ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP

TOÁN CAO CẤP F4
TÍCH PHÂN, PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ CHUỖI

Dành cho sinh viên đại học khối kỹ thuật và kinh tế chưa từng học môn này, cần ôn để thi học phần Toán cao cấp F4 và dùng được kiến thức trong các môn chuyên ngành

Advanced Mathematics F4 Exam Review – a bilingual guide

Tích phân xác định · Kỹ thuật tính tích phân · Ứng dụng tích phân

Phương trình vi phân cấp một và cấp cao · Hệ phương trình vi phân

Chuỗi Fourier · Phương trình đạo hàm riêng · Chuỗi · Biến đổi Laplace

Song ngữ Việt – Anh · Vietnamese – English

Phiên bản 1.0 – Tháng 11 năm 2026

https://tailieuso.vin

MỤC LỤC

CONTENTS

Chương 1. Tích phân xác định và định lý cơ bản của giải tích – *Chapter 1. The Definite Integral and the Fundamental Theorem of Calculus* 6

1.1. Xấp xỉ diện tích bằng tổng Riemann – *1.1. Approximating Area with Riemann Sums* 6

1.2. Định nghĩa và tính chất của tích phân xác định – *1.2. Definition and Properties of the Definite Integral* 9

1.3. Định lý cơ bản của giải tích và định lý giá trị trung bình – *1.3. The Fundamental Theorem of Calculus and the Mean Value Theorem for Integrals* 12

1.4. Bảng nguyên hàm cơ bản và định lý biến thiên toàn phần – *1.4. Basic Antiderivative Formulas and the Net Change Theorem* 15

1.5. Phương pháp đổi biến số – *1.5. Integration by Substitution* 18

1.6. Tích phân hàm mũ và hàm logarit – *1.6. Integrals of Exponential and Logarithmic Functions* 20

1.7. Tích phân dẫn tới hàm lượng giác ngược – *1.7. Integrals Leading to Inverse Trigonometric Functions* 23

1.8. Logarit tự nhiên định nghĩa bằng tích phân và hàm hyperbolic – *1.8. The Natural Logarithm as an Integral and Hyperbolic Functions* 25

1.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *1.9. Applied exercises with solutions* 28

1.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *1.10. Essay questions and answer outlines* 29

1.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *1.11. Multiple-choice questions* 31

Chương 2. Các kỹ thuật tính tích phân – *Chapter 2. Techniques of Integration* 33

2.1. Tích phân từng phần – *2.1. Integration by Parts* 33

2.2. Tích phân hàm lượng giác – *2.2. Trigonometric Integrals* 36

2.3. Phép thế lượng giác – *2.3. Trigonometric Substitution* 39

2.4. Tích phân hàm hữu tỉ bằng phân thức đơn giản – *2.4. Integrating Rational Functions with Partial Fractions* 42

2.5. Chiến lược chọn phương pháp và dùng bảng tích phân – *2.5. Choosing a Method and Using Integral Tables* 45

2.6. Tích phân số: trung điểm, hình thang, Simpson – *2.6. Numerical Integration: Midpoint, Trapezoidal, and Simpson's Rules* 48

2.7. Tích phân suy rộng trên khoảng vô hạn – *2.7. Improper Integrals over Infinite Intervals* 50

2.8. Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn và tiêu chuẩn so sánh – *2.8. Improper Integrals of Unbounded Functions and the Comparison Test* 53

2.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *2.9. Applied exercises with solutions* 56

2.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *2.10. Essay questions and answer outlines* 57

2.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *2.11. Multiple-choice questions* 59

Chương 3. Ứng dụng hình học và vật lý của tích phân – *Chapter 3. Geometric and Physical Applications of Integration* 61

3.1. Diện tích miền giữa hai đường cong – *3.1. Area Between Curves* 61
3.2. Thể tích bằng lát cắt, phương pháp đĩa và vòng đệm – *3.2. Volume by Slicing: Disks and Washers* 64
3.3. Thể tích bằng phương pháp vỏ trụ và cách chọn phương pháp – *3.3. Volume by Cylindrical Shells and Choosing a Method* 67
3.4. Độ dài cung và diện tích mặt tròn xoay – *3.4. Arc Length and Surface Area of Revolution* 69
3.5. Khối lượng và công cơ học – *3.5. Mass and Work* 72
3.6. Áp lực thủy tĩnh lên mặt phẳng ngập nước – *3.6. Hydrostatic Force on a Submerged Plate* 74
3.7. Mô men và trọng tâm – *3.7. Moments and Centers of Mass* 77
3.8. Mô hình tăng trưởng và phân rã theo hàm mũ – *3.8. Exponential Growth and Decay Models* 80
3.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *3.9. Applied exercises with solutions* 82
3.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *3.10. Essay questions and answer outlines* 84
3.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *3.11. Multiple-choice questions* 86

Chương 4. Phương trình vi phân cấp một: khái niệm và các dạng cơ bản – *Chapter 4. First-Order Differential Equations: Basic Concepts and Standard Types* 88
4.1. Phương trình vi phân là gì và cách phân loại – *4.1. What a Differential Equation Is and How to Classify It* 88
4.2. Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng và bài toán giá trị đầu – *4.2. General Solutions, Particular Solutions, and Initial Value Problems* 91
4.3. Trường hướng và đọc dáng điệu nghiệm – *4.3. Slope Fields and Reading Solution Behavior* 94
4.4. Phương trình tách biến – *4.4. Separable Equations* 97
4.5. Phương trình logistic – *4.5. The Logistic Equation* 99
4.6. Phương trình tuyến tính cấp một và thừa số tích phân – *4.6. First-Order Linear Equations and the Integrating Factor* 102
4.7. Bài toán pha trộn dung dịch và mạch điện RC, RL – *4.7. Mixing Problems and RC, RL Circuits* 104
4.8. Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm – *4.8. Existence and Uniqueness of Solutions* 107
4.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *4.9. Applied exercises with solutions* 110
4.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *4.10. Essay questions and answer outlines* 112
4.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *4.11. Multiple-choice questions* 113

Chương 5. Phương trình vi phân cấp một: phép thế, phương trình toàn phần và phương pháp số – *Chapter 5. First-Order Equations: Substitutions, Exact Equations, and Numerical Methods* 116
5.1. Phương pháp Euler giải gần đúng – *5.1. Euler's Method for Approximate Solutions* 116
5.2. Phương trình đẳng cấp và phép thế y = vx – *5.2. Homogeneous Equations and the Substitution y = vx* 119
5.3. Phương trình Bernoulli – *5.3. Bernoulli Equations* 121

5.4. Phương trình tự trị, điểm cân bằng và đường pha – *5.4. Autonomous Equations, Equilibria, and Phase Lines* 123
5.5. Phương trình vi phân toàn phần – *5.5. Exact Equations* 126
5.6. Thừa số tích phân đưa về phương trình toàn phần – *5.6. Integrating Factors That Make an Equation Exact* 128
5.7. Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp một – *5.7. First-Order Linear Partial Differential Equations* 131
5.8. Lập mô hình và chọn phương pháp cho phương trình cấp một – *5.8. Modeling and Choosing a Method for First-Order Equations* 133
5.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *5.9. Applied exercises with solutions* 135
5.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *5.10. Essay questions and answer outlines* 137
5.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *5.11. Multiple-choice questions* 139

Chương 6. Phương trình vi phân tuyến tính cấp cao – *Chapter 6. Higher-Order Linear Differential Equations* 141
6.1. Cấu trúc nghiệm phương trình tuyến tính cấp hai – *6.1. Structure of Solutions of Second-Order Linear Equations* 141
6.2. Phương trình hệ số hằng có nghiệm đặc trưng thực – *6.2. Constant-Coefficient Equations with Real Characteristic Roots* 144
6.3. Phương trình hệ số hằng có nghiệm đặc trưng phức – *6.3. Constant-Coefficient Equations with Complex Characteristic Roots* 146
6.4. Phương trình tuyến tính cấp cao hơn hai – *6.4. Linear Equations of Order Higher Than Two* 149
6.5. Phương trình không thuần nhất: phương pháp hệ số bất định – *6.5. Nonhomogeneous Equations: Undetermined Coefficients* 151
6.6. Phương pháp biến thiên hằng số – *6.6. Variation of Parameters* 155
6.7. Dao động cơ học tự do – *6.7. Free Mechanical Vibrations* 157
6.8. Dao động cưỡng bức và cộng hưởng – *6.8. Forced Oscillations and Resonance* 160
6.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *6.9. Applied exercises with solutions* 162
6.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *6.10. Essay questions and answer outlines* 164
6.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *6.11. Multiple-choice questions* 166

Chương 7. Hệ phương trình vi phân tuyến tính – *Chapter 7. Linear Systems of Differential Equations* 168
7.1. Hệ phương trình vi phân và cách đưa phương trình cấp cao về hệ cấp một – *7.1. Systems of ODEs and Rewriting Higher-Order Equations as First-Order Systems* 168
7.2. Ôn ma trận, định thức và hệ phương trình đại số tuyến tính – *7.2. Review of Matrices, Determinants, and Linear Algebraic Systems* 171
7.3. Trị riêng và vectơ riêng – *7.3. Eigenvalues and Eigenvectors* 175
7.4. Phương pháp trị riêng với trị riêng thực phân biệt – *7.4. The Eigenvalue Method with Distinct Real Eigenvalues* 178
7.5. Hệ có trị riêng phức – *7.5. Systems with Complex Eigenvalues* 181
7.6. Hệ cấp hai: khối lượng – lò xo ghép nối và các mode dao động riêng – *7.6. Second-Order Systems: Coupled Mass–Spring Systems and Normal Modes* 184
7.7. Hệ có trị riêng lặp – *7.7. Systems with Repeated Eigenvalues* 187

7.8. Mặt phẳng pha và phân loại điểm cân bằng – *7.8. Phase Planes and Classifying Equilibrium Points* 189
7.9. Hàm mũ ma trận và hệ không thuần nhất – *7.9. Matrix Exponentials and Nonhomogeneous Systems* 193
7.10. Bài tập vận dụng có lời giải – *7.10. Applied exercises with solutions* 195
7.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *7.11. Essay questions and answer outlines* 198
7.12. Câu hỏi trắc nghiệm – *7.12. Multiple-choice questions* 199

