r bằng −r và θ bằng −θ, mà phương trình không đổi. Đối xứng qua gốc: thay r bằng −r, hoặc thay θ bằng θ + π, mà phương trình không đổi.
   Check symmetry so you only draw part of the curve. Symmetry about the polar axis (the horizontal axis): replace θ with −θ and the equation stays the same. Symmetry about the vertical axis (the line θ = π/2): replace θ with π − θ, or replace r with −r and θ with −θ together, and the equation stays the same. Symmetry about the origin: replace r with −r, or θ with θ + π, and the equation stays the same.
2. Giải r = 0 để biết đường cong đi qua gốc ở những góc nào. Các góc này chia đường cong thành từng đoạn, thường là từng cánh hoặc từng vòng.
   Solve r = 0 to find the angles at which the curve passes through the origin. These angles split the curve into pieces, usually single petals or loops.
3. Lập bảng giá trị với các góc dễ tính như 0, π/6, π/4, π/3, π/2, rồi tính r. Chỉ cần lấy khoảng góc mà phép đối xứng chưa cho bạn.
   Make a table of values at easy angles such as 0, π/6, π/4, π/3 and π/2, then compute r. Use only the range of angles that symmetry has not already covered.
4. Đặt từng điểm lên mặt phẳng (nhớ r âm thì đặt ngược hướng), nối bằng nét mượt, rồi lấy đối xứng phần còn lại.
   Plot each point (remember that a negative r goes in the opposite direction), join them with a smooth line, then reflect to get the rest.

Các họ đường quen thuộc – *Familiar families of curves*

Phương trình *Equation*	**Dạng đường cong** *Shape of the curve*	**Đặc điểm để nhận ra** *How to recognise it*
r = a	Đường tròn *Circle*	Tâm ở gốc, bán kính |a|. *Centred at the origin with radius |a|.*
r = a cosθ hoặc r = a sinθ *r = a cosθ or r = a sinθ*	Đường tròn *Circle*	Đi qua gốc, đường kính |a| nằm trên trục hoành (cos) hoặc trục tung (sin). *Passes through the origin, with diameter |a| on the horizontal axis (cos) or the vertical axis (sin).*
r = a ± a cosθ hoặc r = a ± a sinθ *r = a ± a cosθ or r = a ± a sinθ*	Đường hình tim (cardioid) *Cardioid*	Hai hệ số bằng nhau, có một điểm nhọn tại gốc. *The two coefficients are equal, and there is one sharp point at the origin.*
r = a ± b cosθ hoặc r = a ± b sinθ *r = a ± b cosθ or r = a ± b sinθ*	Limaçon	Nếu a < b thì có vòng nhỏ bên trong, nếu a > b thì không có vòng; a = b là hình tim. *If a < b there is a small inner loop; if a > b there is no loop; a = b gives the cardioid.*
r = a cos nθ hoặc r = a sin nθ *r = a cos nθ or r = a sin nθ*	Hoa hồng *Rose*	n lẻ có n cánh, n chẵn có 2n cánh, mỗi cánh dài |a|. *Odd n gives n petals, even n gives 2n petals, each of length |a|.*

VÍ DỤ / EXAMPLE – Vẽ r = 2 + 2cosθ. Phương trình có dạng a + a cosθ với a = 2, nên bạn đoán trước đây là hình tim. Đối xứng: cos(−θ) = cosθ nên đường cong đối xứng qua trục cực, chỉ cần vẽ θ từ 0 đến π. Điểm qua gốc: 2 + 2cosθ = 0 cho cosθ = −1, tức θ = π. Bảng giá trị: θ = 0 thì r = 4; θ = π/3 thì r = 2 + 1 = 3; θ = π/2 thì r = 2; θ = 2π/3 thì r = 2 − 1 = 1; θ = π thì r = 0. Nối các điểm từ (4, 0) lên (2, π/2) rồi xuống gốc, sau đó lấy đối xứng qua trục hoành. Kết quả: hình tim phình sang phải, đỉnh xa nhất là (4, 0), điểm nhọn tại gốc, cắt trục tung tại hai điểm cách gốc 2 đơn vị.
Sketch r = 2 + 2cosθ. The equation has the form a + a cosθ with a = 2, so you can predict a cardioid. Symmetry: cos(−θ) = cosθ, so the curve is symmetric about the polar axis and you only need θ from 0 to π. It passes through the origin where 2 + 2cosθ = 0, so cosθ = −1 and θ = π. Table: θ = 0 gives r = 4; θ = π/3 gives r = 2 + 1 = 3; θ = π/2 gives r = 2; θ = 2π/3 gives r = 2 − 1 = 1; θ = π gives r = 0. Join the points from (4, 0) up through (2, π/2) and down to the origin, then reflect across the horizontal axis. Result: a heart-shaped curve bulging to the right, with its farthest point at (4, 0), a sharp point at the origin, crossing the vertical axis at two points 2 units from the origin.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Vẽ r = 3sin2θ và đếm cánh. Đây là hoa hồng với n = 2 chẵn, nên có 2n = 4 cánh, mỗi cánh dài 3. Đối xứng: thay θ bằng θ + π thì sin(2θ + 2π) = sin2θ, đường cong đối xứng qua gốc. Thay r bằng −r và θ bằng −θ thì −r = 3sin(−2θ) = −3sin2θ, phương trình không đổi, nên đối xứng qua trục đứng. Có hai đối xứng thì có luôn đối xứng qua trục cực. Điểm qua gốc: sin2θ = 0 tại θ = 0, π/2, π, 3π/2. Bảng: θ = π/4 thì r = 3; θ = 3π/4 thì r = −3; θ = 5π/4 thì r = 3; θ = 7π/4 thì r = −3. Từng cánh: θ từ 0 đến π/2 có r dương, cánh ở góc

phần tư thứ nhất, đỉnh (3, π/4). θ từ π/2 đến π có r âm, cánh bị lật sang góc phần tư thứ tư. θ từ π đến 3π/2 cho cánh ở góc phần tư thứ ba. θ từ 3π/2 đến 2π có r âm, cánh lật sang góc phần tư thứ hai. Bốn khoảng giữa các lần r = 0 cho bốn cánh, đỉnh nằm trên các tia 45°, 135°, 225°, 315°.
Sketch r = 3sin2θ and count the petals. This is a rose with n = 2, which is even, so it has 2n = 4 petals, each of length 3. Symmetry: replacing θ with θ + π gives sin(2θ + 2π) = sin2θ, so the curve is symmetric about the origin. Replacing r with −r and θ with −θ gives −r = 3sin(−2θ) = −3sin2θ, so the equation is unchanged and the curve is symmetric about the vertical axis. With these two symmetries, it is also symmetric about the polar axis. It passes through the origin where sin2θ = 0, at θ = 0, π/2, π and 3π/2. Table: θ = π/4 gives r = 3; θ = 3π/4 gives r = −3; θ = 5π/4 gives r = 3; θ = 7π/4 gives r = −3. Petal by petal: for θ from 0 to π/2, r is positive and the petal lies in quadrant I with tip (3, π/4). For θ from π/2 to π, r is negative and the petal flips into quadrant IV. For θ from π to 3π/2 the petal lies in quadrant III. For θ from 3π/2 to 2π, r is negative and the petal flips into quadrant II. The four intervals between zeros of r give four petals, with tips on the rays at 45°, 135°, 225° and 315°.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Vẽ r = 1 + 2cosθ. Dạng a + b cosθ với a = 1, b = 2, a < b nên có vòng nhỏ bên trong. Đối xứng: cos(−θ) = cosθ, nên chỉ cần tính θ từ 0 đến π rồi lấy đối xứng qua trục cực. Điểm qua gốc: 1 + 2cosθ = 0 cho cosθ = −1/2, tức θ = 2π/3 (và 4π/3 ở nửa dưới). Bảng: θ = 0 thì r = 3; θ = π/3 thì r = 1 + 1 = 2; θ = π/2 thì r = 1; θ = 2π/3 thì r = 0; θ = π thì r = 1 − 2 = −1. Từ θ = 0 đến 2π/3, r dương, bạn vẽ vòng lớn đi từ (3, 0) về gốc. Từ 2π/3 đến π, r âm: điểm (−1, π) nằm ở (1, 0) trên trục hoành. Phần này, cùng phần đối xứng của nó, tạo vòng nhỏ nằm trong vòng lớn, nối nhau tại gốc.
Sketch r = 1 + 2cosθ. It has the form a + b cosθ with a = 1, b = 2, and a < b, so there is a small inner loop. Symmetry: cos(−θ) = cosθ, so compute θ from 0 to π and reflect across the polar axis. It passes through the origin where 1 + 2cosθ = 0, so cosθ = −1/2 and θ = 2π/3 (and 4π/3 in the lower half). Table: θ = 0 gives r = 3; θ = π/3 gives r = 1 + 1 = 2; θ = π/2 gives r = 1; θ = 2π/3 gives r = 0; θ = π gives r = 1 − 2 = −1. From θ = 0 to 2π/3, r is positive and you draw the big loop from (3, 0) back to the origin. From 2π/3 to π, r is negative: the point (−1, π) sits at (1, 0) on the horizontal axis. This part and its mirror image form the small loop inside the big one, joined at the origin.

MẸO / TIP – Đếm cánh hoa bằng cách đếm số khoảng giữa hai nghiệm liên tiếp của r = 0, rồi nhớ rằng r âm có thể làm hai khoảng trùng một cánh. Với r = 3sin3θ (n = 3 lẻ), một vòng quay đầy đủ có 6 khoảng, nhưng cánh lặp lại sau nửa vòng nên chỉ có 3 cánh, không phải 6.
Count petals by counting the intervals between consecutive zeros of r, and remember that a negative r can make two intervals share one petal. For r = 3sin3θ (n = 3, odd), a full turn has 6 intervals, but the petals repeat after half a turn, so there are 3 petals, not 6.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên rằng r âm thì điểm nằm ngược hướng θ, nên vẽ các cánh hoa chồng lên nhau hoặc sai góc phần tư.
Forgetting that a negative r puts the point opposite the direction θ, so petals end up stacked on top of each other or in the wrong quadrant.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Kết luận không đối xứng chỉ vì một phép thử thất bại. Một đường cong có thể đối xứng mà phép thay θ bằng −θ không cho đúng phương trình cũ, như hoa hồng 3sin2θ ở trên; hãy thử cả các phép thay còn lại.
Concluding there is no symmetry just because one test fails. A curve can be symmetric even when replacing θ with −θ does not give back the original equation, as with the rose 3sin2θ above; try the other substitutions too.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chỉ lấy θ từ 0 đến π cho hoa hồng n chẵn, nên thiếu một nửa số cánh. Hoa hồng n chẵn cần θ từ 0 đến 2π.
Using only θ from 0 to π for a rose with even n, which loses half the petals. A rose with even n needs θ from 0 to 2π.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm hướng của đường tròn r = a cosθ và r = a sinθ. Kiểm tra nhanh bằng θ = 0: cos cho r = a nên đường tròn chạm trục hoành tại (a, 0); sin cho r = 0 nên đường tròn nằm trên trục tung.
Mixing up the direction of the circles r = a cosθ and r = a sinθ. Check quickly with θ = 0: cos gives r = a, so the circle reaches the horizontal axis at (a, 0); sin gives r = 0, so the circle sits on the vertical axis.

1.6. Diện tích và độ dài cung trong tọa độ cực – *1.6. Area and Arc Length in Polar Coordinates*

Trong tọa độ Descartes, bạn cắt miền thành các dải chữ nhật mỏng. Trong tọa độ cực, bạn cắt miền thành các hình quạt mỏng, tất cả đỉnh ở gốc O. Một hình quạt bán kính r, góc nhỏ Δθ có diện tích xấp xỉ ½·r²·Δθ. Cộng vô số quạt lại thì được tích phân.
In Cartesian coordinates you slice a region into thin rectangles. In polar coordinates you slice it into thin sectors, all with their tip at the origin O. A sector of radius r and tiny angle Δθ has area about ½·r²·Δθ. Adding up infinitely many sectors gives an integral.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Diện tích miền giới hạn bởi r = f(θ) và hai tia θ = α, θ = β: A = ½ ∫ từ α đến β của r² dθ. Điều kiện: f liên tục và β − α ≤ 2π, để đường cong không bị vẽ chồng lên nhau.
The area bounded by r = f(θ) and the rays θ = α, θ = β is A = ½ ∫ from α to β of r² dθ. Requirements: f is continuous and β − α ≤ 2π, so the curve is not traced twice.

Diện tích một miền cực – *Area of one polar region*

1. Vẽ phác đường cong, xác định miền cần tính.
   Sketch the curve and mark the region you need.
2. Tìm góc α và β mà miền quét qua. Với một cánh hoa, giải r = 0 để biết đường cong đi qua gốc ở những góc nào. Hai nghiệm liên tiếp là hai cận.
   Find the angles α and β that the region sweeps through. For a petal, solve r = 0 to see where the curve passes through the pole. Two consecutive solutions are your limits.
3. Viết ½ ∫ r² dθ, hạ bậc sin² hoặc cos² bằng sin²x = (1 − cos 2x)/2, cos²x = (1 + cos 2x)/2.
   Write ½ ∫ r² dθ and reduce sin² or cos² with sin²x = (1 − cos 2x)/2, cos²x = (1 + cos 2x)/2.
4. Tính tích phân, thay cận.
   Integrate and substitute the limits.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính diện tích một cánh của hoa hồng r = 2 sin 3θ. Cánh đầu tiên bắt đầu khi r = 0 tại θ = 0 và kết thúc khi 3θ = π, tức θ = π/3. Trên khoảng này sin 3θ ≥ 0. A = ½ ∫ từ 0 đến π/3 của 4 sin²3θ dθ = 2 ∫ sin²3θ dθ = ∫ (1 − cos 6θ) dθ = [θ − (sin 6θ)/6] từ 0 đến π/3 = π/3 − 0 = π/3.
Find the area of one petal of the rose r = 2 sin 3θ. The first petal starts where r = 0 at θ = 0 and ends

when $3\theta = \pi$, that is $\theta = \pi/3$. On this interval $\sin 3\theta \geq 0$. $A = \frac{1}{2}\int$ from 0 to $\pi/3$ of $4\sin^2 3\theta\, d\theta = 2\int \sin^2 3\theta\, d\theta = \int (1 - \cos 6\theta)\, d\theta = [\theta - (\sin 6\theta)/6]$ from 0 to $\pi/3 = \pi/3 - 0 = \pi/3$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính diện tích miền bên trong cardioid $r = 1 + \cos\theta$. Đường cong được vẽ đúng một vòng khi θ chạy từ 0 đến 2π. $A = \frac{1}{2}\int$ từ 0 đến 2π của $(1 + \cos\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$. Hạ bậc $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$, ta có $\frac{1}{2}\int (3/2 + 2\cos\theta + (\cos 2\theta)/2)\, d\theta$. Nguyên hàm là $(3/2)\theta + 2\sin\theta + (\sin 2\theta)/4$. Tại 2π giá trị là 3π, tại 0 giá trị là 0. Vậy $A = \frac{1}{2} \cdot 3\pi = 3\pi/2$.