Chương 8. Chuỗi Fourier và bài toán biên – *Chapter 8. Fourier Series and Boundary Value Problems* 202
8.1. Bài toán biên và bài toán trị riêng – *8.1. Boundary Value Problems and Eigenvalue Problems* 202
8.2. Hàm tuần hoàn và chuỗi lượng giác – *8.2. Periodic Functions and Trigonometric Series* 205
8.3. Tính hệ số Fourier trên chu kỳ 2π và 2L – *8.3. Computing Fourier Coefficients on Periods 2π and 2L* 208
8.4. Sự hội tụ của chuỗi Fourier và hiện tượng Gibbs – *8.4. Convergence of Fourier Series and the Gibbs Phenomenon* 211
8.5. Hàm chẵn, hàm lẻ và chuỗi sin, chuỗi cos – *8.5. Even and Odd Functions, Sine and Cosine Series* 213
8.6. Khai triển nửa khoảng – *8.6. Half-Range Expansions* 216
8.7. Đạo hàm và tích phân chuỗi Fourier – *8.7. Differentiating and Integrating Fourier Series* 218
8.8. Dùng chuỗi Fourier giải phương trình vi phân có ngoại lực tuần hoàn – *8.8. Using Fourier Series for ODEs with Periodic Forcing* 221
8.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *8.9. Applied exercises with solutions* 223
8.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *8.10. Essay questions and answer outlines* 225
8.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *8.11. Multiple-choice questions* 227

Chương 9. Phương trình đạo hàm riêng và phương pháp tách biến – *Chapter 9. Partial Differential Equations and Separation of Variables* 229
9.1. Ba phương trình đạo hàm riêng cơ bản: truyền nhiệt, sóng, Laplace – *9.1. Three Basic PDEs: Heat, Wave, and Laplace* 229
9.2. Phương pháp tách biến – *9.2. The Method of Separation of Variables* 233
9.3. Phương trình truyền nhiệt với hai đầu giữ nhiệt độ không – *9.3. The Heat Equation with Ends Held at Zero Temperature* 235
9.4. Phương trình truyền nhiệt với hai đầu cách nhiệt và biên không thuần nhất – *9.4. The Heat Equation with Insulated Ends and Nonhomogeneous Boundaries* 238
9.5. Phương trình sóng một chiều – *9.5. The One-Dimensional Wave Equation* 240
9.6. Nghiệm d'Alembert của phương trình sóng – *9.6. D'Alembert's Solution of the Wave Equation* 243
9.7. Nhiệt độ dừng và phương trình Laplace trên hình chữ nhật – *9.7. Steady-State Temperature and Laplace's Equation on a Rectangle* 246
9.8. Bài toán Dirichlet trong hình tròn – *9.8. The Dirichlet Problem in a Disc* 248
9.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *9.9. Applied exercises with solutions* 251

9.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *9.10. Essay questions and answer outlines* 252
9.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *9.11. Multiple-choice questions*.....255

Chương 10. Chuỗi số, chuỗi lũy thừa và nghiệm chuỗi của phương trình vi phân – *Chapter 10. Infinite Series, Power Series, and Series Solutions of ODEs*..... 257
10.1. Dãy số và giới hạn của dãy – *10.1. Sequences and Their Limits*.....257
10.2. Chuỗi số, chuỗi hình học và chuỗi điều hòa – *10.2. Infinite Series, Geometric Series, and the Harmonic Series* 260
10.3. Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số – *10.3. Convergence Tests for Series*.....263
10.4. Chuỗi lũy thừa, bán kính và khoảng hội tụ – *10.4. Power Series, Radius and Interval of Convergence*.....267
10.5. Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin – *10.5. Taylor and Maclaurin Series*.....269
10.6. Nghiệm chuỗi lũy thừa tại điểm thường – *10.6. Power Series Solutions Near an Ordinary Point* 272
10.7. Điểm kỳ dị chính quy và phương pháp Frobenius – *10.7. Regular Singular Points and the Method of Frobenius* 274
10.8. Đọc và kiểm tra nghiệm chuỗi – *10.8. Reading and Checking Series Solutions*....277
10.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *10.9. Applied exercises with solutions*.....279
10.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *10.10. Essay questions and answer outlines* ...281
10.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *10.11. Multiple-choice questions*.....283

Chương 11. Phép biến đổi Laplace – *Chapter 11. The Laplace Transform*..... 285
11.1. Định nghĩa và bảng biến đổi Laplace cơ bản – *11.1. Definition and Basic Table of Laplace Transforms*.....285
11.2. Các định lý dịch chuyển và biến đổi của đạo hàm – *11.2. Shifting Theorems and Transforms of Derivatives*.....288
11.3. Biến đổi Laplace ngược – *11.3. The Inverse Laplace Transform*.....290
11.4. Giải bài toán giá trị đầu bằng biến đổi Laplace – *11.4. Solving Initial Value Problems with the Laplace Transform* 293
11.5. Hàm bậc thang Heaviside và vế phải gián đoạn – *11.5. The Heaviside Step Function and Discontinuous Forcing*.....296
11.6. Hàm xung Dirac – *11.6. The Dirac Delta Function* 298
11.7. Tích chập – *11.7. Convolution*.....301
11.8. Giải hệ phương trình vi phân bằng biến đổi Laplace – *11.8. Solving Systems of ODEs with the Laplace Transform*.....303
11.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *11.9. Applied exercises with solutions*.....306
11.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *11.10. Essay questions and answer outlines* ...308
11.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *11.11. Multiple-choice questions*.....309

Phụ lục A. Đáp án trắc nghiệm – *Appendix A. Answers to the multiple-choice questions* 312

Phụ lục B. Bảng thuật ngữ Việt – Anh – *Appendix B. Vietnamese–English glossary*. 326

Phụ lục C. Tài liệu tham khảo – *Appendix C. References* 331

Chương 1. Tích phân xác định và định lý cơ bản của giải tích – *Chapter 1. The Definite Integral and the Fundamental Theorem of Calculus*

Mục tiêu chương – *Chapter objectives*

- Tính tổng Riemann trái và phải của một hàm trên một đoạn, rồi so với diện tích thật để thấy tổng đó xấp xỉ tích phân xác định
  Compute left and right Riemann sums of a function on an interval and compare them with the true area to see how they approximate the definite integral
- Tính tích phân xác định bằng nguyên hàm và phép đổi biến (nhớ đổi cận), đồng thời dùng định lý biến thiên toàn phần cho bài toán lượng thay đổi
  Evaluate definite integrals with antiderivatives and substitution (remembering to change the limits), and apply the net change theorem to problems about a quantity that changes
- Nhận dạng và tính các tích phân của e^x, 1/x và các dạng cho ra arcsin, arctan, đồng thời dùng được ln x định nghĩa bằng tích phân và các công thức của sinh, cosh
  Recognize and evaluate integrals of e^x and 1/x and the forms that give arcsin and arctan, and use ln x defined as an integral together with the formulas for sinh and cosh

1.1. Xấp xỉ diện tích bằng tổng Riemann – *1.1. Approximating Area with Riemann Sums*

Tích phân xác định bắt đầu từ một câu hỏi đời thường: diện tích một miền cong là bao nhiêu? Ta không có công thức cho hình cong, nhưng có công thức cho hình chữ nhật. Vậy ta lát miền cong bằng nhiều hình chữ nhật mảnh rồi cộng diện tích lại. Tổng đó gọi là tổng Riemann.

Definite integrals start from an everyday question: what is the area of a curved region? There is no formula for a curved shape, but there is one for rectangles. So we tile the region with thin rectangles and add up their areas. That sum is called a Riemann sum.

Ký hiệu tổng sigma – *Sigma notation*

Cộng nhiều số giống quy luật thì viết gọn bằng chữ Hy Lạp Σ (đọc là "xích-ma"). Số dưới Σ là chỉ số bắt đầu, số trên là chỉ số kết thúc. Ví dụ, tổng i^2 với i chạy từ 1 đến 4 là 1 + 4 + 9 + 16 = 30. Thêm một ví dụ: tổng (2i + 1) với i từ 1 đến 3 là 3 + 5 + 7 = 15. Chỉ số i chỉ là nhãn đếm, bạn thay bằng chữ khác cũng ra kết quả như cũ.

When you add many numbers that follow a pattern, you write the sum with the Greek letter Σ (sigma). The number under Σ is where the index starts, and the number on top is where it ends. For example, the sum of i^2 for i from 1 to 4 is 1 + 4 + 9 + 16 = 30. One more: the sum of (2i + 1) for i from 1 to 3 is 3 + 5 + 7 = 15. The index i is only a counting label, so renaming it to another letter gives the same result.

Chia đoạn thành các khoảng con – *Splitting the interval*

Cho hàm f liên tục, không âm trên đoạn [a, b]. Ta chia đoạn thành n khoảng con có độ rộng bằng nhau. Độ rộng mỗi khoảng là $\Delta x = (b - a)/n$. Các điểm chia là $x_0 = a$, $x_1 = a +$

Δx, $x_2 = a + 2\Delta x$, …, $x_n = b$. Mỗi khoảng con là đáy của một hình chữ nhật. Chiều cao hình chữ nhật do bạn chọn một điểm trong khoảng rồi lấy giá trị f tại đó.

Let f be continuous and non-negative on [a, b]. Split the interval into n subintervals of equal width. Each width is $\Delta x = (b - a)/n$. The division points are $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, …, $x_n = b$. Each subinterval is the base of one rectangle. You choose a point inside it and use the value of f there as the height.

Ba cách chọn chiều cao – *Three ways to pick the height*

- Tổng trái L_n lấy đầu mút trái của mỗi khoảng: $L_n = \Delta x \cdot [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$.
  The left sum L_n uses the left endpoint of each subinterval: $L_n = \Delta x \cdot [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$.
- Tổng phải R_n lấy đầu mút phải: $R_n = \Delta x \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$.
  The right sum R_n uses the right endpoint: $R_n = \Delta x \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$.
- Tổng trung điểm M_n lấy điểm giữa mỗi khoảng, tức là $m_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, rồi $M_n = \Delta x \cdot [f(m_1) + \dots + f(m_n)]$.
  The midpoint sum M_n uses the middle of each subinterval, $m_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, and then $M_n = \Delta x \cdot [f(m_1) + \dots + f(m_n)]$.

Viết bằng sigma, tổng trái là $L_n = \Sigma\, f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$ với i chạy từ 1 đến n, còn tổng phải là $R_n = \Sigma\, f(x_i) \cdot \Delta x$ với i chạy từ 1 đến n. Chỉ khác nhau ở chỉ số của x.

In sigma notation, the left sum is $L_n = \Sigma\, f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$ for i from 1 to n, and the right sum is $R_n = \Sigma\, f(x_i) \cdot \Delta x$ for i from 1 to n. Only the index of x differs.

Nếu f tăng trên cả đoạn, tổng trái luôn nhỏ hơn diện tích thật và tổng phải luôn lớn hơn. Khi f giảm thì ngược lại.

If f is increasing on the whole interval, the left sum always falls short of the true area and the right sum always overshoots. If f is decreasing, it is the other way round.

Cách làm – *Procedure*

1. Tính $\Delta x = (b - a)/n$.
   Compute $\Delta x = (b - a)/n$.
2. Liệt kê các điểm chia $x_0, x_1, \dots, x_n$ bằng cách cộng dần Δx.
   List the division points $x_0, x_1, \dots, x_n$ by adding Δx repeatedly.
3. Tính f tại các điểm cần dùng (đầu trái, đầu phải hoặc trung điểm).
   Evaluate f at the points you need (left, right or midpoints).
4. Cộng các giá trị f rồi nhân với Δx.
   Add the f-values and multiply by Δx.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính diện tích dưới $y = x^2$ trên [0, 2]. Giá trị đúng là $8/3 \approx 2{,}6667$ (bạn sẽ tự tính được ở mục sau). Với n = 4: $\Delta x = 0{,}5$, các điểm 0; 0,5; 1; 1,5; 2 và f lần lượt 0; 0,25; 1; 2,25; 4. $L_4 = 0{,}5 \cdot (0 + 0{,}25 + 1 + 2{,}25) = 1{,}75$. $R_4 = 0{,}5 \cdot (0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4) = 3{,}75$. Trung điểm 0,25; 0,75; 1,25; 1,75 cho bình phương 0,0625; 0,5625; 1,5625; 3,0625, tổng 5,25, nên $M_4 = 0{,}5 \cdot 5{,}25 = 2{,}625$. Với n = 8: $\Delta x = 0{,}25$. Tổng f ở 8 đầu trái là 8,75 nên $L_8 = 2{,}1875$. Đầu phải thay f(0) = 0 bằng f(2) = 4, tổng 12,75 nên $R_8 = 3{,}1875$. Tám trung điểm cho bình phương có tổng 10,625 nên $M_8 = 2{,}65625$.

Find the area under $y = x^2$ on [0, 2]. The exact value is 8/3 ≈ 2.6667 (you will derive it in a later section). With n = 4: $\Delta x = 0.5$, the points are 0, 0.5, 1, 1.5, 2 and f is 0, 0.25, 1, 2.25, 4. $L_4 = 0.5 \cdot (0 + 0.25 + 1 + 2.25) = 1.75$. $R_4 = 0.5 \cdot (0.25 + 1 + 2.25 + 4) = 3.75$. The midpoints 0.25, 0.75, 1.25, 1.75 give squares 0.0625, 0.5625, 1.5625, 3.0625, which sum to 5.25, so $M_4 = 0.5 \cdot 5.25 = 2.625$. With n = 8: $\Delta x = 0.25$. The 8 left-endpoint values sum to 8.75, so $L_8 = 2.1875$. For the right sum, swap f(0) = 0 for f(2) = 4: the sum is 12.75, so $R_8 = 3.1875$. The eight midpoint squares sum to 10.625, so $M_8 = 2.65625$.

So sánh sai số với 8/3 ≈ 2,6667, dùng bảng sau để kiểm tra:

Compare the errors against 8/3 ≈ 2.6667. Use this table to check your work:

Tổng *Sum*	**Sai số khi n = 4** *Error for n = 4*	**Sai số khi n = 8** *Error for n = 8*
Trái *Left*	Thiếu 0,917 *Short by 0.917*	Thiếu 0,479 *Short by 0.479*
Phải *Right*	Thừa 1,083 *Over by 1.083*	Thừa 0,521 *Over by 0.521*
Trung điểm *Midpoint*	Thiếu 0,042 *Short by 0.042*	Thiếu 0,010 *Short by 0.010*

Gấp đôi số khoảng thì sai số của tổng trái và tổng phải giảm khoảng một nửa. Sai số của trung điểm giảm khoảng bốn lần. Tăng n càng lớn, tổng Riemann càng sát diện tích thật, và giới hạn khi n tiến ra vô cùng chính là định nghĩa của diện tích.

Doubling the number of subintervals roughly halves the error of the left and right sums. The midpoint error drops by about a factor of four. The larger n gets, the closer a Riemann sum sits to the true area, and the limit as n goes to infinity is the definition of that area.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Thử với hàm giảm y = 4 − x trên [0, 2]. Miền này là hình thang có hai đáy 4 và 2, cao 2, nên diện tích đúng là (4 + 2)/2 · 2 = 6. Lấy n = 2: Δx = 1, các điểm 0; 1; 2 và f lần lượt 4; 3; 2. $L_2 = 1 \cdot (4 + 3) = 7$, lớn hơn 6. $R_2 = 1 \cdot (3 + 2) = 5$, nhỏ hơn 6. Trung điểm 0,5 và 1,5 cho f bằng 3,5 và 2,5, nên $M_2 = 1 \cdot (3{,}5 + 2{,}5) = 6$. Vì f giảm nên tổng trái thừa, tổng phải thiếu. Với hàm bậc nhất, trung điểm cho đúng diện tích.

Try a decreasing function, y = 4 − x on [0, 2]. The region is a trapezoid with parallel sides 4 and 2 and height 2, so the exact area is (4 + 2)/2 · 2 = 6. Take n = 2: $\Delta x = 1$, the points are 0, 1, 2 and f is 4, 3, 2. $L_2 = 1 \cdot (4 + 3) = 7$, above 6. $R_2 = 1 \cdot (3 + 2) = 5$, below 6. The midpoints 0.5 and 1.5 give f = 3.5 and 2.5, so $M_2 = 1 \cdot (3.5 + 2.5) = 6$. Since f is decreasing, the left sum overshoots and the right sum falls short. For a linear function, the midpoint sum gives the exact area.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm số hình chữ nhật với số điểm chia: n khoảng có n + 1 điểm chia. Tổng trái bỏ điểm cuối x_n, tổng phải bỏ điểm đầu x_0.

Mixing up the number of rectangles with the number of division points: n subintervals have n + 1 points. The left sum skips the last point x_n, and the right sum skips the first point x_0.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên nhân với Δx ở cuối, hoặc tính trung điểm bằng cách lấy giá trị f của hai đầu mút rồi chia đôi thay vì lấy f tại điểm giữa.

Forgetting to multiply by Δx at the end, or computing a midpoint height by averaging f at the two endpoints instead of evaluating f at the middle point.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết sai cận của sigma, chẳng hạn cho i chạy từ 0 đến n thay vì từ 1 đến n, khiến tổng có n + 1 hình chữ nhật.
Writing the wrong limits on sigma, for instance letting i run from 0 to n instead of 1 to n, which gives n + 1 rectangles.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $\Delta x = (b - a)/n$. Hàm tăng thì $L_n <$ diện tích $< R_n$. Diện tích = giới hạn của tổng Riemann khi n tiến ra vô cùng.
$\Delta x = (b - a)/n$. For an increasing function, $L_n <$ area $< R_n$. Area = the limit of the Riemann sums as n goes to infinity.

1.2. Định nghĩa và tính chất của tích phân xác định – *1.2. Definition and Properties of the Definite Integral*

Tích phân xác định là con số cho biết tích lũy tổng cộng của một đại lượng đang đổi. Ví dụ: vòi nước chảy vào bể với tốc độ thay đổi theo giờ, và bạn muốn biết cả buổi bể nhận được bao nhiêu lít. Với hàm dương, con số đó chính là diện tích dưới đồ thị.
The definite integral is a single number that tells you the total accumulation of a changing quantity. Picture a tap filling a tank at a varying rate, and you want the total litres after several hours. For a positive function, that number is the area under the graph.

Định nghĩa bằng tổng Riemann – *Definition as a limit of Riemann sums*

Chia đoạn [a, b] thành n đoạn con bằng nhau, mỗi đoạn rộng $\Delta x = (b - a)/n$. Trong mỗi đoạn, chọn một điểm x_i^* tùy ý. Ghép n hình chữ nhật cao $f(x_i^*)$, rộng Δx, ta có tổng Riemann: $f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x$.
Split [a, b] into n equal pieces, each of width $\Delta x = (b - a)/n$. In each piece pick any sample point x_i^*. Build n rectangles of height $f(x_i^*)$ and width Δx. Their total area is a Riemann sum: $f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x$.

Cho n tăng vô hạn, nếu tổng tiến tới một số cố định thì số đó là tích phân xác định của f trên [a, b], viết là $\int$ từ a đến b của f(x) dx. Hàm f(x) gọi là hàm dưới dấu tích phân, x là biến tích phân, a và b là cận dưới và cận trên. Hàm liên tục trên [a, b] luôn khả tích, tức là giới hạn này luôn tồn tại.
Let n grow without bound. If the sums settle on one fixed number, that number is the definite integral of f over [a, b], written $\int$ from a to b of f(x) dx. Here f(x) is the integrand, x is the variable of integration, and a and b are the lower and upper limits. A function that is continuous on [a, b] is always integrable, meaning this limit exists.

Tên biến tích phân chỉ là biến "giả": viết dt hay dx thì giá trị không đổi. Giống như chỉ số i trong một phép cộng, đổi chữ cái không làm tổng thay đổi.
The variable of integration is a dummy variable: writing dt instead of dx does not change the value. It works like the index i in a sum, where swapping the letter leaves the total unchanged.

Diện tích có dấu – *Net signed area*

Phần đồ thị nằm trên trục hoành cho hình chữ nhật có chiều cao dương, phần nằm dưới cho chiều cao âm. Vì vậy tích phân bằng diện tích phía trên trừ diện tích phía dưới. Kết quả có thể dương, âm hoặc bằng 0.

Parts of the graph above the x-axis give rectangles with positive height, and parts below give negative height. So the integral equals the area above the axis minus the area below it. The result can be positive, negative, or zero.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ −2 đến 3 của x dx bằng hình học. Đồ thị y = x là đường thẳng qua gốc. Từ 0 đến 3 có tam giác phía trên: ½·3·3 = 4,5. Từ −2 đến 0 có tam giác phía dưới: ½·2·2 = 2. Tích phân = 4,5 − 2 = 2,5.
Compute ∫ from −2 to 3 of x dx using geometry. The graph y = x is a line through the origin. From 0 to 3 there is a triangle above the axis: ½·3·3 = 4.5. From −2 to 0 there is a triangle below: ½·2·2 = 2. The integral is 4.5 − 2 = 2.5.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ −3 đến 3 của √(9 − x²) dx. Đồ thị y = √(9 − x²) là nửa trên của đường tròn bán kính 3, nằm hẳn trên trục hoành. Diện tích nửa hình tròn là ½·π·3² = 4,5π ≈ 14,14. Vậy tích phân ≈ 14,14.
Compute ∫ from −3 to 3 of √(9 − x²) dx. The graph y = √(9 − x²) is the upper half of a circle of radius 3, lying entirely above the axis. A half-disc has area ½·π·3² = 4.5π ≈ 14.14. So the integral is about 14.14.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Một xe chạy thẳng với vận tốc v(t) = t − 4 (m/s) trong 6 giây đầu. Từ 0 đến 4 giây, v âm: tam giác phía dưới có diện tích ½·4·4 = 8. Từ 4 đến 6 giây, v dương: tam giác phía trên có diện tích ½·2·2 = 2. Độ dời = 2 − 8 = −6 m, tức xe cuối cùng nằm lùi 6 m so với chỗ xuất phát. Quãng đường đã chạy là 8 + 2 = 10 m.
A vehicle moves along a straight line with velocity v(t) = t − 4 (m/s) over the first 6 seconds. From 0 to 4 s, v is negative: the triangle below the axis has area ½·4·4 = 8. From 4 to 6 s, v is positive: the triangle above has area ½·2·2 = 2. Displacement = 2 − 8 = −6 m, so the vehicle ends 6 m behind its start. The distance travelled is 8 + 2 = 10 m.