Find the area inside the cardioid $r = 1 + \cos\theta$. The curve is traced exactly once as θ runs from 0 to 2π. $A = \frac{1}{2}\int$ from 0 to 2π of $(1 + \cos\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$. Reduce $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ to get $\frac{1}{2}\int (3/2 + 2\cos\theta + (\cos 2\theta)/2)\, d\theta$. An antiderivative is $(3/2)\theta + 2\sin\theta + (\sin 2\theta)/4$. At 2π its value is 3π, at 0 it is 0. So $A = \frac{1}{2} \cdot 3\pi = 3\pi/2$.

Diện tích giữa hai đường cực – *Area between two polar curves*

Giống như lấy diện tích hình lớn trừ hình nhỏ. Nếu trên khoảng $[\alpha, \beta]$ đường ngoài là $r = f(\theta)$ và đường trong là $r = g(\theta)$, với $f \geq g \geq 0$, thì $A = \frac{1}{2}\int$ từ α đến β của $(f^2 - g^2)\, d\theta$. Lưu ý: trừ bình phương rồi mới tích phân, không phải bình phương hiệu.

It works like subtracting a small shape from a big one. If on $[\alpha, \beta]$ the outer curve is $r = f(\theta)$ and the inner is $r = g(\theta)$, with $f \geq g \geq 0$, then $A = \frac{1}{2}\int$ from α to β of $(f^2 - g^2)\, d\theta$. Subtract the squares, then integrate; do not square the difference.

1. Vẽ cả hai đường trên cùng một hình, tô miền cần tính.
   Draw both curves in one picture and shade the region.
2. Giải $f(\theta) = g(\theta)$ để tìm các góc giao điểm. Các góc này thường là cận tích phân.
   Solve $f(\theta) = g(\theta)$ to get the intersection angles. These are usually your limits.
3. Kiểm tra riêng gốc O. Gốc có thể nằm trên cả hai đường nhưng ứng với các giá trị θ khác nhau, nên phương trình $f = g$ không cho ra nó.
   Check the pole O separately. It can lie on both curves at different values of θ, so the equation $f = g$ will not reveal it.
4. Trong từng khoảng góc, xem đường nào xa gốc hơn để chọn làm đường ngoài.
   On each angle interval, see which curve is farther from the pole and call it the outer curve.
5. Lập $\frac{1}{2}\int (\texttt{r_ngoài}^2 - \texttt{r_trong}^2)\, d\theta$ và tính.
   Set up $\frac{1}{2}\int (\texttt{r_outer}^2 - \texttt{r_inner}^2)\, d\theta$ and evaluate.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính diện tích phần nằm trong đường tròn $r = 4\sin\theta$ và nằm ngoài đường tròn $r = 2$. Giải $4\sin\theta = 2$ thì $\sin\theta = \frac{1}{2}$, cho $\theta = \pi/6$ và $\theta = 5\pi/6$. Trong khoảng này, $r = 4\sin\theta$ lớn hơn 2 nên là đường ngoài. $A = \frac{1}{2}\int$ từ $\pi/6$ đến $5\pi/6$ của $(16\sin^2\theta - 4)\, d\theta = \int (8\sin^2\theta - 2)\, d\theta = \int (2 - 4\cos 2\theta)\, d\theta = [2\theta - 2\sin 2\theta]$. Tại $5\pi/6$: $5\pi/3 + \sqrt{3}$. Tại $\pi/6$: $\pi/3 - \sqrt{3}$. Hiệu: $A = 4\pi/3 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}65$.

Find the area inside the circle $r = 4\sin\theta$ and outside the circle $r = 2$. Solving $4\sin\theta = 2$ gives $\sin\theta = \frac{1}{2}$, so $\theta = \pi/6$ and $\theta = 5\pi/6$. On this interval $r = 4\sin\theta$ exceeds 2, so it is the outer curve. $A = \frac{1}{2}\int$ from $\pi/6$ to $5\pi/6$ of $(16\sin^2\theta - 4)\, d\theta = \int (8\sin^2\theta - 2)\, d\theta = \int (2 - 4\cos 2\theta)\, d\theta = [2\theta - 2\sin 2\theta]$. At $5\pi/6$: $5\pi/3 + \sqrt{3}$. At $\pi/6$: $\pi/3 - \sqrt{3}$. Difference: $A = 4\pi/3 + 2\sqrt{3} \approx 7.65$.

Thử lại bằng mắt: đường tròn r = 4 sin θ có bán kính 2, diện tích 4π ≈ 12,57. Phần ta tính là một phần của hình này, nên 7,65 là con số hợp lý. Nếu ra số lớn hơn 12,57, bạn đã sai ở đâu đó.

A quick sanity check: the circle r = 4 sin θ has radius 2, so its area is 4π ≈ 12.57. The region we computed is part of that disk, so 7.65 is plausible. A result above 12.57 means something went wrong.

Độ dài cung cực – *Arc length in polar form*

Đổi sang tham số x = r cos θ, y = r sin θ rồi dùng công thức độ dài cung tham số, bạn được một công thức gọn theo r và đạo hàm dr/dθ.

Write x = r cos θ, y = r sin θ, apply the parametric arc length formula, and you get a compact formula in terms of r and its derivative dr/dθ.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – L = ∫ từ α đến β của căn(r² + (dr/dθ)²) dθ, với r = f(θ) có đạo hàm liên tục và đường cong được vẽ đúng một lần trên [α, β].

L = ∫ from α to β of sqrt(r² + (dr/dθ)²) dθ, where r = f(θ) has a continuous derivative and the curve is traced exactly once on [α, β].

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính chu vi cardioid r = 1 + cos θ, θ từ 0 đến 2π. Có dr/dθ = −sin θ. Suy ra r² + (dr/dθ)² = 1 + 2 cos θ + cos²θ + sin²θ = 2 + 2 cos θ = 4 cos²(θ/2). Căn bậc hai là 2|cos(θ/2)|. Cos(θ/2) ≥ 0 khi θ từ 0 đến π, nên dùng đối xứng: L = 2 ∫ từ 0 đến π của 2 cos(θ/2) dθ = 4 · [2 sin(θ/2)] từ 0 đến π = 8.

Find the perimeter of the cardioid r = 1 + cos θ, θ from 0 to 2π. We have dr/dθ = −sin θ. So r² + (dr/dθ)² = 1 + 2 cos θ + cos²θ + sin²θ = 2 + 2 cos θ = 4 cos²(θ/2). The square root is 2|cos(θ/2)|. Since cos(θ/2) ≥ 0 for θ from 0 to π, use symmetry: L = 2 ∫ from 0 to π of 2 cos(θ/2) dθ = 4 · [2 sin(θ/2)] from 0 to π = 8.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên hệ số ½ ở công thức diện tích, hoặc viết ½ ∫ r dθ thay vì r². Công thức độ dài cung thì không có ½.

Forgetting the factor ½ in the area formula, or writing ½ ∫ r dθ instead of r². The arc length formula has no ½.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chỉ giải f = g rồi bỏ sót gốc tọa độ. Với hai đường tròn cắt nhau, gốc thường là giao điểm thứ ba.

Solving only f = g and missing the pole. For two intersecting circles the pole is often a third intersection point.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lấy cận quá một vòng, nên diện tích hoặc độ dài bị tính hai lần. Với r = cos 2θ, thì cả 0 đến 2π đã đủ cả 4 cánh; đừng lấy 0 đến 4π.

Using limits that cover more than one pass, which counts area or length twice. For r = cos 2θ, 0 to 2π already traces all 4 petals; never use 0 to 4π.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bỏ dấu giá trị tuyệt đối khi rút căn, như căn(4cos²(θ/2)) = 2|cos(θ/2)|. Hãy chia khoảng theo dấu của cos.

Dropping the absolute value when taking a root, as in sqrt(4cos²(θ/2)) = 2|cos(θ/2)|. Split the interval by the sign of the cosine.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Để máy tính ở chế độ độ khi cận là π/3 hay 5π/6. Các công thức này chỉ đúng khi θ tính bằng radian, nên hãy chuyển máy sang chế độ radian trước khi bấm số.
Leaving the calculator in degree mode when the limits are π/3 or 5π/6. These formulas only hold when θ is in radians, so switch the calculator to radian mode before you enter numbers.

1.7. Parabol, elip, hyperbol: phương trình chính tắc và tiêu điểm – *1.7. Parabolas, Ellipses and Hyperbolas: Standard Forms and Foci*

Parabol, elip và hyperbol đều là đường conic: giao của một mặt phẳng với mặt nón. Chúng cũng có thể định nghĩa bằng khoảng cách trên mặt phẳng, và cách này giúp bạn viết phương trình rất nhanh. Giống như dùng hai chiếc đinh và một sợi dây để vẽ vòng, mỗi đường conic là tập các điểm thỏa một quy tắc về khoảng cách.
Parabolas, ellipses and hyperbolas are conic sections: the curves you get when a plane cuts a cone. They can also be defined by distances in the plane, and that definition gives their equations quickly. Think of two pins and a loop of string: each conic is the set of points obeying one distance rule.

Định nghĩa hình học – *Geometric definitions*

- Parabol: tập điểm cách đều một điểm cố định (tiêu điểm) và một đường thẳng cố định (đường chuẩn).
  Parabola: all points equally far from a fixed point (the focus) and a fixed line (the directrix).
- Elip: tập điểm có tổng khoảng cách tới hai tiêu điểm bằng một hằng số 2a.
  Ellipse: all points whose distances to two foci add up to a constant 2a.
- Hyperbol: tập điểm có hiệu khoảng cách tới hai tiêu điểm (lấy giá trị dương) bằng hằng số 2a.
  Hyperbola: all points whose distances to two foci differ by a constant 2a (taken as a positive number).

Cả ba gộp lại qua tâm sai e = (khoảng cách tới tiêu điểm) / (khoảng cách tới đường chuẩn gần nhất). Parabol có e = 1, elip có e < 1, hyperbol có e > 1. Với elip và hyperbol, e = c/a, trong đó c là khoảng cách từ tâm tới mỗi tiêu điểm.
All three fit one rule through the eccentricity e = (distance to focus) / (distance to nearest directrix). A parabola has e = 1, an ellipse e < 1, a hyperbola e > 1. For ellipses and hyperbolas, e = c/a, where c is the distance from the center to each focus.

Phương trình chính tắc (tâm hoặc đỉnh tại (h, k)) – *Standard forms (center or vertex at (h, k))*

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Parabol có đỉnh (h, k), p là khoảng cách từ đỉnh tới tiêu điểm: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ với tiêu điểm (h, k + p), đường chuẩn y = k − p. Dạng ngang $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ có tiêu điểm (h + p, k), đường chuẩn x = h − p.
Parabola with vertex (h, k), p the distance from vertex to focus: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, focus (h, k + p), directrix y = k − p. The horizontal form $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ has focus (h + p, k), directrix x = h − p.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Elip ngang (a > b): $(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$, $c^2 = a^2 - b^2$, tiêu điểm (h ± c, k). Nếu mẫu lớn nằm dưới $(y-k)^2$ thì elip đứng, tiêu điểm (h, k ± c).

Horizontal ellipse ($a > b$): $(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$, $c^2 = a^2 - b^2$, foci $(h \pm c, k)$. If the larger denominator sits under $(y-k)^2$, the ellipse is vertical with foci $(h, k \pm c)$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Hyperbol ngang: $(x-h)^2/a^2 - (y-k)^2/b^2 = 1$, $c^2 = a^2 + b^2$, đỉnh $(h \pm a, k)$, tiêu điểm $(h \pm c, k)$, tiệm cận $y - k = \pm(b/a)(x-h)$. Hyperbol đứng đổi vai trò x và y, tiệm cận $y - k = \pm(a/b)(x-h)$.
Horizontal hyperbola: $(x-h)^2/a^2 - (y-k)^2/b^2 = 1$, $c^2 = a^2 + b^2$, vertices $(h \pm a, k)$, foci $(h \pm c, k)$, asymptotes $y - k = \pm(b/a)(x-h)$. The vertical hyperbola swaps the roles of x and y, with asymptotes $y - k = \pm(a/b)(x-h)$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Viết phương trình parabol có tiêu điểm (0, 3) và đường chuẩn $y = -3$. Đỉnh nằm giữa tiêu điểm và đường chuẩn nên là (0, 0), và $p = 3$. Dạng đứng cho $x^2 = 12y$. Kiểm tra bằng định nghĩa: điểm (x, y) cách đều hai bên nghĩa là $x^2 + (y-3)^2 = (y+3)^2$. Khai triển, các số hạng y^2 và 9 triệt tiêu, còn $x^2 = 12y$. Khớp.
Write the parabola with focus (0, 3) and directrix $y = -3$. The vertex sits halfway between focus and directrix, so it is (0, 0), and $p = 3$. The vertical form gives $x^2 = 12y$. Check with the definition: a point (x, y) is equally far from both when $x^2 + (y-3)^2 = (y+3)^2$. Expand, the y^2 and 9 terms cancel, leaving $x^2 = 12y$. It matches.