Các tính chất cần thuộc – *Properties to memorize*

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Đổi cận thì đổi dấu: ∫ từ b đến a = −∫ từ a đến b. Cận trùng nhau thì bằng 0.
Swapping the limits flips the sign: ∫ from b to a = −∫ from a to b. Equal limits give 0.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Tuyến tính: ∫ (k·f + m·g) dx = k·∫f dx + m·∫g dx, với k, m là hằng số.
Linearity: ∫ (k·f + m·g) dx = k·∫f dx + m·∫g dx for constants k and m.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Cộng đoạn: ∫ từ a đến c = ∫ từ a đến b + ∫ từ b đến c, đúng với mọi vị trí của b miễn f khả tích trên đoạn lớn nhất.
Additivity over intervals: ∫ from a to c = ∫ from a to b + ∫ from b to c, for any position of b as long as f is integrable on the largest interval.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – So sánh: nếu f ≤ g trên [a, b] (với a < b) thì ∫f ≤ ∫g. Nếu m ≤ f ≤ M thì m(b − a) ≤ ∫ từ a đến b của f ≤ M(b − a).
Comparison: if f ≤ g on [a, b] (with a < b) then ∫f ≤ ∫g. If m ≤ f ≤ M then m(b − a) ≤ ∫ from a to b of f ≤ M(b − a).

VÍ DỤ / EXAMPLE – Biết ∫ từ 0 đến 2 của f = 5, ∫ từ 2 đến 6 của f = 3, ∫ từ 0 đến 6 của g = 4. Tính ∫ từ 0 đến 6 của (2f − g). Cộng đoạn: ∫ từ 0 đến 6 của f = 5 + 3 = 8. Tuyến tính: 2·8 − 4 = 12.

Given ∫ from 0 to 2 of f = 5, ∫ from 2 to 6 of f = 3, and ∫ from 0 to 6 of g = 4, find ∫ from 0 to 6 of (2f − g). By additivity, ∫ from 0 to 6 of f = 5 + 3 = 8. By linearity, 2·8 − 4 = 12.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ước lượng ∫ từ 0 đến 2 của $(x^2 + 1)\,dx$ mà chưa cần tính chính xác. Trên [0, 2], giá trị nhỏ nhất của hàm là 1 (tại x = 0) và lớn nhất là 5 (tại x = 2). Độ dài đoạn là 2. Theo tính chất so sánh: 1·2 ≤ tích phân ≤ 5·2, tức tích phân nằm giữa 2 và 10.
Estimate ∫ from 0 to 2 of $(x^2 + 1)\,dx$ without computing it exactly. On [0, 2] the smallest value of the function is 1 (at x = 0) and the largest is 5 (at x = 2). The interval length is 2. By the comparison property, 1·2 ≤ integral ≤ 5·2, so the integral lies between 2 and 10.

Giá trị trung bình của hàm – *Average value of a function*

Trung bình của n số là tổng chia cho n. Với hàm liên tục, "tổng" là tích phân, "n" là độ dài đoạn. Vậy `f_tb` = (1/(b − a)) · ∫ từ a đến b của f(x) dx. Hình chữ nhật cao `f_tb`, rộng b − a có diện tích đúng bằng diện tích dưới đồ thị.
The average of n numbers is their sum divided by n. For a continuous function, the "sum" is the integral and the "count" is the interval length. So `f_avg` = (1/(b − a)) · ∫ from a to b of f(x) dx. A rectangle of height `f_avg` and width b − a has the same area as the region under the graph.

1. Tính tích phân của f trên [a, b] (bằng hình học hoặc công thức).
   Compute the integral of f over [a, b] (by geometry or a formula).
2. Tính độ dài đoạn b − a.
   Compute the interval length b − a.
3. Chia tích phân cho độ dài.
   Divide the integral by the length.
4. Muốn tìm điểm c để f(c) = `f_tb`, giải phương trình đó. Hàm liên tục luôn có ít nhất một điểm như vậy.
   To find a point c with f(c) = `f_avg`, solve that equation. A continuous function always has at least one such point.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Từ 6 giờ đến 14 giờ, nhiệt độ tăng đều từ 20°C lên 32°C, tức T(t) = 20 + 1,5(t − 6). Tích phân là diện tích hình thang: (20 + 32)/2 · 8 = 208. Chia cho 8 giờ: nhiệt độ trung bình là 26°C. Giải 20 + 1,5(c − 6) = 26 ra c = 10, tức lúc 10 giờ nhiệt độ đúng bằng mức trung bình.
From 6:00 to 14:00 the temperature rises steadily from 20°C to 32°C, so T(t) = 20 + 1.5(t − 6). The integral is a trapezoid area: (20 + 32)/2 · 8 = 208. Divide by 8 hours: the average temperature is 26°C. Solving 20 + 1.5(c − 6) = 26 gives c = 10, so at 10:00 the temperature equals the average.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm tích phân với diện tích: phần dưới trục hoành làm giá trị giảm, có khi ra số âm.
Confusing the integral with area: the part below the axis lowers the value, and the result can even be negative.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết ∫ f·g = (∫f)·(∫g). Tính chất tuyến tính chỉ áp dụng cho tổng và hằng số nhân, không áp dụng cho tích hai hàm.
Writing ∫ f·g = (∫f)·(∫g). Linearity covers sums and constant multiples only, not products of functions.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên chia cho b − a khi tính giá trị trung bình, hoặc lấy b − a sai thứ tự nên ra sai dấu.
Forgetting to divide by b − a for the average value, or taking b − a in the wrong order and getting the wrong sign.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Hỏi "quãng đường" mà chỉ lấy tích phân của vận tốc. Tích phân cho độ dời, có thể âm. Quãng đường phải cộng diện tích của từng phần như hhai tam giác trong ví dụ xe chạy.
Asking for "distance travelled" but only integrating the velocity. The integral gives displacement, which can be negative. Distance needs the areas of the separate parts added together, like the two triangles in the vehicle example.

1.3. Định lý cơ bản của giải tích và định lý giá trị trung bình – *1.3. The Fundamental Theorem of Calculus and the Mean Value Theorem for Integrals*

Hãy hình dung đồng hồ đo quãng đường trên xe máy. Tốc độ là đạo hàm của quãng đường, còn quãng đường đi được là tích phân của tốc độ. Hai phép toán này đi ngược chiều nhau, và định lý cơ bản của giải tích nối chúng lại. Nhờ nó, bạn tính tích phân mà không cần cộng từng hình chữ nhật nhỏ.
Think of the odometer on a motorbike. Speed is the derivative of distance, and distance travelled is the integral of speed. The two operations run in opposite directions, and the Fundamental Theorem of Calculus links them. It lets you evaluate an integral without adding up thin rectangles one by one.

Phần 1: đạo hàm của tích phân có cận trên biến thiên – *Part 1: the derivative of an integral with a variable upper limit*

Cho f liên tục trên một đoạn và a là một điểm cố định trong đoạn đó. Đặt F(x) = ∫ từ a đến x của f(t) dt. F(x) là diện tích tích lũy từ a đến x, và nó thay đổi khi x trượt sang phải. Biến chạy trong tích phân ta viết là t để không lẫn với cận x.
Let f be continuous on an interval and let a be a fixed point in it. Define F(x) = ∫ from a to x of f(t) dt. F(x) is the area accumulated from a up to x, and it changes as x slides to the right. The integration variable is written t so it does not clash with the limit x.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Nếu f liên tục thì F'(x) = f(x). Tức là: đạo hàm của diện tích tích lũy tại x chính là độ cao f(x) của đường cong tại x.
If f is continuous, then F'(x) = f(x). The rate at which accumulated area grows at x is the height f(x) of the curve at x.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho F(x) = ∫ từ 2 đến x của $(3t^2 + 1)$ dt. Theo phần 1, $F'(x) = 3x^2 + 1$, chỉ cần thay t bằng x. Kiểm tra bằng cách tính trực tiếp: F(x) = $[t^3 + t]$ từ 2 đến x = $(x^3 + x) − 10$, và đạo hàm của biểu thức này cũng là $3x^2 + 1$. Hai cách cho cùng kết quả.
Let F(x) = ∫ from 2 to x of $(3t^2 + 1)$ dt. By Part 1, $F'(x) = 3x^2 + 1$; you just replace t by x. Check by computing directly: F(x) = $[t^3 + t]$ from 2 to x = $(x^3 + x) − 10$, and the derivative of that is also $3x^2 + 1$. Both routes agree.

Khi cận trên là một hàm u(x), bạn áp dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp. Đặt G(x) = ∫ từ a đến u(x) của f(t) dt thì G'(x) = f(u(x)) · u'(x). Nếu cận biến thiên nằm ở dưới thì đổi cận cho nhau, kết quả đổi dấu.

When the upper limit is a function u(x), the chain rule applies. For G(x) = ∫ from a to u(x) of f(t) dt, we get G'(x) = f(u(x)) · u'(x). If the variable limit is at the bottom, swap the limits and the result changes sign.