Đưa phương trình bậc hai về dạng chính tắc – *Reducing a quadratic equation to standard form*

Phương trình dạng $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (không có số hạng xy). Nhìn hệ số A và C để đoán loại đường trước khi biến đổi.
Take an equation $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (no xy term). Compare A and C to guess the curve before you rearrange.

Hệ số của x^2 và y^2 *Coefficients of x^2 and y^2*	**Đường conic** *Conic*
Chỉ một trong hai bình phương xuất hiện (A hoặc C bằng 0) *Only one of the two squares appears (A or C is 0)*	Parabol *Parabola*
Cùng dấu và khác nhau *Same sign, different values*	Elip *Ellipse*
Cùng dấu và bằng nhau *Same sign, equal values*	Đường tròn *Circle*
Trái dấu *Opposite signs*	Hyperbol *Hyperbola*

1. Chuyển số hạng tự do sang vế phải, gom các số hạng x và các số hạng y riêng.
   Move the constant to the right side and group the x terms and the y terms separately.
2. Đặt hệ số của x^2 (và của y^2) ra ngoài ngoặc trong nhóm tương ứng.
   Factor the coefficient of x^2 (and of y^2) out of its group.
3. Hoàn thành bình phương: thêm (nửa hệ số bậc nhất)^2 vào trong ngoặc, và cộng vào vế phải số tương ứng (nhớ nhân với hệ số đã đặt ngoài).
   Complete the square: add (half the linear coefficient)^2 inside the bracket, and add the matching amount (times the factored-out coefficient) to the right side.

4. Chia hai vế để vế phải bằng 1 (elip, hyperbol) hoặc đưa về dạng $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ (parabol).
Divide both sides to make the right side 1 (ellipse, hyperbola), or rewrite as $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ for a parabola.

5. Đọc h, k, a, b hoặc p, rồi tính c và các yếu tố cần tìm.
Read off h, k, a, b or p, then compute c and whatever else you need.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tìm tâm, đỉnh, tiêu điểm, tiệm cận của $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$. Hai bình phương trái dấu nên đây là hyperbol. Gom nhóm: $9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) = 43$. Hoàn thành bình phương: $9(x-1)^2 - 9 - 4(y+2)^2 + 16 = 43$, suy ra $9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 36$. Chia 36: $(x-1)^2/4 - (y+2)^2/9 = 1$. Vậy tâm $(1, -2)$, $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{(4+9)} = \sqrt{13}$. Đỉnh $(-1, -2)$ và $(3, -2)$. Tiêu điểm $(1 \pm \sqrt{13}, -2)$. Tiệm cận $y + 2 = \pm(3/2)(x-1)$. Tâm sai $e = \sqrt{13}/2 \approx 1{,}80$.
Find the center, vertices, foci and asymptotes of $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$. The squares have opposite signs, so it is a hyperbola. Group: $9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) = 43$. Complete the squares: $9(x-1)^2 - 9 - 4(y+2)^2 + 16 = 43$, so $9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 36$. Divide by 36: $(x-1)^2/4 - (y+2)^2/9 = 1$. Center $(1, -2)$, $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{(4+9)} = \sqrt{13}$. Vertices $(-1, -2)$ and $(3, -2)$. Foci $(1 \pm \sqrt{13}, -2)$. Asymptotes $y + 2 = \pm(3/2)(x-1)$. Eccentricity $e = \sqrt{13}/2 \approx 1.80$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Parabol $x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$. Chỉ x^2 xuất hiện. Viết $x^2 - 6x = 8y - 25$, cộng 9 hai vế: $(x-3)^2 = 8y - 16 = 8(y-2)$. Vậy $4p = 8$, $p = 2$, đỉnh $(3, 2)$, tiêu điểm $(3, 4)$, đường chuẩn $y = 0$.
Parabola $x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$. Only x^2 appears. Write $x^2 - 6x = 8y - 25$ and add 9 to both sides: $(x-3)^2 = 8y - 16 = 8(y-2)$. So $4p = 8$, $p = 2$, vertex $(3, 2)$, focus $(3, 4)$, directrix $y = 0$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Elip $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$. Hai bình phương cùng dấu, hệ số khác nhau nên đây là elip. Gom nhóm: $4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) = 11$. Thêm 4 trong nhóm x (vế phải cộng $4 \cdot 4 = 16$) và thêm 1 trong nhóm y (vế phải cộng $9 \cdot 1 = 9$): $4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 11 + 16 + 9 = 36$. Chia 36: $(x-2)^2/9 + (y+1)^2/4 = 1$. Mẫu lớn nằm dưới x nên elip ngang, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{(9-4)} = \sqrt{5}$. Tâm $(2, -1)$, đỉnh $(-1, -1)$ và $(5, -1)$, tiêu điểm $(2 \pm \sqrt{5}, -1)$. Tâm sai $e = \sqrt{5}/3 \approx 0{,}75$, nhỏ hơn 1 đúng như elip.
Ellipse $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$. The squares have the same sign and different coefficients, so it is an ellipse. Group: $4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) = 11$. Add 4 in the x group (the right side gains $4 \cdot 4 = 16$) and 1 in the y group (the right side gains $9 \cdot 1 = 9$): $4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 11 + 16 + 9 = 36$. Divide by 36: $(x-2)^2/9 + (y+1)^2/4 = 1$. The larger denominator is under x, so the ellipse is horizontal, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{(9-4)} = \sqrt{5}$. Center $(2, -1)$, vertices $(-1, -1)$ and $(5, -1)$, foci $(2 \pm \sqrt{5}, -1)$. Eccentricity $e = \sqrt{5}/3 \approx 0.75$, below 1 as an ellipse requires.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên đặt hệ số ra ngoài trước khi hoàn thành bình phương, hoặc quên nhân số vừa thêm với hệ số đó khi cộng sang vế phải (ở ví dụ trên là 9 và −4 chứ không phải 1).
Forgetting to factor out the coefficient before completing the square, or forgetting to multiply the added number by that coefficient on the right side (above it was 9 and −4, not 1).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đọc sai dấu tâm: $(y+2)^2$ nghĩa là $k = -2$. Dùng nhầm $c^2 = a^2 - b^2$ cho hyperbol, hoặc nhầm $c^2 = a^2 + b^2$ cho elip. Ở elip, a^2 luôn là mẫu lớn hơn.
Misreading the sign of the center: $(y+2)^2$ means $k = -2$. Using $c^2 = a^2 - b^2$ for a hyperbola, or $c^2 = a^2 + b^2$ for an ellipse. In an ellipse, a^2 is always the larger denominator.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Cách trên chỉ dùng khi không có số hạng xy. Nếu phương trình có xy thì đường conic bị xoay, bạn phải xoay trục trước. Ngoài ra, nếu sau khi chia mà vế phải âm hoặc bằng 0 với elip thì không có đường nào, hoặc chỉ còn một điểm.
This method works only when there is no xy term. If xy appears, the conic is tilted and you must rotate the axes first. Also, if the right side of an ellipse comes out negative or zero after dividing, there is no curve, or just a single point.

MẸO / TIP – Kiểm tra nhanh: với elip e < 1, hyperbol e > 1, parabol có 4p chứ không phải p ở vế phải. Nếu kết quả trái các điều này thì rà lại phép tính.
Quick check: an ellipse must give e < 1, a hyperbola e > 1, and a parabola has 4p, not p, on the right side. If your result contradicts these, recheck the algebra.

1.8. Tâm sai, conic dạng cực và phép xoay trục – *1.8. Eccentricity, Polar Form of Conics and Rotation of Axes*

Tâm sai e là một con số cho biết conic "cong" đến mức nào. Lấy một điểm F (tiêu điểm) và một đường thẳng d (đường chuẩn). Xét các điểm M sao cho khoảng cách MF chia cho khoảng cách từ M đến d luôn bằng một hằng số. Hằng số đó là e, và nó quyết định đường vẽ ra là loại conic nào.
The eccentricity e is a single number that tells you how curved a conic is. Take a point F (the focus) and a line d (the directrix). Collect all points M for which the distance MF divided by the distance from M to d is always the same constant. That constant is e, and it decides which conic you get.

Giá trị e *Value of e*	**Loại conic** *Conic type*	**Cách tính e** *How to find e*
e nhỏ hơn 1 *e < 1*	Elip (e càng gần 0 thì càng giống đường tròn) *Ellipse (the closer e is to 0, the rounder it looks)*	e = c/a với $c^2 = a^2 - b^2$ *e = c/a with $c^2 = a^2 - b^2$*
e bằng 1 *e = 1*	Parabol *Parabola*	Luôn bằng 1, không cần tính *Always 1, nothing to compute*
e lớn hơn 1 *e > 1*	Hyperbol *Hyperbola*	e = c/a với $c^2 = a^2 + b^2$ *e = c/a with $c^2 = a^2 + b^2$*

VÍ DỤ / EXAMPLE – Elip $x^2/25 + y^2/9 = 1$ có a = 5, b = 3. Tính $c^2 = 25 - 9 = 16$ nên c = 4. Tâm sai e = 4/5 = 0,8 < 1, đúng là elip.
Take the ellipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$ with a = 5 and b = 3. Then $c^2 = 25 - 9 = 16$, so c = 4. The eccentricity is e = 4/5 = 0.8 < 1, which matches an ellipse.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hyperbol $x^2/9 - y^2/16 = 1$ có a = 3, b = 4. Tính $c^2 = 9 + 16 = 25$ nên c = 5. Tâm sai e = 5/3 ≈ 1,67 > 1, đúng là hyperbol. Chú ý: ở hyperbol, c luôn lớn hơn a nên e luôn lớn hơn 1.
Take the hyperbola $x^2/9 - y^2/16 = 1$ with a = 3 and b = 4. Then $c^2 = 9 + 16 = 25$, so c = 5. The eccentricity is e = 5/3 ≈ 1.67 > 1, which matches a hyperbola. Here c is always larger than a, so e always exceeds 1.

Conic dạng cực – *Conics in polar form*

Khi đặt một tiêu điểm tại gốc tọa độ (gọi là cực), phương trình conic trở nên rất gọn. Ở đây p là khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn gần nhất.

When one focus sits at the origin (called the pole), the equation of a conic becomes very short. Here p is the distance from the focus to the nearest directrix.

```
r = e·p / (1 + e·cosθ) hoặc r = e·p / (1 − e·cosθ) hoặc r = e·p / (1 ± e·sinθ)
```

Hàm cos cho trục chính nằm ngang, hàm sin cho trục chính thẳng đứng. Dấu cộng đặt đường chuẩn ở phía dương (x = p hoặc y = p). Dấu trừ đặt nó ở phía âm (x = −p hoặc y = −p).

Cosine gives a horizontal major axis, sine gives a vertical one. A plus sign puts the directrix on the positive side (x = p or y = p). A minus sign puts it on the negative side (x = −p or y = −p).

1. Chia cả tử và mẫu để số hạng hằng ở mẫu bằng 1.
   Divide the top and bottom so the constant term in the denominator equals 1.
2. Đọc hệ số của cosθ hoặc sinθ ở mẫu: đó chính là e. Dùng e để chọn loại conic.
   Read the coefficient of cosθ or sinθ in the denominator: that is e. Use it to pick the conic type.
3. Lấy tử số chia cho e để được p, rồi suy ra đường chuẩn từ hàm (cos hay sin) và dấu.
   Divide the numerator by e to get p, then find the directrix from the function (cos or sin) and the sign.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Nhận dạng r = 12/(3 − 6 sinθ). Chia tử và mẫu cho 3 ta được r = 4/(1 − 2 sinθ). Vậy e = 2 > 1, đây là hyperbol. Tử số e·p = 4 nên p = 2. Hàm sin cho trục đứng, dấu trừ cho đường chuẩn y = −2. Để kiểm tra, thay θ = 3π/2 thì r = 4/3, ta có đỉnh (0; −4/3). Thay θ = π/2 thì r = −4, ta có đỉnh (0; −4). Với đỉnh (0; −4/3): khoảng cách đến tiêu điểm là 4/3, đến đường chuẩn là 2/3, tỉ số 2 khớp với e.

Identify r = 12/(3 − 6 sinθ). Divide top and bottom by 3 to get r = 4/(1 − 2 sinθ). So e = 2 > 1 and the curve is a hyperbola. The numerator e·p = 4 gives p = 2. Sine means a vertical axis, and the minus sign gives the directrix y = −2. To check, put θ = 3π/2: r = 4/3, so a vertex is (0, −4/3). Put θ = π/2: r = −4, so another vertex is (0, −4). For (0, −4/3): the distance to the focus is 4/3, to the directrix 2/3, and the ratio 2 matches e.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Nhận dạng r = 6/(2 + cosθ). Chia tử và mẫu cho 2 ta được r = 3/(1 + 0,5 cosθ). Vậy e = 0,5 < 1, đây là elip. Tử số e·p = 3 nên p = 6. Hàm cos cho trục ngang, dấu cộng cho đường chuẩn x = 6. Thay θ = 0 thì r = 2, ta có đỉnh (2; 0). Thay θ = π thì r = 6, ta có đỉnh (−6; 0). Hai đỉnh cách nhau 8 nên a = 4, tâm ở (−2; 0) nên c = 2. Tỉ số c/a = 0,5 khớp với e.

Identify r = 6/(2 + cosθ). Divide top and bottom by 2 to get r = 3/(1 + 0.5 cosθ). So e = 0.5 < 1 and the curve is an ellipse. The numerator e·p = 3 gives p = 6. Cosine means a horizontal axis, and the plus sign gives the directrix x = 6. Put θ = 0: r = 2, so a vertex is (2, 0). Put θ = π: r = 6, so the other vertex is (−6, 0). The vertices are 8 apart, so a = 4, and the center is (−2, 0), so c = 2. The ratio c/a = 0.5 matches e.

Biệt thức và phép xoay trục – *The discriminant and rotation of axes*

Phương trình bậc hai tổng quát có dạng $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Số hạng xy ($B \neq 0$) báo rằng trục của conic bị nghiêng so với trục tọa độ. Muốn biết loại conic, bạn chưa cần xoay: chỉ cần tính biệt thức $B^2 - 4AC$.

The general quadratic equation is $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. A xy term ($B \neq 0$) means the conic's axes are tilted relative to the coordinate axes. To find the type you do not need to rotate yet: just compute the discriminant $B^2 - 4AC$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $B^2 - 4AC < 0$: elip (kể cả đường tròn). $B^2 - 4AC = 0$: parabol. $B^2 - 4AC > 0$: hyperbol. Quy tắc này áp dụng cho đồ thị không suy biến.
$B^2 - 4AC < 0$: ellipse (circles included). $B^2 - 4AC = 0$: parabola. $B^2 - 4AC > 0$: hyperbola. The rule applies to non-degenerate graphs.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Phân loại $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x + y = 0$. Ở đây $A = 1$, $B = 4$, $C = 4$. Biệt thức là $16 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, nên đây là parabol. Với $xy = 1$ thì $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, biệt thức là $1 > 0$, nên đây là hyperbol.
Classify $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x + y = 0$. Here $A = 1$, $B = 4$, $C = 4$. The discriminant is $16 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, so this is a parabola. For $xy = 1$ we have $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, and the discriminant is $1 > 0$, so this is a hyperbola.

Để khử số hạng xy, bạn quay hệ trục một góc θ. Công thức đổi tọa độ cũ sang mới như sau:

To remove the xy term, you rotate the axes by an angle θ. The formulas that convert old coordinates to new ones are:

```
cot 2θ = (A − C)/B,  x = x'cosθ − y'sinθ,  y = x'sinθ + y'cosθ
A' = A·cos²θ + B·sinθ·cosθ + C·sin²θ,  C' = A·sin²θ − B·sinθ·cosθ + C·cos²θ
D' = D·cosθ + E·sinθ,  E' = −D·sinθ + E·cosθ,  F' = F
```

1. Tính $B^2 - 4AC$ để biết loại conic.
   Compute $B^2 - 4AC$ to learn the conic type.
2. Tìm góc xoay θ từ $\cot 2\theta = (A - C)/B$. Nếu $A = C$ thì $\cot 2\theta = 0$, nên $\theta = 45°$.
   Find the rotation angle θ from $\cot 2\theta = (A - C)/B$. If $A = C$ then $\cot 2\theta = 0$, so $\theta = 45°$.
3. Tính các hệ số mới A', C', D', E' bằng công thức trên.
   Compute the new coefficients A', C', D', E' with the formulas above.
4. Viết phương trình theo x', y', rồi đưa về dạng chính tắc.
   Write the equation in x', y' and bring it to standard form.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xoay trục cho $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$. Ở đây $A = 3$, $B = 2$, $C = 3$. Biệt thức là $4 - 36 = -32 < 0$, nên đây là elip. Vì $A = C$ nên $\theta = 45°$, với $\cos\theta = \sin\theta = \sqrt{2}/2$ và $\sin\theta \cdot \cos\theta = 1/2$. Tính $A' = 3/2 + 1 + 3/2 = 4$ và $C' = 3/2 - 1 + 3/2 = 2$. Phương trình mới là $4x'^2 + 2y'^2 = 8$, tức $x'^2/2 + y'^2/4 = 1$. Đó là elip có bán trục $\sqrt{2}$ theo x' và 2 theo y'. Kiểm tra: điểm $x' = 0$, $y' = 2$ ứng với $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, thay vào được $6 - 4 + 6 = 8$, đúng.
Rotate the axes for $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$. Here $A = 3$, $B = 2$, $C = 3$. The discriminant is $4 - 36 = -32 < 0$, so this is an ellipse. Since $A = C$, $\theta = 45°$, with $\cos\theta = \sin\theta = \sqrt{2}/2$ and $\sin\theta \cdot \cos\theta = 1/2$. Then $A' = 3/2 + 1 + 3/2 = 4$ and $C' = 3/2 - 1 + 3/2 = 2$. The new equation is $4x'^2 + 2y'^2 = 8$, that is

$x'^2/2 + y'^2/4 = 1$. This is an ellipse with semi-axis $\sqrt{2}$ along x' and 2 along y'. Check: the point $x' = 0$, $y' = 2$ maps to $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, and $6 - 4 + 6 = 8$, which holds.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên chia để hằng số ở mẫu bằng 1, rồi đọc nhầm e (ví dụ lấy e = 6 thay vì 2 ở ví dụ trên). Lỗi thứ hai là viết nhầm $B^2 - 4AC$ thành $B^2 + 4AC$. Lỗi thứ ba là dừng ở phần bậc hai: nếu phương trình có Dx + Ey thì cũng phải đổi hai số hạng này sang x', y' bằng D', E'. Lỗi thứ tư là đọc dấu của mẫu sai: $1 - e\cdot\sin\theta$ cho đường chuẩn $y = -p$, không phải $y = p$.
Forgetting to make the constant in the denominator 1, then misreading e (for example taking e = 6 instead of 2 in the example above). A second slip is writing $B^2 + 4AC$ instead of $B^2 - 4AC$. A third is stopping at the quadratic part: if the equation has Dx + Ey, those two terms must also be converted to x', y' using D' and E'. A fourth is misreading the sign in the denominator: $1 - e\cdot\sin\theta$ gives the directrix $y = -p$, not $y = p$.

1.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *1.9. Applied exercises with solutions*

Bài 1. Tiếp tuyến và độ lõm của đường cong tham số – *Exercise 1. Tangent line and concavity of a parametric curve*

Đường cong có $x = t^2 + 1$ và $y = t^3 - 3t$. Hãy viết phương trình tiếp tuyến tại t = 2 và cho biết tại đó đường cong lõm lên hay lõm xuống.
A curve is given by $x = t^2 + 1$ and $y = t^3 - 3t$. Write the equation of the tangent line at $t = 2$ and decide whether the curve is concave up or concave down there.

1. Thay t = 2 để tìm điểm tiếp xúc: $x = 4 + 1 = 5$ và $y = 8 - 6 = 2$, vậy điểm là (5, 2).
   Substitute $t = 2$ to find the point of tangency: $x = 4 + 1 = 5$ and $y = 8 - 6 = 2$, so the point is (5, 2).
2. Tính đạo hàm theo t: $dx/dt = 2t = 4$ và $dy/dt = 3t^2 - 3 = 9$. Vì dx/dt khác 0 nên chia được.
   Differentiate with respect to t: $dx/dt = 2t = 4$ and $dy/dt = 3t^2 - 3 = 9$. Since dx/dt is not zero, we can divide.
3. Hệ số góc $dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt) = 9/4$. Tiếp tuyến: $y - 2 = (9/4)(x - 5)$, tức $y = 9x/4 - 37/4$.
   The slope is $dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt) = 9/4$. The tangent line is $y - 2 = (9/4)(x - 5)$, that is $y = 9x/4 - 37/4$.
4. Với độ lõm, viết $dy/dx = (3t^2 - 3)/(2t) = 3t/2 - 3/(2t)$. Đạo hàm theo t được $3/2 + 3/(2t^2)$, tại t = 2 bằng $3/2 + 3/8 = 15/8$.
   For concavity, write $dy/dx = (3t^2 - 3)/(2t) = 3t/2 - 3/(2t)$. Its derivative in t is $3/2 + 3/(2t^2)$, which equals $3/2 + 3/8 = 15/8$ at $t = 2$.
5. Chia cho $dx/dt = 4$: $d^2y/dx^2 = (15/8)/4 = 15/32 > 0$. Kết quả: tiếp tuyến $y = 9x/4 - 37/4$ và đường cong lõm lên tại t = 2.
   Divide by $dx/dt = 4$: $d^2y/dx^2 = (15/8)/4 = 15/32 > 0$. Result: the tangent line is $y = 9x/4 - 37/4$ and the curve is concave up at $t = 2$.

Bài 2. Diện tích và độ dài của đường cardioid – *Exercise 2. Area and length of a cardioid*

Cho đường cardioid $r = 2 + 2\cos\theta$ với $0 \le \theta \le 2\pi$. Tính diện tích miền bên trong và chu vi của đường cong.

Consider the cardioid $r = 2 + 2\cos\theta$ for $0 \le \theta \le 2\pi$. Find the area it encloses and the length of the curve.

1. Khi θ chạy từ 0 đến 2π, đường cong quét kín đúng một vòng nên dùng đúng các cận này. Diện tích $A = (1/2)\int$ từ 0 đến 2π của $r^2\,d\theta = 2\int (1 + \cos\theta)^2\,d\theta$.
   As θ runs from 0 to 2π the curve is traced exactly once, so these limits are correct. The area is $A = (1/2)\int$ from 0 to 2π of $r^2\,d\theta = 2\int (1 + \cos\theta)^2\,d\theta$.
2. Khai triển $(1 + \cos\theta)^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ và dùng $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$, được biểu thức $3/2 + 2\cos\theta + (1/2)\cos 2\theta$.
   Expand $(1 + \cos\theta)^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ and use $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ to get $3/2 + 2\cos\theta + (1/2)\cos 2\theta$.
3. Trên một chu kỳ đầy đủ, các số hạng $\cos\theta$ và $\cos 2\theta$ tích phân bằng 0, còn 3/2 cho $(3/2)(2\pi) = 3\pi$. Vậy $A = 2 \cdot 3\pi = 6\pi \approx 18{,}85$.
   Over a full period the $\cos\theta$ and $\cos 2\theta$ terms integrate to 0, and 3/2 gives $(3/2)(2\pi) = 3\pi$. So $A = 2 \cdot 3\pi = 6\pi \approx 18.85$.
4. Với độ dài cung, $r' = -2\sin\theta$ nên $r^2 + r'^2 = 4(1 + \cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta = 8 + 8\cos\theta = 16\cos^2(\theta/2)$. Căn bậc hai là $4|\cos(\theta/2)|$.
   For arc length, $r' = -2\sin\theta$, so $r^2 + r'^2 = 4(1 + \cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta = 8 + 8\cos\theta = 16\cos^2(\theta/2)$. The square root is $4|\cos(\theta/2)|$.
5. Do đối xứng, $L = 2\int$ từ 0 đến π của $4\cos(\theta/2)\,d\theta = 8 \cdot [2\sin(\theta/2)]$ từ 0 đến $\pi = 16$. Kết quả: diện tích 6π và chu vi 16.
   By symmetry, $L = 2\int$ from 0 to π of $4\cos(\theta/2)\,d\theta = 8 \cdot [2\sin(\theta/2)]$ from 0 to $\pi = 16$. Result: the area is 6π and the length is 16.

Bài 3. Elip: tiêu điểm, tâm sai và phương trình cực – *Exercise 3. Ellipse: foci, eccentricity and polar equation*

Cho elip $9x^2 + 25y^2 = 225$. Đưa về dạng chính tắc, tìm tiêu điểm, tâm sai, đường chuẩn, rồi viết phương trình cực khi lấy tiêu điểm (4, 0) làm gốc cực.

Given the ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, put it in standard form, find the foci, eccentricity and directrices, then write its polar equation with the focus (4, 0) as the pole.

1. Chia hai vế cho 225: $x^2/25 + y^2/9 = 1$. Mẫu của x^2 lớn hơn nên trục lớn nằm ngang, $a^2 = 25$ và $b^2 = 9$, tức $a = 5$, $b = 3$.
   Divide both sides by 225: $x^2/25 + y^2/9 = 1$. The denominator under x^2 is larger, so the major axis is horizontal, with $a^2 = 25$ and $b^2 = 9$, that is $a = 5$ and $b = 3$.
2. Tính $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$ nên $c = 4$. Tiêu điểm là (4, 0) và (−4, 0).
   Compute $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, so $c = 4$. The foci are (4, 0) and (−4, 0).
3. Tâm sai $e = c/a = 4/5$, nhỏ hơn 1 nên đúng là elip. Đường chuẩn $x = \pm a/e = \pm 25/4$.
   The eccentricity is $e = c/a = 4/5$, which is less than 1, consistent with an ellipse. The directrices are $x = \pm a/e = \pm 25/4$.

4. Lấy tiêu điểm (4, 0) làm cực thì đường chuẩn tương ứng x = 25/4 nằm bên phải, cách cực d = 25/4 − 4 = 9/4. Do đó e·d = (4/5)(9/4) = 9/5.
With the focus (4, 0) as the pole, the matching directrix x = 25/4 lies to the right, at distance d = 25/4 − 4 = 9/4. Hence e·d = (4/5)(9/4) = 9/5.

5. Phương trình cực r = ed/(1 + e·cosθ) = (9/5)/(1 + (4/5)cosθ) = 9/(5 + 4cosθ).
The polar equation is r = ed/(1 + e·cosθ) = (9/5)/(1 + (4/5)cosθ) = 9/(5 + 4cosθ).

6. Kiểm tra: θ = 0 cho r = 1, điểm cách tiêu điểm 1 về bên phải, tức (5, 0). θ = π cho r = 9, điểm có x = 4 − 9 = −5. Cả hai đều là đỉnh của elip. Kết quả: r = 9/(5 + 4cosθ).
Check: θ = 0 gives r = 1, a point 1 unit right of the focus, namely (5, 0). θ = π gives r = 9, a point with x = 4 − 9 = −5. Both are vertices of the ellipse. Result: r = 9/(5 + 4cosθ).