1. Xác định cận trên (hoặc dưới) có chứa x. Nếu cận biến thiên ở dưới, đổi chỗ hai cận và ghi thêm dấu trừ.
   Find which limit contains x. If it is the lower one, swap the limits and put a minus sign in front.
2. Thay t trong hàm dưới dấu tích phân bằng cận biến thiên u(x).
   Replace t in the integrand by the variable limit u(x).
3. Nhân kết quả với u'(x), đạo hàm của cận đó.
   Multiply the result by u'(x), the derivative of that limit.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính đạo hàm của G(x) = ∫ từ 0 đến x^3 của $\cos(t^2)$ dt. Cận trên u(x) = x^3, u'(x) = $3x^2$. Thay t bằng x^3 được $\cos((x^3)^2) = \cos(x^6)$. Vậy G'(x) = $3x^2 \cdot \cos(x^6)$. Với H(x) = ∫ từ x đến 5 của $t^2 \sin t$ dt, đổi cận thì H(x) = −∫ từ 5 đến x của $t^2 \sin t$ dt, nên H'(x) = $-x^2 \sin x$.
Differentiate G(x) = ∫ from 0 to x^3 of $\cos(t^2)$ dt. The upper limit is u(x) = x^3, so u'(x) = $3x^2$. Replacing t by x^3 gives $\cos((x^3)^2) = \cos(x^6)$. So G'(x) = $3x^2 \cdot \cos(x^6)$. For H(x) = ∫ from x to 5 of $t^2 \sin t$ dt, swapping limits gives H(x) = −∫ from 5 to x of $t^2 \sin t$ dt, so H'(x) = $-x^2 \sin x$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên nhân u'(x) khi cận là hàm hợp, hoặc quên dấu trừ khi x nằm ở cận dưới. Nếu cả hai cận đều chứa x, hãy tách tích phân tại một hằng số bất kỳ rồi xử lý từng nửa.
Forgetting u'(x) when the limit is a composite function, or forgetting the minus sign when x is the lower limit. If both limits contain x, split the integral at any constant and treat each half separately.

Phần 2: công thức Newton – Leibniz – *Part 2: the Newton–Leibniz formula*

Nếu f liên tục trên [a, b] và F là một nguyên hàm bất kỳ của f (tức F' = f) thì ∫ từ a đến b của f(x) dx = F(b) − F(a). Ta viết gọn F(x) với hai cận a, b là [F(x)] từ a đến b. Hằng số C bị triệt tiêu khi trừ, nên bạn không cần ghi nó.

If f is continuous on [a, b] and F is any antiderivative of f (meaning F' = f), then ∫ from a to b of f(x) dx = F(b) − F(a). We abbreviate this as [F(x)] from a to b. The constant C cancels in the subtraction, so you do not write it.

Hai phần của định lý đi cùng nhau. Phần 1 cho biết diện tích tích lũy là một nguyên hàm của f. Phần 2 dùng nguyên hàm đó để tính diện tích giữa hai mốc a và b: lấy lượng tích lũy đến b, trừ lượng tích lũy đến a. Giống như lấy số trên đồng hồ cuối chuyến trừ số đầu chuyến.

The two parts work as a pair. Part 1 says accumulated area is an antiderivative of f. Part 2 uses that antiderivative to measure the area between a and b: take the total accumulated up to b and subtract the total up to a. It is like taking the odometer reading at the end of a trip and subtracting the reading at the start.

1. Tìm một nguyên hàm F của hàm dưới dấu tích phân.
   Find one antiderivative F of the integrand.
2. Thay cận trên b vào F, được F(b).
   Substitute the upper limit b into F to get F(b).
3. Thay cận dưới a vào F, được F(a).
   Substitute the lower limit a into F to get F(a).
4. Lấy F(b) trừ F(a).
   Subtract: F(b) − F(a).

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ 1 đến 3 của (2x + 1/x²) dx. Nguyên hàm F(x) = x² − 1/x. F(3) = 9 − 1/3 = 26/3. F(1) = 1 − 1 = 0. Kết quả: 26/3 − 0 = 26/3. Kiểm tra: ∫ 2x từ 1 đến 3 bằng 8, ∫ 1/x² từ 1 đến 3 bằng 2/3, tổng 26/3.
Evaluate ∫ from 1 to 3 of (2x + 1/x²) dx. An antiderivative is F(x) = x² − 1/x. F(3) = 9 − 1/3 = 26/3. F(1) = 1 − 1 = 0. The result is 26/3 − 0 = 26/3. Check: ∫ 2x from 1 to 3 is 8, ∫ 1/x² from 1 to 3 is 2/3, and the sum is 26/3.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ 0 đến π/2 của cos x dx. Nguyên hàm F(x) = sin x. F(π/2) = 1, F(0) = 0. Kết quả: 1 − 0 = 1. Đó là diện tích của một "gò" cos x nằm giữa trục tung và điểm cos x về 0.
Evaluate ∫ from 0 to π/2 of cos x dx. An antiderivative is F(x) = sin x. F(π/2) = 1 and F(0) = 0. The result is 1 − 0 = 1. That is the area of one "hill" of cos x between the y-axis and the point where cos x reaches 0.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Dùng công thức khi f gián đoạn trong đoạn. Ví dụ ∫ từ −1 đến 1 của 1/x² dx không thể tính bằng F(x) = −1/x, vì 1/x² không bị chặn tại 0 (kết quả −2 là sai). Một lỗi khác: lẫn tích phân với diện tích. ∫ từ 0 đến 2π của sin x dx = 0 vì phần trên và phần dưới trục hoành triệt tiêu nhau.
Using the formula when f is discontinuous inside the interval. For example, ∫ from −1 to 1 of 1/x² dx cannot be done with F(x) = −1/x, because 1/x² is unbounded at 0 (the answer −2 is wrong). Another slip is confusing integral with area. ∫ from 0 to 2π of sin x dx = 0 because the parts above and below the x-axis cancel.

Định lý giá trị trung bình cho tích phân – *The Mean Value Theorem for Integrals*

Giá trị trung bình của f trên [a, b] là (1/(b − a)) · ∫ từ a đến b của f(x) dx. Nếu f liên tục thì đường cong chạm mức trung bình đó ít nhất một lần: tồn tại c trong [a, b] sao cho f(c) = (1/(b − a)) · ∫ từ a đến b của f(x) dx. Hình chữ nhật cao f(c) và rộng b − a có diện tích đúng bằng diện tích dưới đường cong.
The average value of f on [a, b] is (1/(b − a)) · ∫ from a to b of f(x) dx. If f is continuous, the curve reaches that average level at least once: there is a c in [a, b] with f(c) = (1/(b − a)) · ∫ from a to b of f(x) dx. A rectangle of height f(c) and width b − a has exactly the same area as the region under the curve.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho f(x) = x² trên [0, 3]. Tích phân ∫ từ 0 đến 3 của x² dx = [x³/3] = 9. Giá trị trung bình là 9/(3 − 0) = 3. Giải x² = 3 được x = ±√3, chỉ lấy c = √3 ≈ 1,732 vì nằm trong [0, 3].

Let f(x) = x² on [0, 3]. The integral ∫ from 0 to 3 of x² dx = [x³/3] = 9. The average value is 9/(3 − 0) = 3. Solving x² = 3 gives x = ±√3, and only c = √3 ≈ 1.732 is kept because it lies in [0, 3].

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cho f(x) = 2x + 1 trên [0, 4]. Tích phân ∫ từ 0 đến 4 của (2x + 1) dx = [x² + x] = 16 + 4 = 20. Giá trị trung bình là 20/4 = 5. Giải 2c + 1 = 5 được c = 2, nằm trong [0, 4]. Hình chữ nhật cao 5, rộng 4 có diện tích 20, bằng diện tích dưới đường thẳng.
Let f(x) = 2x + 1 on [0, 4]. The integral ∫ from 0 to 4 of (2x + 1) dx = [x² + x] = 16 + 4 = 20. The average value is 20/4 = 5. Solving 2c + 1 = 5 gives c = 2, which lies in [0, 4]. A rectangle of height 5 and width 4 has area 20, the same as the area under the line.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên chia cho b − a nên nhầm tích phân với giá trị trung bình. Lấy cả nghiệm nằm ngoài đoạn. Cho rằng c duy nhất: định lý chỉ bảo đảm có ít nhất một điểm.
Forgetting to divide by b − a, which mixes up the integral with the average value. Keeping a root that lies outside the interval. Assuming c is unique: the theorem only guarantees at least one such point.

1.4. Bảng nguyên hàm cơ bản và định lý biến thiên toàn phần – *1.4. Basic Antiderivative Formulas and the Net Change Theorem*

Nguyên hàm của f là hàm F có đạo hàm bằng f. Mỗi công thức nguyên hàm chỉ là một công thức đạo hàm đọc ngược. Ví dụ đời thường: nếu bạn biết tốc độ xe ở từng giây, việc tìm quãng đường là đi ngược từ "tốc độ" về "vị trí". Muốn kiểm tra kết quả, bạn cứ lấy đạo hàm: ra đúng hàm ban đầu là đúng.
An antiderivative of f is a function F whose derivative equals f. Each antiderivative formula is just a derivative formula read backwards. Think of a speedometer: knowing your speed at every second, finding where you ended up means working backwards from "speed" to "position". To check an answer, differentiate it. If you get the original function back, it is right.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Mười công thức sau phải thuộc (C là hằng số; hàm lượng giác nghịch đảo để mục 1.7).
Learn these ten formulas by heart (C is a constant; inverse trigonometric ones come in a later section).

```
∫ xⁿ dx = x^(n+1)/(n+1) + C, với n ≠ −1
∫ 1/x dx = ln|x| + C
∫ eˣ dx = eˣ + C
∫ aˣ dx = aˣ/(ln a) + C, với a > 0, a ≠ 1
∫ sin x dx = −cos x + C
∫ cos x dx = sin x + C
∫ sec² x dx = tan x + C
∫ csc² x dx = −cot x + C
∫ sec x tan x dx = sec x + C
∫ csc x cot x dx = −csc x + C
```

Với tích phân xác định, bạn bỏ C vì hai hằng số trừ nhau sẽ mất: ∫ từ a đến b của f(x) dx = F(b) − F(a).
For a definite integral you drop C, because the two constants cancel when you subtract: ∫ from a to b of f(x) dx = F(b) − F(a).

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ 0 đến 2 của $(4x^3 - 6x + 1)\,dx$. Tích phân từng số hạng bằng công thức lũy thừa: nguyên hàm là $x^4 - 3x^2 + x$. Kiểm tra bằng đạo hàm: $4x^3 - 6x + 1$, đúng đề. Thế cận 2: $16 - 12 + 2 = 6$. Thế cận 0: 0. Kết quả: $6 - 0 = 6$.
Evaluate ∫ from 0 to 2 of $(4x^3 - 6x + 1)\,dx$. Integrate term by term with the power formula: the antiderivative is $x^4 - 3x^2 + x$. Check by differentiating: $4x^3 - 6x + 1$, which matches the integrand. At the upper limit 2: $16 - 12 + 2 = 6$. At the lower limit 0: 0. Answer: $6 - 0 = 6$.

Hàm chẵn, hàm lẻ trên đoạn đối xứng – *Even and Odd Functions on a Symmetric Interval*

Hàm chẵn có đồ thị đối xứng qua trục tung, như x^2 hay cos x. Hàm lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ, như x^3 hay sin x. Để nhận biết, thay x bằng $-x$: giữ nguyên là chẵn, đổi dấu là lẻ.
An even function has a graph symmetric about the y-axis, like x^2 or cos x. An odd function is symmetric about the origin, like x^3 or sin x. To tell them apart, replace x with $-x$: the same function means even, the opposite sign means odd.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Hàm chẵn: ∫ từ $-a$ đến a của f = 2 · ∫ từ 0 đến a của f. Hàm lẻ: ∫ từ $-a$ đến a của f = 0, vì phần diện tích trên và dưới trục hoành triệt tiêu nhau.
Even f: ∫ from $-a$ to a of f = 2 · ∫ from 0 to a of f. Odd f: ∫ from $-a$ to a of f = 0, because the area above and below the x-axis cancel.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ -2 đến 2 của $(x^3 + 3x^2)\,dx$. Tách làm hai: x^3 là hàm lẻ nên cho 0. $3x^2$ là hàm chẵn nên cho 2 · ∫ từ 0 đến 2 của $3x^2\,dx = 2 \cdot [x^3]$ từ 0 đến $2 = 2 \cdot 8 = 16$. Kết quả: 16.
Evaluate ∫ from -2 to 2 of $(x^3 + 3x^2)\,dx$. Split it in two: x^3 is odd, so it gives 0. $3x^2$ is even, so it gives 2 · ∫ from 0 to 2 of $3x^2\,dx = 2 \cdot [x^3]$ from 0 to $2 = 2 \cdot 8 = 16$. Answer: 16.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ $-\pi/2$ đến $\pi/2$ của $(\cos x + x^5)\,dx$. Thay x bằng $-x$: $\cos(-x) = \cos x$ nên cos x là hàm chẵn; $(-x)^5 = -x^5$ nên x^5 là hàm lẻ. Phần x^5 cho 0. Phần cos x cho 2 · [sin x] từ 0 đến $\pi/2 = 2 \cdot (1 - 0) = 2$. Kết quả: 2.
Evaluate ∫ from $-\pi/2$ to $\pi/2$ of $(\cos x + x^5)\,dx$. Replace x with $-x$: $\cos(-x) = \cos x$, so cos x is even; $(-x)^5 = -x^5$, so x^5 is odd. The x^5 part gives 0. The cos x part gives 2 · [sin x] from 0 to $\pi/2 = 2 \cdot (1 - 0) = 2$. Answer: 2.

Định lý biến thiên toàn phần – *The Net Change Theorem*

Giả sử đại lượng F(t) thay đổi theo thời gian với tốc độ F′(t). Khi đó giá trị cuối bằng giá trị đầu cộng tích phân của tốc độ thay đổi. Đây chính là phần 2 của định lý cơ bản, đọc theo ngôn ngữ ứng dụng.
Suppose a quantity F(t) changes over time at rate F′(t). Its value at the end is then what you started with, plus the total change you get by integrating that rate. This is Part 2 of the Fundamental Theorem, read as an applied statement.

```
F(b) = F(a) + ∫ từ a đến b của F′(t) dt
```

Điểm mạnh của định lý: tích phân tự tính dấu. Khi đại lượng giảm, tốc độ âm, phần đóng góp âm, bạn không cần tách riêng.

The useful part is that the integral handles signs by itself. When the quantity drops, the rate is negative and its contribution is negative, so no special treatment is needed.

1. Gọi tên đại lượng cần tìm và tốc độ thay đổi của nó (vận tốc, lưu lượng…).
   Name the quantity you want and its rate of change (velocity, flow rate…).
2. Xác định khoảng thời gian [a, b] đề cho.
   Read off the time interval [a, b] from the problem.
3. Tìm một nguyên hàm của tốc độ thay đổi.
   Find an antiderivative of the rate.
4. Thế cận b rồi trừ đi giá trị tại cận a.
   Substitute b, then subtract the value at a.
5. Nếu đề hỏi tổng quãng đường, giải $v(t) = 0$, chia khoảng tại nghiệm, rồi lấy tích phân của $|v(t)|$.
   If the problem asks for total distance, solve $v(t) = 0$, split the interval at the roots, and integrate $|v(t)|$.
6. Ghi đơn vị ở kết quả: tốc độ tính bằng m/s và thời gian bằng giây thì tích phân ra mét.
   Write the unit with the result: if the rate is in m/s and time in seconds, the integral comes out in meters.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Một vật chạy thẳng với vận tốc $v(t) = 6 - 2t$ (m/s), $0 \le t \le 5$. Độ dời: $\int$ từ 0 đến 5 của $(6 - 2t)\,dt = [6t - t^2]$ từ 0 đến $5 = 30 - 25 = 5$ m. Vận tốc bằng 0 tại $t = 3$. Trên [0, 3]: $18 - 9 = 9$ m. Trên [3, 5], v âm nên quãng đường là $-[6t - t^2]$ từ 3 đến $5 = -(5 - 9) = 4$ m. Tổng quãng đường: $9 + 4 = 13$ m. Kiểm tra: $9 - 4 = 5$ m, khớp độ dời.
A body moves along a line with velocity $v(t) = 6 - 2t$ (m/s), $0 \le t \le 5$. Displacement: $\int$ from 0 to 5 of $(6 - 2t)\,dt = [6t - t^2]$ from 0 to $5 = 30 - 25 = 5$ m. Velocity is zero at $t = 3$. On [0, 3]: $18 - 9 = 9$ m. On [3, 5], v is negative, so the distance is $-[6t - t^2]$ from 3 to $5 = -(5 - 9) = 4$ m. Total distance: $9 + 4 = 13$ m. Check: $9 - 4 = 5$ m, matching the displacement.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Bể chứa 50 lít nước. Nước chảy vào với tốc độ $r(t) = 3t^2 + 2$ lít/phút. Sau 4 phút, lượng nước thêm vào là $\int$ từ 0 đến 4 của $(3t^2 + 2)\,dt = [t^3 + 2t]$ từ 0 đến $4 = 64 + 8 = 72$ lít. Lượng nước trong bể: $50 + 72 = 122$ lít.
A tank holds 50 liters. Water flows in at rate $r(t) = 3t^2 + 2$ liters per minute. After 4 minutes the added water is $\int$ from 0 to 4 of $(3t^2 + 2)\,dt = [t^3 + 2t]$ from 0 to $4 = 64 + 8 = 72$ liters. Water in the tank: $50 + 72 = 122$ liters.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lẫn độ dời với quãng đường. Tích phân của v cho độ dời, có thể bằng 0 dù vật đã đi xa. Quãng đường cần $|v|$.
Mixing up displacement and distance. The integral of v gives displacement, which can be 0 even if the body travelled far. Distance needs $|v|$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên cộng giá trị đầu. Tích phân chỉ cho lượng thay đổi, muốn biết lượng cuối phải cộng thêm 50 lít ban đầu.
Forgetting the starting value. The integral gives only the change; for the final amount you must add the initial 50 liters.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Dùng quy tắc chẵn lẻ khi cận không đối xứng, hoặc khi hàm không chẵn cũng không lẻ, như $x^2 + x^3$ trên $[-1, 1]$ phải tách trước. Với $1/x$, công thức luôn có $\ln|x|$, không phải x^{n+1}.

Using the symmetry rule when the limits are not symmetric, or when the function is neither even nor odd; a sum like $x^2 + x^3$ on $[-1, 1]$ must be split first. For $1/x$ the answer is $\ln|x|$, never the power formula.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Trừ ngược cận, viết F(a) − F(b) thay vì F(b) − F(a). Kết quả bị đổi dấu. Hãy luôn viết cận trên trước, cận dưới sau.
Subtracting in the wrong order, writing F(a) − F(b) instead of F(b) − F(a). The sign of the result flips. Always put the upper limit first and the lower limit second.

1.5. Phương pháp đổi biến số – *1.5. Integration by Substitution*

Bạn đã biết đạo hàm hàm hợp: đạo hàm của $(3x^2+5)^5$ có thêm thừa số 6x do "lớp trong" $3x^2+5$ sinh ra. Đổi biến số làm ngược lại. Ta nhận ra một biểu thức bên trong và đạo hàm của nó đứng cạnh nhau, rồi gói biểu thức đó thành một chữ u cho gọn. Nó giống việc gọi cả cụm "ly trà đá" là "đồ uống" để dễ đếm.
You already know the chain rule: the derivative of $(3x^2+5)^5$ carries an extra factor 6x from the inner layer $3x^2+5$. Substitution runs this backwards. You spot an inner expression sitting next to its own derivative, then wrap that expression in one letter u. It is like calling "iced tea" simply "a drink" so that counting gets easier.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Đặt u = g(x) thì du = g'(x) dx. Khi đó ∫ f(g(x))·g'(x) dx = ∫ f(u) du. Với tích phân xác định: ∫ từ a đến b của f(g(x))·g'(x) dx = ∫ từ g(a) đến g(b) của f(u) du.
Put u = g(x), so du = g'(x) dx. Then ∫ f(g(x))·g'(x) dx = ∫ f(u) du. For a definite integral: ∫ from a to b of f(g(x))·g'(x) dx = ∫ from g(a) to g(b) of f(u) du.

Các bước làm – *Steps*

1. Tìm biểu thức "ở trong" mà đạo hàm của nó (sai khác một hằng số) xuất hiện ở phần còn lại của tích phân. Thường đó là thứ nằm trong ngoặc, dưới căn, hoặc là đối số của sin, cos, e^.
   Find the "inner" expression whose derivative (up to a constant) appears elsewhere in the integrand. It is usually what sits inside brackets, under a root, or as the argument of sin, cos or e^.
2. Đặt u bằng biểu thức đó.
   Set u equal to that expression.
3. Tính du = u'(x) dx. Rút ra phần cần thay, ví dụ x dx = du/2 nếu du = 2x dx.
   Compute du = u'(x) dx. Solve for the piece you need to replace, for example x dx = du/2 when du = 2x dx.
4. Viết lại toàn bộ tích phân theo u và du. Trong tích phân không được còn chữ x nào.
   Rewrite the whole integral in u and du. No x may be left in it.
5. Với tích phân xác định, đổi cận: thay cận x = a và x = b vào u = g(x) để có cận mới của u.
   For a definite integral, change the limits: put x = a and x = b into u = g(x) to get the new limits for u.