1.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *1.10. Essay questions and answer outlines*

Câu 1. Khi khử tham số, vì sao phải để ý miền của tham số t và làm sao biết đường cong được vẽ theo chiều nào?

Question 1. *When eliminating a parameter, why must you watch the range of t, and how do you tell which way the curve is traced?*

- Cách khử: rút t từ một phương trình rồi thế vào phương trình kia, hoặc dùng đẳng thức như cos²t + sin²t = 1. Ví dụ x = 2t, y = t² − 1 cho y = x²/4 − 1.
  Method: solve one equation for t and substitute into the other, or use an identity such as cos²t + sin²t = 1. For example x = 2t, y = t² − 1 gives y = x²/4 − 1.
- Phương trình sau khử có thể chứa nhiều điểm hơn đường cong gốc. Ví dụ x = √t, y = t − 1 với t ≥ 0 chỉ cho nhánh x ≥ 0 của y = x² − 1.
  The equation left after elimination can contain more points than the original curve. For example x = √t, y = t − 1 with t ≥ 0 gives only the branch x ≥ 0 of y = x² − 1.
- Chiều vẽ: lập bảng vài giá trị t tăng dần, tính từng điểm (x, y), nối theo thứ tự đó và đặt mũi tên theo chiều t tăng.
  Direction: tabulate several increasing values of t, compute each point (x, y), join them in that order and draw arrows in the direction of increasing t.
- Một đường có thể có nhiều cách tham số hóa, khác nhau về chiều đi và số lần quét, nên đề thường cho kèm khoảng của t.
  One curve can have several parametrizations that differ in direction and number of passes, which is why problems usually state the interval for t.

Câu 2. Nêu cách đổi giữa tọa độ cực và tọa độ Descartes, và những chỗ dễ sai khi tìm góc θ.

Question 2. *Explain how to convert between polar and Cartesian coordinates, and where mistakes usually happen when finding the angle θ.*

- Từ cực sang Descartes: x = r·cosθ, y = r·sinθ. Ví dụ (4, 2π/3) cho x = −2 và y = 2√3.
  Polar to Cartesian: x = r·cosθ, y = r·sinθ. For example (4, 2π/3) gives x = −2 and y = 2√3.
- Từ Descartes sang cực: r² = x² + y² và tanθ = y/x. Hàm tan chỉ cho góc trong nửa vòng nên phải xét điểm nằm ở góc phần tư nào.

Cartesian to polar: $r^2 = x^2 + y^2$ and $\tan\theta = y/x$. The tangent only gives an angle within a half turn, so check which quadrant the point lies in.

- Ví dụ điểm $(-1, 1)$: $\tan\theta = -1$ nhưng với $r = \sqrt{2} > 0$ thì $\theta = 3\pi/4$, không phải $-\pi/4$.
  For the point $(-1, 1)$, $\tan\theta = -1$, but with $r = \sqrt{2} > 0$ the angle is $3\pi/4$, not $-\pi/4$.
- Một điểm có nhiều cặp tọa độ cực, chẳng hạn (r, θ), $(r, \theta + 2\pi)$ và $(-r, \theta + \pi)$, nên so sánh hai đường cong cực cần cẩn thận.
  A point has many polar pairs, such as (r, θ), $(r, \theta + 2\pi)$ and $(-r, \theta + \pi)$, so be careful when comparing two polar curves.

Câu 3. Làm sao nhận dạng đường cardioid và đường hoa hồng, và chọn cận tích phân thế nào khi tính diện tích cực?

Question 3. *How do you recognize a cardioid and a rose curve, and how do you choose the limits when computing a polar area?*

- Cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$ đối xứng qua trục ngang, có điểm nhọn tại gốc và quét kín khi θ từ 0 đến 2π.
  The cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$ is symmetric about the horizontal axis, has a cusp at the origin and closes up as θ goes from 0 to 2π.
- Hoa hồng $r = a\cdot\cos(n\theta)$ hoặc $a\cdot\sin(n\theta)$: n lẻ có n cánh, n chẵn có 2n cánh. Ví dụ $r = 3\sin2\theta$ có 4 cánh.
  The rose $r = a\cdot\cos(n\theta)$ or $a\cdot\sin(n\theta)$ has n petals when n is odd and 2n petals when n is even. For example $r = 3\sin2\theta$ has 4 petals.
- Diện tích $A = (1/2)\int r^2\, d\theta$. Cận phải là khoảng góc để đường cong quét miền đúng một lần, nếu lấy dư sẽ bị tính hai lần.
  The area is $A = (1/2)\int r^2\, d\theta$. The limits must cover an interval where the curve sweeps the region exactly once, otherwise part of it is counted twice.
- Một cánh hoa hồng nằm giữa hai giá trị θ liên tiếp làm $r = 0$. Dùng tính đối xứng để tính một phần rồi nhân lên cho gọn.
  One petal of a rose lies between two consecutive values of θ where $r = 0$. Use symmetry to compute one part and multiply.

Câu 4. Tâm sai giúp phân loại conic ra sao, và làm thế nào nhận dạng conic có số hạng xy bằng $B^2 - 4AC$ và phép xoay trục?

Question 4. *How does eccentricity classify conics, and how do you recognize a conic with an xy term using $B^2 - 4AC$ and rotation of axes?*

- Tâm sai $e = 1$ là parabol, $e < 1$ là elip, $e > 1$ là hyperbol. Với elip và hyperbol, $e = c/a$.
  Eccentricity $e = 1$ gives a parabola, $e < 1$ an ellipse and $e > 1$ a hyperbola. For ellipses and hyperbolas, $e = c/a$.
- Conic có tiêu điểm tại gốc cực viết được dạng $r = ed/(1 \pm e\cdot\cos\theta)$ hoặc $r = ed/(1 \pm e\cdot\sin\theta)$. Đưa mẫu về dạng $1 \pm e\cdot\cos\theta$ để đọc e.
  A conic with a focus at the pole can be written as $r = ed/(1 \pm e\cdot\cos\theta)$ or $r = ed/(1 \pm e\cdot\sin\theta)$. Rewrite the denominator as $1 \pm e\cdot\cos\theta$ to read off e.
- Với $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, tính $B^2 - 4AC$: âm là elip (hoặc đường tròn), bằng 0 là parabol, dương là hyperbol. Các trường hợp suy biến như hai đường thẳng

không xét ở đây.
For $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, compute $B^2 - 4AC$: negative means an ellipse (or circle), zero a parabola, positive a hyperbola. Degenerate cases such as a pair of lines are not considered here.

- Để bỏ số hạng xy, xoay trục một góc φ thỏa $\cot 2\varphi = (A - C)/B$, rồi viết lại phương trình theo hệ trục mới.
To remove the xy term, rotate the axes by an angle φ with $\cot 2\varphi = (A - C)/B$, then rewrite the equation in the new coordinates.

1.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *1.11. Multiple-choice questions*

1. Khử tham số của đường cong $x = 2t$, $y = t^2 - 1$ được phương trình nào?
Eliminating the parameter from $x = 2t$, $y = t^2 - 1$ gives which equation?

A. $y = 2x^2 - 1$
B. $y = x^2 - 1$
C. $y = x^2/4 - 1$
D. $y = x^2/2 - 1$

2. Điểm có tọa độ cực $(4, 2\pi/3)$ có tọa độ Descartes là gì?
What are the Cartesian coordinates of the point with polar coordinates $(4, 2\pi/3)$?

A. $(-2\sqrt{3}, 2)$
B. $(-2, 2\sqrt{3})$
C. $(2\sqrt{3}, -2)$
D. $(2, 2\sqrt{3})$

3. Đường cong $x = t^2$, $y = t^3$ có hệ số góc tiếp tuyến tại $t = 1$ bằng bao nhiêu?
What is the slope of the tangent to $x = t^2$, $y = t^3$ at $t = 1$?

A. 2/3
B. 3
C. 3/2
D. 1

4. Đường cong cực $r = 3\sin 2\theta$ có bao nhiêu cánh?
How many petals does the polar curve $r = 3\sin 2\theta$ have?

A. 4 cánh / *4 petals*
B. 2 cánh / *2 petals*
C. 8 cánh / *8 petals*
D. 3 cánh / *3 petals*

5. Hyperbol $x^2/9 - y^2/16 = 1$ có tiêu điểm tại đâu?
Where are the foci of the hyperbola $x^2/9 - y^2/16 = 1$?

A. $(\pm\sqrt{7}, 0)$
B. $(\pm 4, 0)$
C. $(0, \pm 5)$
D. $(\pm 5, 0)$

6. Parabol $x^2 = 12y$ có tiêu điểm tại đâu?
Where is the focus of the parabola $x^2 = 12y$?

A. $(0, 3)$
B. $(0, 6)$
C. $(0, 12)$
D. $(3, 0)$

7. Conic $r = 6/(2 + \cos\theta)$ là đường nào?
Which conic is $r = 6/(2 + \cos\theta)$?

A. Đường thẳng / *Straight line*
B. Hyperbol / *Hyperbola*
C. Parabol / *Parabola*
D. Elip / *Ellipse*

8. Diện tích miền giới hạn bởi đường cong $r = 2$ với $0 \le \theta \le \pi$ là bao nhiêu?
What is the area of the region bounded by $r = 2$ for $0 \le \theta \le \pi$?

A. 8π
B. 2π
C. π
D. 4π

Chương 2. Vectơ, đường thẳng và mặt trong không gian – *Chapter 2. Vectors, Lines and Surfaces in Space*

Mục tiêu chương – *Chapter objectives*

- Tính tích vô hướng và tích có hướng của hai vectơ, rồi dùng chúng để tìm góc, hình chiếu, diện tích và thể tích
  Compute the dot and cross products of two vectors and use them to find angles, projections, areas and volumes
- Lập phương trình đường thẳng và mặt phẳng, rồi tính giao điểm, góc và khoảng cách
  Write equations of lines and planes, then find intersections, angles and distances
- Nhận dạng mặt cầu, mặt trụ và mặt bậc hai, đồng thời đổi tọa độ một điểm giữa hệ vuông góc, hệ trụ và hệ cầu
  Identify spheres, cylinders and quadric surfaces, and convert a point's coordinates among rectangular, cylindrical and spherical systems

2.1. Vectơ trong mặt phẳng và các phép toán cơ bản – *2.1. Vectors in the Plane and Basic Operations*

Có những đại lượng chỉ cần một con số là đủ, như nhiệt độ 30 độ hay khối lượng 5 kg. Có những đại lượng phải nói thêm hướng, như lực kéo một chiếc thùng: kéo mạnh 20 N về phía đông khác hẳn kéo 20 N về phía bắc. Đại lượng có độ lớn và hướng gọi là vectơ. Đại lượng chỉ có độ lớn gọi là số vô hướng, hay đơn giản là "số".

Some quantities need only one number, such as a temperature of 30 degrees or a mass of 5 kg. Others also need a direction. Pulling a crate with 20 N of force to the east is not the same as pulling it with 20 N to the north. A quantity with both size and direction is a vector. A quantity with size only is called a scalar, which is just an ordinary number.

Vận tốc cũng là vectơ. Máy bay bay 200 km/h về phía đông, gió thổi 30 km/h về phía bắc. Máy bay thực tế không đi thẳng về đông mà bị lệch một chút. Hướng và tốc độ thật của nó là tổng của hai vectơ vận tốc.

Velocity is a vector too. Suppose a plane flies 200 km/h east while the wind blows 30 km/h north. The plane does not travel straight east but drifts a little. Its real direction and speed come from adding the two velocity vectors.

Dạng thành phần – *Component form*

Đặt vectơ trên mặt phẳng tọa độ, cho điểm đầu trùng gốc O. Điểm cuối có tọa độ (a, b). Khi đó ta viết v = ⟨a, b⟩. Số a là thành phần ngang (đi sang phải bao nhiêu), số b là thành phần đứng (đi lên bao nhiêu). Hai vectơ cùng độ lớn và cùng hướng là bằng nhau, dù đặt ở đâu.

Place the vector in the coordinate plane with its initial point at the origin O. If the terminal point is (a, b), write v = ⟨a, b⟩. The number a is the horizontal component (how far right) and b is the vertical component (how far up). Two vectors with the same size and direction are equal, wherever you draw them.

Nếu vectơ đi từ điểm A(x_1, y_1) đến điểm B(x_2, y_2) thì thành phần của nó là "điểm cuối trừ điểm đầu".

If a vector runs from point A(x_1, y_1) to point B(x_2, y_2), its components are "end point minus start point".

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1,\ y_2 - y_1 \rangle$$

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho A(2, −1) và B(−3, 4). Thành phần ngang: −3 − 2 = −5. Thành phần đứng: 4 − (−1) = 5. Vậy $\overrightarrow{AB} = \langle -5, 5 \rangle$: đi sang trái 5 đơn vị và lên 5 đơn vị.
Let A(2, −1) and B(−3, 4). Horizontal component: −3 − 2 = −5. Vertical component: 4 − (−1) = 5. So $\overrightarrow{AB} = \langle -5, 5 \rangle$: five units left and five units up.

Muốn viết vectơ từ độ lớn r và góc α so với trục Ox dương, dùng lượng giác: $v = \langle r\cos\alpha,\ r\sin\alpha \rangle$.

To build a vector from its magnitude r and its angle α with the positive x-axis, use trigonometry: $v = \langle r\cos\alpha,\ r\sin\alpha \rangle$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Vectơ dài 4, hợp với trục Ox góc 60°: thành phần ngang là $4\cdot\cos 60° = 4\cdot 0{,}5 = 2$. Thành phần đứng là $4\cdot\sin 60° = 4\cdot(\sqrt{3}/2) = 2\sqrt{3}$. Vậy $v = \langle 2, 2\sqrt{3} \rangle$.
A vector of length 4 at 60° to the x-axis has horizontal component $4\cdot\cos 60° = 4\cdot 0.5 = 2$ and vertical component $4\cdot\sin 60° = 4\cdot(\sqrt{3}/2) = 2\sqrt{3}$. So $v = \langle 2, 2\sqrt{3} \rangle$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Vectơ dài 10, góc 150°. Góc này nằm ở góc phần tư thứ hai nên thành phần ngang âm. $\cos 150° = -\sqrt{3}/2$ nên $10\cdot\cos 150° = -5\sqrt{3} \approx -8{,}66$. $\sin 150° = 0{,}5$ nên thành phần đứng là 5. Vậy $v = \langle -5\sqrt{3}, 5 \rangle$. Kiểm tra: 75 + 25 = 100, căn là 10.
A vector of length 10 at 150° lies in the second quadrant, so its horizontal component is negative. $\cos 150° = -\sqrt{3}/2$, so $10\cdot\cos 150° = -5\sqrt{3} \approx -8.66$. $\sin 150° = 0.5$, so the vertical component is 5. Thus $v = \langle -5\sqrt{3}, 5 \rangle$. Check: 75 + 25 = 100, whose root is 10.

Cộng, trừ và nhân với một số – *Addition, subtraction and scalar multiplication*

Với $u = \langle u_1, u_2 \rangle$, $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ và số k, mọi phép tính đều làm riêng từng thành phần. Về hình học, u + v là vectơ nối điểm đầu của u tới điểm cuối của v khi ta đặt v nối đuôi u. Nhân với k thì kéo dài hay co ngắn vectơ k lần. Nếu k âm thì vectơ đảo chiều.

For $u = \langle u_1, u_2 \rangle$, $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ and a number k, every operation works on each component separately. Geometrically, u + v goes from the start of u to the end of v when you place v at the tip of u. Multiplying by k stretches or shrinks the vector by a factor of k. If k is negative, the vector flips direction.

$$u + v = \langle u_1 + v_1,\ u_2 + v_2 \rangle;\quad u - v = \langle u_1 - v_1,\ u_2 - v_2 \rangle;\quad k\cdot u = \langle k\cdot u_1,\ k\cdot u_2 \rangle$$

VÍ DỤ / EXAMPLE – Máy bay ⟨200, 0⟩ cộng gió ⟨0, 30⟩ cho vận tốc thực ⟨200, 30⟩. Tốc độ thực là $\sqrt{(200^2 + 30^2)} = \sqrt{40900} \approx 202{,}2$ km/h, lệch lên phía bắc một chút.
Plane ⟨200, 0⟩ plus wind ⟨0, 30⟩ gives actual velocity ⟨200, 30⟩. Its speed is $\sqrt{(200^2 + 30^2)} = \sqrt{40900} \approx 202.2$ km/h, tilted slightly north.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho a = ⟨2, 5⟩ và b = ⟨−1, 3⟩. Tính 3a − 2b. Có 3a = ⟨6, 15⟩ và 2b = ⟨−2, 6⟩. Lấy hiệu: ⟨6 − (−2), 15 − 6⟩ = ⟨8, 9⟩.

Let a = ⟨2, 5⟩ and b = ⟨−1, 3⟩. Find 3a − 2b. We have 3a = ⟨6, 15⟩ and 2b = ⟨−2, 6⟩. Subtract: ⟨6 − (−2), 15 − 6⟩ = ⟨8, 9⟩.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho v = ⟨3, −2⟩ và k = −2. Khi đó k·v = ⟨−6, 4⟩. Vectơ mới ngược chiều v và dài gấp 2 lần: |v| = √13, còn |k·v| = √(36 + 16) = √52 = 2√13.
Let v = ⟨3, −2⟩ and k = −2. Then k·v = ⟨−6, 4⟩. The new vector points opposite to v and is twice as long: |v| = √13, while |k·v| = √(36 + 16) = √52 = 2√13.

Độ dài và vectơ đơn vị – *Length and unit vectors*

Độ dài (độ lớn) của v = ⟨a, b⟩ là cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông |a| và |b|, nên tính theo định lý Pythagore. Ký hiệu là |v|.
The length (magnitude) of v = ⟨a, b⟩ is the hypotenuse of a right triangle with legs |a| and |b|, so it comes from the Pythagorean theorem. It is written |v|.

```
|v| = √(a² + b²)
```

Vectơ đơn vị là vectơ có độ dài 1. Nó chỉ dùng để "chỉ hướng". Từ vectơ v khác không, chia từng thành phần cho |v| sẽ được vectơ đơn vị cùng hướng với v. Hai vectơ đơn vị chuẩn là i = ⟨1, 0⟩ và j = ⟨0, 1⟩. Mọi vectơ viết được thành v = a·i + b·j.
A unit vector has length 1 and is used purely to point a direction. For any nonzero vector v, dividing each component by |v| gives the unit vector in the same direction. The two standard unit vectors are i = ⟨1, 0⟩ and j = ⟨0, 1⟩. Any vector can be written as v = a·i + b·j.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Viết w = ⟨−5, 12⟩ theo i và j: w = −5i + 12j. Độ dài |w| = √(25 + 144) = 13. Vectơ đơn vị cùng hướng là ⟨−5/13, 12/13⟩ ≈ ⟨−0,385; 0,923⟩. Kiểm tra: 25/169 + 144/169 = 1.
Write w = ⟨−5, 12⟩ with i and j: w = −5i + 12j. Its length is |w| = √(25 + 144) = 13. The unit vector in the same direction is ⟨−5/13, 12/13⟩ ≈ ⟨−0.385, 0.923⟩. Check: 25/169 + 144/169 = 1.

1. Tìm thành phần của vectơ (nếu đề cho hai điểm thì lấy điểm cuối trừ điểm đầu).
   Find the components (if the problem gives two points, take end minus start).
2. Tính |v| = √(a² + b²).
   Compute |v| = √(a² + b²).
3. Chia mỗi thành phần cho |v|. Kết quả là vectơ đơn vị u.
   Divide each component by |v|. The result is the unit vector u.
4. Muốn vectơ cùng hướng nhưng dài L, nhân u với L.
   For a vector of length L in the same direction, multiply u by L.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho A(1, 2), B(7, −6). Tìm vectơ đơn vị cùng hướng AB và vectơ cùng hướng dài 20. Có AB = ⟨6, −8⟩ và |AB| = √(36 + 64) = 10. Vectơ đơn vị là ⟨0,6; −0,8⟩. Vectơ dài 20 là 20·⟨0,6; −0,8⟩ = ⟨12, −16⟩. Kiểm tra: √(144 + 256) = 20.
Let A(1, 2), B(7, −6). Find the unit vector along AB and a vector of length 20 in the same direction. AB = ⟨6, −8⟩ and |AB| = √(36 + 64) = 10. The unit vector is ⟨0.6, −0.8⟩. The vector of length 20 is 20·⟨0.6, −0.8⟩ = ⟨12, −16⟩. Check: √(144 + 256) = 20.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lấy điểm đầu trừ điểm cuối nên ra vectơ ngược chiều. Luôn là cuối trừ đầu.
Subtracting end from start, which gives the opposite vector. It is always end minus start.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết $|\langle 3, 4\rangle| = 3 + 4 = 7$. Phải bình phương, cộng, rồi lấy căn: $\sqrt{(9 + 16)} = 5$.
Writing $|\langle 3, 4\rangle| = 3 + 4 = 7$. You must square, add, then take the root: $\sqrt{(9 + 16)} = 5$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nghĩ rằng $|u + v| = |u| + |v|$. Điều này chỉ đúng khi hai vectơ cùng hướng. Ở ví dụ máy bay, 200 + 30 = 230 nhưng tốc độ thực chỉ khoảng 202,2.
Assuming $|u + v| = |u| + |v|$. That holds only when the vectors point the same way. In the plane example, 200 + 30 = 230, yet the real speed is about 202.2.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Để máy tính ở chế độ radian khi đề cho góc theo độ (hoặc ngược lại). Bấm $\cos 60°$ ra 0,5 mới đúng; nếu ra $-0{,}95$ thì máy đang ở sai chế độ.
Leaving the calculator in radian mode when the angle is given in degrees (or the reverse). $\cos 60°$ must show 0.5; if you see -0.95, the mode is wrong.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bỏ qua dấu của thành phần khi góc lớn hơn 90°. Hãy xác định góc phần tư trước, rồi kiểm tra dấu của cos và sin.
Ignoring the signs of the components when the angle exceeds 90°. Find the quadrant first, then check the signs of cos and sin.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Vectơ = độ lớn + hướng. Thành phần của AB = cuối − đầu. $|v| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Vectơ đơn vị cùng hướng v là v chia cho $|v|$.
A vector = magnitude + direction. Components of AB = end − start. $|v| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. The unit vector along v is v divided by $|v|$.

2.2. Hệ tọa độ ba chiều, khoảng cách và mặt cầu – *2.2. Three-Dimensional Coordinates, Distance and Spheres*

Hệ trục và quy tắc bàn tay phải – *Axes and the right-hand rule*

Ở lớp 12 bạn đã vẽ điểm trên mặt phẳng bằng hai trục Ox, Oy. Muốn mô tả một con ruồi bay trong phòng thì hai số chưa đủ, ta cần thêm độ cao. Vì vậy ta thêm trục thứ ba, Oz, vuông góc với cả hai trục kia, và mỗi điểm trong không gian có ba số (x, y, z).
On a flat page, two axes Ox and Oy are enough to place a point. To describe a fly moving around a room, you also need a height. So we add a third axis, Oz, perpendicular to both of the others, and every point in space gets three numbers (x, y, z).

Ba trục cắt nhau vuông góc tại gốc O. Chiều của trục z không tùy ý: ta dùng quy tắc bàn tay phải. Đặt bàn tay phải sao cho các ngón chỉ theo chiều dương trục x, rồi khum các ngón về phía chiều dương trục y. Ngón cái khi đó chỉ chiều dương trục z.
The three axes meet at right angles at the origin O. The direction of the z-axis is not a free choice: we use the right-hand rule. Point the fingers of your right hand along the positive x-axis, then curl them toward the positive y-axis. Your thumb points along the positive z-axis.

Mỗi cặp trục tạo thành một mặt phẳng tọa độ. Mặt phẳng xy chứa mọi điểm có z = 0. Mặt phẳng xz chứa mọi điểm có y = 0. Mặt phẳng yz chứa mọi điểm có x = 0. Phương trình dạng z = c (c là số cho trước) là mặt phẳng song song với mặt phẳng xy, nằm ở độ cao c. Tương tự cho x = a và y = b.

Each pair of axes spans a coordinate plane. The xy-plane holds every point with z = 0, the xz-plane every point with y = 0, and the yz-plane every point with x = 0. An equation like z = c (c a given number) is a plane parallel to the xy-plane, at height c. The same goes for x = a and y = b.

Ba mặt phẳng này chia không gian thành tám phần, gọi là tám góc phần tám (octant). Điểm có cả ba tọa độ khác 0 luôn nằm trong đúng một góc phần tám.

These three planes cut space into eight regions called octants. A point whose three coordinates are all nonzero lies in exactly one octant.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xét điểm M(3, −2, 4). Vì x > 0, y < 0, z > 0 nên M nằm ở góc phần tám có dấu (+, −, +). Hình chiếu của M xuống mặt phẳng xy là (3, −2, 0). M cách mặt phẳng xy đúng |z| = 4 đơn vị. Khoảng cách từ M đến gốc O là $\sqrt{(9 + 4 + 16)} = \sqrt{29}$.

Take the point M(3, −2, 4). Since x > 0, y < 0, z > 0, M lies in the octant with signs (+, −, +). Its projection onto the xy-plane is (3, −2, 0). M sits exactly |z| = 4 units from the xy-plane. The distance from M to the origin O is $\sqrt{(9 + 4 + 16)} = \sqrt{29}$.

Khoảng cách giữa hai điểm – *Distance between two points*

Trong mặt phẳng, khoảng cách là căn của tổng bình phương hiệu hai tọa độ. Trong không gian ta chỉ thêm một số hạng cho tọa độ z. Với $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$:

In the plane, distance is the square root of the sum of squared coordinate differences. In space we simply add a term for z. For $A(x_1, y_1, z_1)$ and $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$AB = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]}$$

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tìm khoảng cách giữa A(1, 2, 3) và B(4, −2, 15). Hiệu các tọa độ: 4 − 1 = 3, −2 − 2 = −4, 15 − 3 = 12. Bình phương: 9, 16, 144. Tổng bằng 169, nên AB = $\sqrt{169}$ = 13.

Find the distance between A(1, 2, 3) and B(4, −2, 15). The coordinate differences are 4 − 1 = 3, −2 − 2 = −4, 15 − 3 = 12. Squares: 9, 16, 144. The sum is 169, so AB = $\sqrt{169}$ = 13.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Hiệu âm vẫn cho bình phương dương: $(-4)^2$ = 16, không phải −16. Một lỗi nữa là cộng xong rồi quên lấy căn, nên ra 169 thay vì 13.

A negative difference still gives a positive square: $(-4)^2 = 16$, not −16. Another slip is adding everything up and forgetting the square root, which leaves 169 instead of 13.

Mặt cầu – *Spheres*

Mặt cầu là tập mọi điểm cách một điểm cố định (tâm) một khoảng không đổi (bán kính), giống đường tròn nhưng trong không gian. Điểm M(x, y, z) nằm trên mặt cầu tâm I(a, b, c), bán kính R khi IM = R. Bình phương hai vế công thức khoảng cách ta được phương trình chính tắc:

A sphere is the set of all points at a fixed distance (the radius) from a fixed point (the center), like a circle but in space. A point M(x, y, z) lies on the sphere with center I(a, b, c) and radius R when IM = R. Squaring the distance formula gives the standard equation:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Ví dụ, mặt cầu tâm (2, −1, 3) đi qua điểm (5, 3, 3) có bán kính bằng khoảng cách hai điểm này: $\sqrt{(3^2 + 4^2 + 0^2)} = 5$. Phương trình là $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$.