6. Tính nguyên hàm theo u. Tích phân bất định thì thay u về lại x; tích phân xác định thì thay thẳng cận mới, không quay về x.
Find the antiderivative in u. For an indefinite integral, put x back in place of u. For a definite integral, plug in the new limits directly and do not go back to x.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hàm đa thức trong lũy thừa: tính ∫ 6x(3x²+5)⁴ dx. Đặt u = 3x²+5 thì du = 6x dx, đúng phần còn lại. Tích phân thành ∫ u⁴ du = u⁵/5 + C. Thay lại: (3x²+5)⁵/5 + C. Kiểm tra: đạo hàm cho (3x²+5)⁴·6x, khớp đề.
Polynomial inside a power: find ∫ 6x(3x²+5)⁴ dx. Put u = 3x²+5, so du = 6x dx, exactly the leftover factor. The integral becomes ∫ u⁴ du = u⁵/5 + C. Substitute back: (3x²+5)⁵/5 + C. Check: the derivative gives (3x²+5)⁴·6x, which matches.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hàm căn, có hệ số: tính ∫ từ 0 đến 4 của x/√(x²+9) dx. Đặt u = x²+9 thì du = 2x dx, nên x dx = du/2. Đổi cận: x = 0 ra u = 9; x = 4 ra u = 25. Tích phân thành ∫ từ 9 đến 25 của (1/2)·u^(-1/2) du = √u, lấy từ 9 đến 25. Kết quả √25 − √9 = 5 − 3 = 2.
Root with a constant factor: find ∫ from 0 to 4 of x/√(x²+9) dx. Put u = x²+9, so du = 2x dx and x dx = du/2. Change limits: x = 0 gives u = 9; x = 4 gives u = 25. The integral becomes ∫ from 9 to 25 of (1/2)·u^(-1/2) du = √u, evaluated from 9 to 25. Result: √25 − √9 = 5 − 3 = 2.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hàm lượng giác: tính ∫ từ 0 đến π/2 của sin x·cos²x dx. Đặt u = cos x thì du = −sin x dx, nên sin x dx = −du. Đổi cận: x = 0 ra u = 1; x = π/2 ra u = 0. Tích phân thành ∫ từ 1 đến 0 của −u² du. Đổi chỗ hai cận thì đổi dấu: = ∫ từ 0 đến 1 của u² du = 1/3.
Trigonometric case: find ∫ from 0 to π/2 of sin x·cos²x dx. Put u = cos x, so du = −sin x dx and sin x dx = −du. Change limits: x = 0 gives u = 1; x = π/2 gives u = 0. The integral becomes ∫ from 1 to 0 of −u² du. Swapping the two limits flips the sign: = ∫ from 0 to 1 of u² du = 1/3.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hệ số bên trong: ∫ cos(5x) dx. Đặt u = 5x thì du = 5 dx, nên dx = du/5. Ta được (1/5)∫ cos u du = (sin u)/5 + C = sin(5x)/5 + C.
Constant inside: ∫ cos(5x) dx. Put u = 5x, so du = 5 dx and dx = du/5. We get (1/5)∫ cos u du = (sin u)/5 + C = sin(5x)/5 + C.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Hàm mũ: tính ∫ từ 0 đến 1 của x·e^(x²) dx. Đặt u = x² thì du = 2x dx, nên x dx = du/2. Đổi cận: x = 0 ra u = 0; x = 1 ra u = 1. Tích phân thành (1/2)∫ từ 0 đến 1 của e^u du = (1/2)(e − 1). Với e ≈ 2,718 thì kết quả xấp xỉ 0,859.
Exponential case: find ∫ from 0 to 1 of x·e^(x²) dx. Put u = x², so du = 2x dx and x dx = du/2. Change limits: x = 0 gives u = 0; x = 1 gives u = 1. The integral becomes (1/2)∫ from 0 to 1 of e^u du = (1/2)(e − 1). With e ≈ 2.718 the result is about 0.859.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Phân thức: tính ∫ 2x/(x²+1) dx. Đặt u = x²+1 thì du = 2x dx, khớp tử số. Tích phân thành ∫ du/u = ln|u| + C. Vì x²+1 luôn dương nên đáp số là ln(x²+1) + C.
Fraction: find ∫ 2x/(x²+1) dx. Put u = x²+1, so du = 2x dx, which matches the numerator. The integral becomes ∫ du/u = ln|u| + C. Since x²+1 is always positive, the answer is ln(x²+1) + C.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên đổi cận. Ở ví dụ lượng giác, nếu giữ cận 0 và π/2 cho biến u, bạn tính ra (π/2)³/3 = π³/24, sai hẳn so với 1/3. Hai cách đúng: đổi cận theo u, hoặc tìm nguyên hàm theo x rồi mới thay cận x. Đừng trộn hai cách.
Forgetting to change the limits. In the trigonometric example, if you keep 0 and π/2 as limits for u, you get (π/2)³/3 = π³/24, far from the correct 1/3. Two correct routes exist: change the limits to u-values, or find the antiderivative in x and then use the x-limits. Do not mix them.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Thiếu hệ số. Ở ví dụ căn, bỏ 1/2 sẽ ra 2√u từ 9 đến 25 = 4, gấp đôi đáp số đúng 2. Hãy viết rõ dx hoặc x dx bằng bao nhiêu du trước khi thay.
Missing constant factor. In the root example, dropping the 1/2 gives 2√u from 9 to 25 = 4, twice the correct answer 2. Always write what dx or x dx equals in terms of du before substituting.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Để sót x sau khi đổi biến. Nếu còn x, hoặc đổi biến chưa đúng, hoặc phải biểu diễn x qua u (ví dụ u = x+1 thì x = u−1).
Leaving x behind after the change. If x remains, either the substitution is wrong or you must express x through u (for example, u = x+1 gives x = u−1).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chọn u mà đạo hàm của nó không có mặt. Với ∫ e^(x²) dx, đặt u = x² cho du = 2x dx, nhưng trong đề không có thừa số x để thay. Cách này không dùng được ở đây. Hãy kiểm tra thừa số đi kèm trước khi chốt u.
Choosing a u whose derivative is not present. For ∫ e^(x²) dx, putting u = x² gives du = 2x dx, but the integrand has no factor x to replace. The method does not apply here. Check the accompanying factor before settling on u.

MẸO / TIP – Nguyên hàm bất định luôn kiểm tra được: đạo hàm kết quả rồi so với hàm dưới dấu tích phân. Với tích phân xác định, nhớ rằng cận dưới của u có thể lớn hơn cận trên mà không sao.
An indefinite answer can always be checked: differentiate it and compare with the integrand. For a definite integral, remember that the lower u-limit may be larger than the upper one, and that is fine.

1.6. Tích phân hàm mũ và hàm logarit – *1.6. Integrals of Exponential and Logarithmic Functions*

Hàm e^x có tính chất đặc biệt: đạo hàm của nó là chính nó, nên nguyên hàm của nó cũng là chính nó. Nguyên hàm (hàm mà đạo hàm ra hàm ban đầu) của hàm mũ và hàm logarit được dùng nhiều nhất trong bài toán tăng trưởng và phân rã.
The function e^x has a special property: its derivative is itself, so its antiderivative (a function whose derivative gives back the original) is itself too. Antiderivatives of exponential and logarithmic functions appear constantly in growth and decay problems.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – ∫ e^x dx = e^x + C. ∫ a^x dx = a^x / ln a + C (a > 0, a ≠ 1). ∫ (1/x) dx = ln|x| + C (x ≠ 0). Công thức tổng quát: ∫ f'(x)/f(x) dx = ln|f(x)| + C.
∫ e^x dx = e^x + C. ∫ a^x dx = a^x / ln a + C (a > 0, a ≠ 1). ∫ (1/x) dx = ln|x| + C (x ≠ 0). General form: ∫ f'(x)/f(x) dx = ln|f(x)| + C.

Dấu trị tuyệt đối có lý do: ln x chỉ có nghĩa khi x > 0, còn 1/x tồn tại cả khi x < 0. Với x < 0, đạo hàm của ln(−x) cũng bằng 1/x, nên ln|x| đúng trên cả hai phía của 0.
The absolute value has a reason: ln x only exists for x > 0, but 1/x is defined for x < 0 too. For x < 0, the derivative of ln(−x) is also 1/x, so ln|x| works on both sides of 0.

Cách làm khi có đổi biến – *Method with substitution*

Đổi biến là đặt một biểu thức phức tạp thành chữ u cho dễ nhìn, như gọi cả cụm "ba quả cam" là "một túi". Với hàm mũ, ta thường đặt u bằng phần số mũ; với 1/x dạng phân số, ta đặt u bằng mẫu số.

Substitution means renaming a messy expression as a single letter u, like calling "three oranges" one "bag". For exponentials, usually let u be the exponent; for fractions, let u be the denominator.

1. Tìm trong biểu thức một phần u mà đạo hàm của nó xuất hiện (sai khác một hằng số) ở phần còn lại.
   Find a part u whose derivative appears (up to a constant factor) in the rest of the expression.
2. Tính du = u' dx, rồi viết lại toàn bộ tích phân theo u và du. Nếu thiếu một hằng số, chia hoặc nhân bù.
   Compute du = u' dx and rewrite the whole integral in u and du. If a constant is missing, compensate by multiplying or dividing.
3. Áp dụng công thức cơ bản theo u.
   Apply the basic formula in u.
4. Thay u trở lại bằng biểu thức theo x và thêm C. Với tích phân xác định, đổi cả cận sang u.
   Substitute back to x and add C. For definite integrals, convert the limits to u instead.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ x² e^(x³) dx. Đặt u = x³, du = 3x² dx, nên x² dx = du/3. Tích phân thành (1/3) ∫ e^u du = (1/3) e^u + C = (1/3) e^(x³) + C. Kiểm tra: đạo hàm của kết quả là (1/3) · e^(x³) · 3x² = x² e^(x³). Đúng.
Compute ∫ x² e^(x³) dx. Let u = x³, du = 3x² dx, so x² dx = du/3. The integral becomes (1/3) ∫ e^u du = (1/3) e^u + C = (1/3) e^(x³) + C. Check: the derivative is (1/3) · e^(x³) · 3x² = x² e^(x³). Correct.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ 0 đến 3 của 2^x dx. Nguyên hàm là 2^x / ln 2. Thay cận: (2³ − 2⁰) / ln 2 = 7 / ln 2 ≈ 7 / 0,6931 ≈ 10,10.
Compute ∫ from 0 to 3 of 2^x dx. The antiderivative is 2^x / ln 2. Plug in the limits: (2³ − 2⁰) / ln 2 = 7 / ln 2 ≈ 7 / 0.6931 ≈ 10.10.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ 0 đến 1 của e^(−2x) dx. Nguyên hàm là −e^(−2x)/2, vì đạo hàm của −e^(−2x)/2 đúng bằng e^(−2x). Thay cận: −e^(−2)/2 + e⁰/2 = (1 − e^(−2))/2. Với e^(−2) ≈ 0,1353, kết quả ≈ 0,8647 / 2 ≈ 0,432.
Compute ∫ from 0 to 1 of e^(−2x) dx. The antiderivative is −e^(−2x)/2, because the derivative of −e^(−2x)/2 is exactly e^(−2x). Plug in the limits: −e^(−2)/2 + e⁰/2 = (1 − e^(−2))/2. With e^(−2) ≈ 0.1353, the result is ≈ 0.8647 / 2 ≈ 0.432.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ 0 đến 1 của 2x e^(x²) dx. Đặt u = x², du = 2x dx. Khi x = 0 thì u = 0; khi x = 1 thì u = 1. Tích phân thành ∫ từ 0 đến 1 của e^u du = e − 1 ≈ 1,718. Lúc này không cần thay u trở lại x.
Compute ∫ from 0 to 1 of 2x e^(x²) dx. Let u = x², du = 2x dx. When x = 0, u = 0; when x = 1, u = 1. The integral becomes ∫ from 0 to 1 of e^u du = e − 1 ≈ 1.718. There is no need to switch back to x.