For example, the sphere centered at (2, −1, 3) through the point (5, 3, 3) has radius equal to the distance between them: $\sqrt{(3^2 + 4^2 + 0^2)} = 5$. Its equation is $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Mặt cầu nhận đoạn AB làm đường kính, với A(1, 2, −3) và B(5, −2, 1). Tâm là trung điểm AB: ((1 + 5)/2, (2 − 2)/2, (−3 + 1)/2) = (3, 0, −1). Độ dài AB = $\sqrt{(16 + 16 + 16)} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, nên bán kính R = $2\sqrt{3}$ và $R^2 = 12$. Phương trình: $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 12$.

A sphere has segment AB as its diameter, with A(1, 2, −3) and B(5, −2, 1). The center is the midpoint of AB: ((1 + 5)/2, (2 − 2)/2, (−3 + 1)/2) = (3, 0, −1). The length AB = $\sqrt{(16 + 16 + 16)} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, so the radius is R = $2\sqrt{3}$ and $R^2 = 12$. The equation is $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 12$.

Từ phương trình khai triển tìm tâm và bán kính – *From an expanded equation to center and radius*

Đề thường cho dạng đã khai triển, có x^2, y^2, z^2 cùng các số hạng bậc nhất. Ta đưa nó về dạng chính tắc bằng cách hoàn thành bình phương, tức là biến $x^2 + px$ thành $(x + p/2)^2 - p^2/4$.

Exams often give the expanded form, with x^2, y^2, z^2 and some linear terms. We rewrite it in standard form by completing the square, which turns $x^2 + px$ into $(x + p/2)^2 - p^2/4$.

1. Chia cả phương trình cho hệ số chung của x^2, y^2, z^2 để hệ số mỗi bình phương bằng 1.
   Divide the whole equation by the common coefficient of x^2, y^2, z^2 so each squared term has coefficient 1.
2. Gom các số hạng theo từng biến và chuyển hằng số sang vế phải.
   Group the terms by variable and move the constant to the right side.
3. Với mỗi biến, lấy hệ số của số hạng bậc nhất, chia đôi, bình phương, rồi cộng số đó vào cả hai vế.
   For each variable, take the coefficient of the linear term, halve it, square it, and add that number to both sides.
4. Viết mỗi nhóm thành bình phương một nhị thức. Đọc tâm (đổi dấu số trong ngoặc) và bán kính (căn vế phải).
   Write each group as a squared binomial. Read off the center (flip the sign of each number inside the brackets) and the radius (square root of the right side).

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xác định $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 2 = 0$. Gom: $(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + (z^2 - 2z) = 2$. Nửa hệ số rồi bình phương: 4, 9, 1. Cộng vào hai vế: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 2 + 4 + 9 + 1 = 16$. Vậy đây là mặt cầu tâm (2, −3, 1), bán kính 4.

Identify $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 2 = 0$. Group: $(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + (z^2 - 2z) = 2$. Half the coefficients, then square: 4, 9, 1. Add to both sides: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 2 + 4 + 9 + 1 = 16$. This is a sphere with center (2, −3, 1) and radius 4.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Xác định $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8z - 2 = 0$. Chia cho 2: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$. Gom: $(x^2 - 2x) + y^2 + (z^2 + 4z) = 1$. Cộng 1 và 4: $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 6$. Tâm $(1, 0, -2)$, bán kính $\sqrt{6}$.
Identify $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8z - 2 = 0$. Divide by 2: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$. Group: $(x^2 - 2x) + y^2 + (z^2 + 4z) = 1$. Add 1 and 4: $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 6$. Center $(1, 0, -2)$, radius $\sqrt{6}$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Sai dấu tâm: $(y + 3)^2$ cho tung độ tâm là -3, không phải 3. Hay quên cộng số bù vào vế phải, hoặc quên chia hệ số chung trước. Vế phải là R^2, nên phải lấy căn mới ra bán kính.
Sign slip on the center: $(y + 3)^2$ gives a y-coordinate of -3, not 3. Students also forget to add the completing numbers to the right side, or forget to divide out the common coefficient first. The right side is R^2, so take the square root to get the radius.

GHI CHÚ / NOTE – Nếu vế phải sau khi hoàn thành bình phương bằng 0 thì đó chỉ là một điểm. Nếu âm thì không có điểm nào thỏa mãn.
If the right side equals 0 after completing the square, the graph is a single point. If it is negative, no point satisfies the equation.

Vectơ trong không gian – *Vectors in space*

Vectơ là mũi tên có độ dài và hướng. Trong không gian ta viết $v = \langle a, b, c\rangle$, tức là $v = ai + bj + ck$, với i, j, k là ba vectơ đơn vị dọc theo trục x, y, z. Vectơ từ $P(x_1, y_1, z_1)$ đến $Q(x_2, y_2, z_2)$ có tọa độ $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$.
A vector is an arrow with a length and a direction. In space we write $v = \langle a, b, c\rangle$, meaning $v = ai + bj + ck$, where i, j, k are unit vectors along the x, y, z axes. The vector from $P(x_1, y_1, z_1)$ to $Q(x_2, y_2, z_2)$ has components $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$.

- Cộng, trừ: làm từng tọa độ một. $\langle a, b, c\rangle + \langle d, e, f\rangle = \langle a + d, b + e, c + f\rangle$.
  Addition and subtraction work one component at a time: $\langle a, b, c\rangle + \langle d, e, f\rangle = \langle a + d, b + e, c + f\rangle$.
- Nhân với số k: $\langle ka, kb, kc\rangle$. Độ dài: $|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
  Multiplying by a number k gives $\langle ka, kb, kc\rangle$. The length is $|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- Vectơ đơn vị cùng hướng với v ($v \neq 0$): v chia cho $|v|$.
  The unit vector in the direction of v ($v \neq 0$) is v divided by $|v|$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $P(1, 2, 3)$, $Q(3, 0, 4)$. Vectơ $PQ = \langle 2, -2, 1\rangle$. Độ dài $\sqrt{(4 + 4 + 1)} = 3$. Vectơ đơn vị cùng hướng là $\langle 2/3, -2/3, 1/3\rangle$. Kiểm tra: $4/9 + 4/9 + 1/9 = 1$.
Let $P(1, 2, 3)$, $Q(3, 0, 4)$. The vector $PQ = \langle 2, -2, 1\rangle$ has length $\sqrt{(4 + 4 + 1)} = 3$. The unit vector in the same direction is $\langle 2/3, -2/3, 1/3\rangle$. Check: $4/9 + 4/9 + 1/9 = 1$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho $u = \langle 1, -2, 3\rangle$ và $w = \langle 4, 0, -1\rangle$. Tính $2u - w$. Nhân đôi u được $\langle 2, -4, 6\rangle$. Trừ từng tọa độ: $\langle 2 - 4, -4 - 0, 6 - (-1)\rangle = \langle -2, -4, 7\rangle$. Độ dài của kết quả là $\sqrt{(4 + 16 + 49)} = \sqrt{69}$.
Let $u = \langle 1, -2, 3\rangle$ and $w = \langle 4, 0, -1\rangle$. Find $2u - w$. Doubling u gives $\langle 2, -4, 6\rangle$. Subtract component by component: $\langle 2 - 4, -4 - 0, 6 - (-1)\rangle = \langle -2, -4, 7\rangle$. The length of the result is $\sqrt{(4 + 16 + 49)} = \sqrt{69}$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lấy tọa độ đầu trừ tọa độ cuối thay vì cuối trừ đầu sẽ ra vectơ ngược hướng.
Subtracting the tail from the head is the rule. Doing it the other way round gives a vector pointing the opposite way.

2.3. Tích vô hướng, góc giữa hai vectơ và hình chiếu – *2.3. The Dot Product, Angles and Projections*

Tích vô hướng nhận vào hai vectơ và trả ra MỘT con số, không phải vectơ. Nó đo mức độ hai vectơ "cùng chiều" với nhau. Hai người cùng kéo một chiếc xe về một hướng thì sức kéo cộng dồn nhiều. Hai người kéo vuông góc thì không ai giúp ai. Tích vô hướng ghi lại đúng ý đó bằng số.
The dot product takes two vectors and returns ONE number, not a vector. It measures how much two vectors point the same way. Two people pulling a cart in the same direction add up their effort. Two people pulling at right angles do not help each other at all. The dot product records that idea as a number.

Định nghĩa và tính chất – *Definition and properties*

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Với $a = (a_1, a_2, a_3)$ và $b = (b_1, b_2, b_3)$: $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Trong mặt phẳng chỉ có hai số hạng đầu.
For $a = (a_1, a_2, a_3)$ and $b = (b_1, b_2, b_3)$: $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. In the plane, only the first two terms appear.

Nhân từng cặp thành phần cùng vị trí rồi cộng lại. Ví dụ $(2, 3, -1) \cdot (4, 0, 5) = 8 + 0 - 5 = 3$.
Multiply each pair of matching components, then add. For example, $(2, 3, -1) \cdot (4, 0, 5) = 8 + 0 - 5 = 3$.

- Giao hoán: $a \cdot b = b \cdot a$.
  Commutative: $a \cdot b = b \cdot a$.
- Phân phối: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
  Distributive: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- Nhân số: $(k\,a) \cdot b = k\,(a \cdot b)$.
  Scalar factor: $(k\,a) \cdot b = k\,(a \cdot b)$.
- $a \cdot a = |a|^2$, nên độ dài $|a| = \sqrt{(a \cdot a)}$.
  $a \cdot a = |a|^2$, so the length is $|a| = \sqrt{(a \cdot a)}$.
- $0 \cdot a = 0$.
  $0 \cdot a = 0$.

Tìm góc giữa hai vectơ – *Finding the angle between two vectors*

Có một cách viết thứ hai của tích vô hướng: $a \cdot b = |a|\,|b| \cos\theta$, trong đó θ là góc giữa hai vectơ khi đặt chung gốc, $0° \le \theta \le 180°$. Ghép hai cách viết lại ta tính được góc.
There is a second way to write the dot product: $a \cdot b = |a|\,|b| \cos\theta$, where θ is the angle between the vectors placed tail to tail, $0° \le \theta \le 180°$. Combining the two forms gives you the angle.

1. Tính a · b bằng công thức tọa độ.
   Compute a · b with the component formula.
2. Tính |a| và |b| (căn của tổng bình phương các thành phần).
   Compute |a| and |b| (square root of the sum of squared components).
3. Tính cos θ = (a · b) / (|a| |b|).
   Compute cos θ = (a · b) / (|a| |b|).
4. Dùng máy tính bấm arccos ($\cos^{-1}$) để ra θ. Chú ý máy đang ở chế độ độ hay radian.
   Press arccos ($\cos^{-1}$) on your calculator to get θ. Check whether it is set to degrees or radians.

VÍ DỤ / EXAMPLE – a = (1, 2, 2), b = (2, −1, 2). Ta có a · b = 2 − 2 + 4 = 4, |a| = 3, |b| = 3. Vậy cos θ = 4/9 ≈ 0,4444 và θ ≈ 63,6°.
a = (1, 2, 2), b = (2, −1, 2). Then a · b = 2 − 2 + 4 = 4, |a| = 3, |b| = 3. So cos θ = 4/9 ≈ 0.4444 and θ ≈ 63.6°.

VÍ DỤ / EXAMPLE – a = (2, −1), b = (−3, 4). Ta có a · b = −6 − 4 = −10, |a| = √5 ≈ 2,236, |b| = 5. Vậy cos θ = −10 / (5√5) = −2/√5 ≈ −0,8944 và θ ≈ 153,4°. Tích vô hướng âm nên góc tù, khớp với kết quả.
a = (2, −1), b = (−3, 4). Then a · b = −6 − 4 = −10, |a| = √5 ≈ 2.236, |b| = 5. So cos θ = −10 / (5√5) = −2/√5 ≈ −0.8944 and θ ≈ 153.4°. The dot product is negative, so the angle is obtuse, which matches.

Dấu của tích vô hướng cho biết ngay loại góc: dương thì góc nhọn, âm thì góc tù, bằng 0 thì góc vuông. Hai vectơ khác 0 vuông góc với nhau khi và chỉ khi a · b = 0. Ví dụ (3, 1) · (−1, 3) = −3 + 3 = 0 nên hai vectơ này vuông góc.
The sign tells you the type of angle: positive means acute, negative means obtuse, zero means right angle. Two nonzero vectors are perpendicular exactly when a · b = 0. For example, (3, 1) · (−1, 3) = −3 + 3 = 0, so these two vectors are perpendicular.

Điều kiện vuông góc còn dùng để tìm một số chưa biết. Đặt tích vô hướng bằng 0 rồi giải phương trình.
The perpendicular test also finds an unknown number. Set the dot product equal to 0 and solve the equation.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tìm k để (k, 2, −3) vuông góc với (4, 5, 2). Ta có 4k + 10 − 6 = 0, tức 4k = −4, nên k = −1. Kiểm tra: (−1, 2, −3) · (4, 5, 2) = −4 + 10 − 6 = 0.
Find k so that (k, 2, −3) is perpendicular to (4, 5, 2). We need 4k + 10 − 6 = 0, so 4k = −4 and k = −1. Check: (−1, 2, −3) · (4, 5, 2) = −4 + 10 − 6 = 0.

Góc chỉ phương và cosin chỉ phương – *Direction angles and direction cosines*

Một vectơ khác 0 trong không gian tạo với ba trục Ox, Oy, Oz các góc α, β, γ. Đó là các góc chỉ phương. Cosin của chúng gọi là cosin chỉ phương. Với v = (v_1, v_2, v_3): cos α = v_1/|v|, cos β = v_2/|v|, cos γ = v_3/|v|. Các công thức này suy ra từ việc lấy tích vô hướng của v với i, j, k.

A nonzero vector in space makes angles α, β, γ with the x-, y- and z-axes. These are its direction angles, and their cosines are the direction cosines. For v = (v₁, v₂, v₃): cos α = v₁/\|v\|, cos β = v₂/\|v\|, cos γ = v₃/\|v\|. These follow from taking the dot product of v with i, j, k.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – cos² α + cos² β + cos² γ = 1. Vectơ (cos α, cos β, cos γ) là vectơ đơn vị cùng hướng với v.
cos² α + cos² β + cos² γ = 1. The vector (cos α, cos β, cos γ) is the unit vector in the direction of v.

VÍ DỤ / EXAMPLE – v = (2, −1, 2), \|v\| = 3. Ta có cos α = 2/3, cos β = −1/3, cos γ = 2/3, tức α ≈ 48,2°, β ≈ 109,5°, γ ≈ 48,2°. Kiểm tra: 4/9 + 1/9 + 4/9 = 1.
v = (2, −1, 2), \|v\| = 3. Then cos α = 2/3, cos β = −1/3, cos γ = 2/3, so α ≈ 48.2°, β ≈ 109.5°, γ ≈ 48.2°. Check: 4/9 + 1/9 + 4/9 = 1.

Thành phần âm cho góc tù với trục tương ứng, như β ≈ 109,5° ở trên. Vectơ nằm dọc trục thì góc với trục đó là 0° và hai góc còn lại là 90°.
A negative component gives an obtuse angle with that axis, like β ≈ 109.5° above. A vector lying along an axis makes 0° with that axis and 90° with the other two.

Hình chiếu của vectơ – *Vector projection*

Hãy hình dung ánh nắng chiếu thẳng xuống, bóng của vectơ v đổ lên đường thẳng chứa u. Cái bóng đó là hình chiếu vectơ của v lên u, ký hiệu `proj_u` v. Nó cho biết phần của v đi theo hướng u.
Picture the sun shining straight down: the shadow of v falls on the line along u. That shadow is the vector projection of v onto u, written `proj_u` v. It tells you the part of v that goes in the direction of u.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – `proj_u` v = ((u · v) / \|u\|²) u. Hình chiếu vô hướng là `comp_u` v = (u · v) / \|u\|, chính là độ dài có dấu của cái bóng.
`proj_u` v = ((u · v) / \|u\|²) u. The scalar projection is `comp_u` v = (u · v) / \|u\|, the signed length of the shadow.

1. Tính u · v.
   Compute u · v.
2. Tính \|u\|² bằng cách cộng bình phương các thành phần của u.
   Compute \|u\|² by adding the squares of the components of u.
3. Nhân số (u · v) / \|u\|² với vectơ u để được hình chiếu vectơ.
   Multiply u by the number (u · v) / \|u\|² to get the vector projection.
4. Muốn có phần vuông góc với u, lấy v − `proj_u` v.
   For the part perpendicular to u, take v − `proj_u` v.

VÍ DỤ / EXAMPLE – u = (3, 4, 0), v = (2, 1, 2). Ta có u · v = 6 + 4 = 10 và \|u\|² = 25. Vậy `proj_u` v = (10/25)(3, 4, 0) = (6/5, 8/5, 0), còn `comp_u` v = 10/5 = 2. Phần vuông góc là (2, 1, 2) − (1,2; 1,6; 0) = (0,8; −0,6; 2). Kiểm tra: tích vô hướng với u bằng 2,4 − 2,4 = 0.
u = (3, 4, 0), v = (2, 1, 2). Then u · v = 6 + 4 = 10 and \|u\|² = 25. So `proj_u` v = (10/25)(3, 4, 0) =

(6/5, 8/5, 0) and comp_u v = 10/5 = 2. The perpendicular part is (2, 1, 2) − (1.2, 1.6, 0) = (0.8, −0.6, 2). Check: its dot product with u is 2.4 − 2.4 = 0.

VÍ DỤ / EXAMPLE – u = (1, 0), v = (−3, 2). Ta có u · v = −3 và |u|² = 1, nên proj_u v = (−3)(1, 0) = (−3, 0) và comp_u v = −3. Dấu âm báo cái bóng quay ngược chiều với u, vì góc giữa hai vectơ là góc tù.
u = (1, 0), v = (−3, 2). Then u · v = −3 and |u|² = 1, so proj_u v = (−3)(1, 0) = (−3, 0) and comp_u v = −3. The minus sign says the shadow points against u, because the angle between the vectors is obtuse.

Công của lực không đổi – *Work done by a constant force*

Khi lực F làm vật dịch chuyển một đoạn s, chỉ phần lực nằm dọc theo hướng chuyển động mới sinh công. Công là W = F · s = |F| |s| cos θ, với θ là góc giữa lực và hướng dịch chuyển. Đơn vị là jun (J) khi lực tính bằng niutơn (N) và quãng đường bằng mét (m).
When a force F moves an object through displacement s, only the part of the force along the motion does work. The work is W = F · s = |F| |s| cos θ, where θ is the angle between the force and the direction of motion. The unit is the joule (J) when force is in newtons (N) and distance in meters (m).

VÍ DỤ / EXAMPLE – Bạn kéo vali trên sàn ngang bằng dây xiên 30° so với mặt sàn. Lực kéo 50 N, vali đi 20 m. Công là W = 50 · 20 · cos 30° = 1000 · (√3/2) = 500√3 ≈ 866 J. Cách khác: F = (25√3, 25), s = (20, 0), nên F · s = 500√3, cùng kết quả.
You pull a suitcase along a level floor with a rope at 30° above the floor. The pull is 50 N and the suitcase travels 20 m. The work is W = 50 · 20 · cos 30° = 1000 · (√3/2) = 500√3 ≈ 866 J. Alternatively, F = (25√3, 25) and s = (20, 0), so F · s = 500√3, the same result.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Lực F = (3, 4, 2) N làm vật dời từ gốc tới điểm cách đó s = (5, 0, 1) m. Công là W = F · s = 15 + 0 + 2 = 17 J. Khi biết tọa độ, không cần tìm góc.
A force F = (3, 4, 2) N moves an object by s = (5, 0, 1) m. The work is W = F · s = 15 + 0 + 2 = 17 J. When you have coordinates, you do not need the angle.

Nếu góc giữa lực và hướng đi là góc tù thì công âm: lực đang cản chuyển động, như ma sát. Nếu lực vuông góc với hướng đi thì công bằng 0.
If the angle between force and motion is obtuse, the work is negative: the force is resisting the motion, like friction. If the force is perpendicular to the motion, the work is 0.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm tích vô hướng là vectơ, hoặc viết a · b = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3). Kết quả luôn là một số.
Treating the dot product as a vector, or writing a · b = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3). The result is always one number.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên chia cho |u|² (hay |u|) khi tính hình chiếu, hoặc lẫn hai công thức. Hình chiếu vectơ có u ở cuối, hình chiếu vô hướng thì không.
Forgetting to divide by |u|² (or |u|) in a projection, or mixing up the two formulas. The vector projection ends with u, the scalar projection does not.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Tính công bằng |F| |s| mà quên cos θ, hoặc dùng góc giữa dây và phương thẳng đứng thay vì góc giữa lực và hướng đi.

Computing work as $|F|\,|s|$ without $\cos\theta$, or using the angle between the rope and the vertical instead of the angle between the force and the direction of motion.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đảo thứ tự trong hình chiếu. `proj_u v` chiếu v lên u và có hướng của u. `proj_v u` thì ngược lại, cho kết quả khác.
Swapping the order in a projection. `proj_u v` projects v onto u and points along u. `proj_v u` does the opposite and gives a different result.

MẸO / TIP – Trước khi bấm arccos, kiểm tra cos θ nằm trong khoảng từ −1 đến 1. Nếu ra ngoài khoảng này thì tính |a| hoặc |b| đã sai.
Before pressing arccos, check that $\cos\theta$ lies between -1 and 1. If it falls outside that range, $|a|$ or $|b|$ was computed wrongly.

2.4. Tích có hướng, tích hỗn tạp và ứng dụng diện tích, thể tích – *2.4. The Cross Product, Triple Scalar Product, Area and Volume*

Tích vô hướng của hai vectơ cho ra một số. Tích có hướng thì cho ra một vectơ mới, vuông góc với cả hai vectơ ban đầu. Ví dụ đời thường: bạn đặt hai cây thước trên mặt bàn, cây cọc cắm thẳng đứng vào bàn chính là hướng của tích có hướng. Nó chỉ dùng được trong không gian ba chiều.
The dot product of two vectors gives a number. The cross product gives a new vector that is perpendicular to both originals. Picture two rulers lying on a desk: a stake pushed straight up into the desk shows the direction of the cross product. It works only in three-dimensional space.

Ba vectơ đơn vị tạo thành một vòng dễ nhớ: $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$. Đi ngược vòng thì mang dấu trừ, chẳng hạn $j \times i = -k$. Bạn dùng ba đẳng thức này để thử nhanh quy tắc bàn tay phải.
The three unit vectors form a loop that is easy to remember: $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$. Going against the loop adds a minus sign, for example $j \times i = -k$. Use these three identities to test the right-hand rule quickly.

Cách tính bằng định thức – *Computing it with a determinant*

Định thức 3 × 3 là một con số tính từ bảng 3 hàng 3 cột. Ở đây ta mượn cách viết định thức làm mẹo nhớ công thức. Dòng thứ nhất của bảng ghi i, j, k, tức các vectơ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) nằm dọc ba trục x, y, z. Với $a = (a_1, a_2, a_3)$ và $b = (b_1, b_2, b_3)$ ta có $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$.
A 3 × 3 determinant is a number computed from a table of 3 rows and 3 columns. Here we borrow the determinant layout as a memory aid for the formula. The first row of the table holds i, j, k, meaning the vectors (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) along the x, y and z axes. For $a = (a_1, a_2, a_3)$ and $b = (b_1, b_2, b_3)$, $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$.

1. Kẻ bảng 3 hàng: hàng 1 ghi i, j, k; hàng 2 ghi ba thành phần của a; hàng 3 ghi ba thành phần của b.
   Draw a table with 3 rows: row 1 holds i, j, k; row 2 holds the three components of a; row 3 holds the three components of b.

2. Thành phần i: che cột 1, lấy $a_2b_3 - a_3b_2$.
   The i component: cover column 1 and take $a_2b_3 - a_3b_2$.
3. Thành phần j: che cột 2, lấy $a_3b_1 - a_1b_3$. Đây là kết quả đã đổi dấu so với cách khai triển định thức thông thường, nên bạn cứ chép đúng công thức này.
   The j component: cover column 2 and take $a_3b_1 - a_1b_3$. This already includes the sign flip of the usual determinant expansion, so copy this formula as written.
4. Thành phần k: che cột 3, lấy $a_1b_2 - a_2b_1$.
   The k component: cover column 3 and take $a_1b_2 - a_2b_1$.
5. Kiểm tra bằng tích vô hướng: kết quả nhân vô hướng với a và với b phải ra 0.
   Check with dot products: the result dotted with a, and with b, must give 0.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho a = (1, 2, 3) và b = (2, −1, 4). Thành phần i: 2·4 − 3·(−1) = 11. Thành phần j: 3·2 − 1·4 = 2. Thành phần k: 1·(−1) − 2·2 = −5. Vậy a × b = (11, 2, −5). Kiểm tra: (11, 2, −5)·a = 11 + 4 − 15 = 0 và (11, 2, −5)·b = 22 − 2 − 20 = 0.
Let a = (1, 2, 3) and b = (2, −1, 4). The i component: 2·4 − 3·(−1) = 11. The j component: 3·2 − 1·4 = 2. The k component: 1·(−1) − 2·2 = −5. So a × b = (11, 2, −5). Check: (11, 2, −5)·a = 11 + 4 − 15 = 0 and (11, 2, −5)·b = 22 − 2 − 20 = 0.

Đổi chỗ hai vectơ ở ví dụ trên: b × a = (−11, −2, 5), đúng bằng −(a × b). Mọi thành phần đều đổi dấu.
Swap the two vectors in the example above: b × a = (−11, −2, 5), exactly −(a × b). Every component changes sign.

Hướng và độ dài – *Direction and length*

Hướng của a × b theo quy tắc bàn tay phải: xòe bàn tay phải, bốn ngón chỉ theo a rồi cuộn về phía b, ngón cái chỉ hướng của a × b. Đổi thứ tự thì ngón cái quay ngược lại, nên b × a = −(a × b).
The direction of a × b follows the right-hand rule: curl the fingers of your right hand from a toward b, and your thumb points along a × b. Swap the order and the thumb flips, so b × a = −(a × b).

Độ dài là |a × b| = |a|·|b|·sinθ, với θ là góc giữa hai vectơ. Đó chính là diện tích hình bình hành có hai cạnh kề là a và b. Hai vectơ song song thì sinθ = 0, nên a × b = 0, và a × a = 0.
The length is |a × b| = |a|·|b|·sinθ, where θ is the angle between the vectors. This equals the area of the parallelogram with adjacent sides a and b. Parallel vectors give sinθ = 0, so a × b = 0, and a × a = 0.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tam giác có đỉnh A(1, 0, 2), B(3, 1, 1), C(2, 3, 4). Ta có AB = (2, 1, −1) và AC = (1, 3, 2). Tích có hướng: thành phần i là 1·2 − (−1)·3 = 5, thành phần j là (−1)·1 − 2·2 = −5, thành phần k là 2·3 − 1·1 = 5, nên AB × AC = (5, −5, 5). Độ dài là √(25 + 25 + 25) = 5√3. Tam giác bằng nửa hình bình hành, nên diện tích bằng 5√3/2 ≈ 4,33.
A triangle has vertices A(1, 0, 2), B(3, 1, 1), C(2, 3, 4). Then AB = (2, 1, −1) and AC = (1, 3, 2). The cross product: the i component is 1·2 − (−1)·3 = 5, the j component is (−1)·1 − 2·2 = −5, the k