Tích phân dạng f'(x)/f(x) – *Integrals of the form f'(x)/f(x)*

Khi tử số là đạo hàm của mẫu số, kết quả là logarit của mẫu số. Đặt u = f(x) thì du = f'(x) dx, và tích phân thành ∫ du/u = ln|u| + C.

When the numerator is the derivative of the denominator, the answer is the logarithm of the denominator. Let u = f(x), so du = f'(x) dx and the integral becomes ∫ du/u = ln|u| + C.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int 2x / (x^2 + 1)\,dx$. Đặt $u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$. Kết quả $\ln|x^2 + 1| + C = \ln(x^2 + 1) + C$, vì $x^2 + 1$ luôn dương nên bỏ được dấu trị tuyệt đối.
Compute $\int 2x / (x^2 + 1)\,dx$. Let $u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$. The result is $\ln|x^2 + 1| + C = \ln(x^2 + 1) + C$, and the absolute value can be dropped because $x^2 + 1$ is always positive.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int 3 / (2x + 5)\,dx$. Đặt $u = 2x + 5$, $du = 2\,dx$, nên $dx = du/2$. Tích phân thành $(3/2) \int du/u = (3/2) \ln|2x + 5| + C$.
Compute $\int 3 / (2x + 5)\,dx$. Let $u = 2x + 5$, $du = 2\,dx$, so $dx = du/2$. The integral becomes $(3/2) \int du/u = (3/2) \ln|2x + 5| + C$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int$ từ 0 đến $\pi/4$ của $\tan x\,dx$. Viết $\tan x = \sin x / \cos x$. Đặt $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$. Nguyên hàm là $-\ln|\cos x|$. Thay cận: $-\ln(\sqrt{2}/2) + \ln 1 = \ln(2/\sqrt{2}) = \ln \sqrt{2} = (1/2) \ln 2 \approx 0{,}347$.
Compute $\int$ from 0 to $\pi/4$ of $\tan x\,dx$. Write $\tan x = \sin x / \cos x$. Let $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$. The antiderivative is $-\ln|\cos x|$. Plug in the limits: $-\ln(\sqrt{2}/2) + \ln 1 = \ln(2/\sqrt{2}) = \ln \sqrt{2} = (1/2) \ln 2 \approx 0.347$.

Bài toán tăng trưởng dân số – *Population growth problem*

VÍ DỤ / EXAMPLE – Dân số một thị trấn tăng với tốc độ $P'(t) = 1200\ e^{(0{,}03t)}$ người mỗi năm, t tính bằng năm kể từ hôm nay. Hiện có 50 000 người. Tìm P(t) và dân số sau 10 năm. Lấy nguyên hàm: $P(t) = 1200 \cdot e^{(0{,}03t) / 0{,}03} + C = 40\,000\ e^{(0{,}03t)} + C$. Điều kiện $P(0) = 50\,000$ cho $40\,000 + C = 50\,000$, nên $C = 10\,000$. Vậy $P(t) = 40\,000\ e^{(0{,}03t)} + 10\,000$. Với $t = 10$: $e^{0{,}3} \approx 1{,}3499$, nên $P(10) \approx 40\,000 \cdot 1{,}3499 + 10\,000 \approx 63\,994$, tức khoảng 64 000 người.
A town's population grows at $P'(t) = 1200\ e^{(0.03t)}$ people per year, with t in years from today. It now has 50,000 people. Find P(t) and the population after 10 years. Antiderivative: $P(t) = 1200 \cdot e^{(0.03t)} / 0.03 + C = 40{,}000\ e^{(0.03t)} + C$. The condition $P(0) = 50{,}000$ gives $40{,}000 + C = 50{,}000$, so $C = 10{,}000$. Hence $P(t) = 40{,}000\ e^{(0.03t)} + 10{,}000$. At $t = 10$: $e^{0.3} \approx 1.3499$, so $P(10) \approx 40{,}000 \cdot 1.3499 + 10{,}000 \approx 63{,}994$, about 64,000 people.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên chia cho hệ số trong số mũ: $\int e^{(kx)}\,dx = e^{(kx)}/k + C$, không phải $e^{(kx)} + C$.
Forgetting to divide by the coefficient in the exponent: $\int e^{(kx)}\,dx = e^{(kx)}/k + C$, not $e^{(kx)} + C$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết $\int a^x\,dx = a^{(x+1)}/(x+1)$. Đó là quy tắc lũy thừa, chỉ dùng khi x là cơ số. Với a^x, mẫu số là $\ln a$.
Writing $\int a^x\,dx = a^{(x+1)}/(x+1)$. That is the power rule, valid only when x is the base. For a^x, the denominator is $\ln a$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bỏ dấu trị tuyệt đối khi biểu thức có thể âm, chẳng hạn $\int dx/(x - 2) = \ln|x - 2| + C$. Và $e^{(x^2)}$ không có nguyên hàm sơ cấp: chỉ đổi biến được khi có sẵn thừa số x.
Dropping the absolute value when the expression can be negative, for example $\int dx/(x - 2) = \ln|x - 2| + C$. Also, $e^{(x^2)}$ has no elementary antiderivative: substitution only works when a factor x is already there.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đổi biến ở tích phân xác định mà vẫn giữ cận cũ của x. Hoặc đổi cận sang u, hoặc thay u về x trước rồi mới thay cận. Trộn hai cách sẽ ra số

sai.
Substituting in a definite integral but keeping the old x limits. Either convert the limits to u, or switch back to x first and then plug in the limits. Mixing the two gives a wrong number.

MẸO / TIP – Luôn đạo hàm kết quả để kiểm tra. Nếu ra đúng hàm dưới dấu tích phân thì bạn làm đúng.
Always differentiate your answer to check. If you get the original integrand back, you are right.

1.7. Tích phân dẫn tới hàm lượng giác ngược – *1.7. Integrals Leading to Inverse Trigonometric Functions*

Ba tích phân này là kết quả "đọc ngược" từ đạo hàm của hàm lượng giác ngược. Gặp mẫu số có dạng bình phương cộng hoặc trừ một hằng số, bạn nhận ra dạng và viết thẳng đáp án, không phải tính từ đầu. Trong cả ba dạng, a là số dương, u là biểu thức chứa x, còn du là vi phân của u.
These three integrals come from reading the derivatives of inverse trig functions backwards. When the denominator is a square plus or minus a constant, you recognize the form and write the answer directly. In all three forms, a is a positive number, u is an expression in x, and du is the differential of u.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Dạng arcsin: $\int du/\sqrt{(a^2 - u^2)} = \arcsin(u/a) + C$, với $|u| < a$. Dạng arctan: $\int du/(a^2 + u^2) = (1/a)\cdot\arctan(u/a) + C$. Dạng arcsec: $\int du/(u\cdot\sqrt{(u^2 - a^2)}) = (1/a)\cdot\text{arcsec}(|u|/a) + C$, với $|u| > a$.
Arcsin form: $\int du/\sqrt{(a^2 - u^2)} = \arcsin(u/a) + C$, for $|u| < a$. Arctan form: $\int du/(a^2 + u^2) = (1/a)\cdot\arctan(u/a) + C$. Arcsec form: $\int du/(u\cdot\sqrt{(u^2 - a^2)}) = (1/a)\cdot\text{arcsec}(|u|/a) + C$, for $|u| > a$.

Còn ba hàm arccos, arccot, arccsc thì sao? Chúng chỉ là phiên bản đổi dấu của ba hàm trên. Nếu tích phân ra dấu âm, bạn đưa dấu trừ ra ngoài rồi dùng ba công thức đã có. Không cần học thêm công thức. Ví dụ $\int -dx/\sqrt{(1 - x^2)} = -\arcsin(x) + C$, và đây cũng chính là $\arccos(x) + C$, vì hai kết quả chỉ khác nhau một hằng số.
What about arccos, arccot and arccsc? They are the same three results with the sign flipped. If a minus sign appears, pull it outside the integral and use the three formulas above. There is nothing extra to memorize. For example, $\int -dx/\sqrt{(1 - x^2)} = -\arcsin(x) + C$, and this is also $\arccos(x) + C$, since the two results differ only by a constant.

Cách nhận dạng và đưa về dạng chuẩn – *How to spot the form and reach the standard shape*

1. Nhìn mẫu số. Có căn bậc hai của (hằng số − bình phương) thì chọn arcsin. Có (hằng số + bình phương) không căn thì chọn arctan. Có u nhân căn của (bình phương − hằng số) thì chọn arcsec.
   Look at the denominator. A square root of (constant − square) means arcsin. (Constant + square) with no root means arctan. A factor u times the root of (square − constant) means arcsec.
2. Đọc a từ hằng số: a^2 là số đứng riêng, nên a là căn bậc hai của nó. Với 9 thì a = 3, với 16 thì a = 4.

Read a from the constant: a^2 is the stand-alone number, so a is its square root. For 9, a = 3; for 16, a = 4.

3. Đặt u là phần được bình phương, rồi tính du. Nếu u = 2x thì du = 2dx, tức dx = du/2.
   Let u be the part being squared, then compute du. If u = 2x, then du = 2dx, so dx = du/2.
4. Nếu mẫu là tam thức bậc hai (có số hạng x) thì bình phương đủ trước: $x^2 + bx + c = (x + b/2)^2 + (c - b^2/4)$. Khi hệ số của x^2 là −1, đặt dấu trừ ra ngoài trước.
   If the denominator is a quadratic with an x term, complete the square first: $x^2 + bx + c = (x + b/2)^2 + (c - b^2/4)$. When the x^2 coefficient is −1, factor the minus sign out first.
5. Thay vào công thức, nhớ nhân thêm hệ số từ du, rồi đổi u về x.
   Plug into the formula, remember the extra factor from du, then convert u back to x.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int dx/\sqrt{(9 - 4x^2)}$. Mẫu có căn của (9 − bình phương), nên dùng arcsin với a = 3. Đặt u = 2x thì du = 2dx. Tích phân thành $(1/2)\cdot\int du/\sqrt{(9 - u^2)} = (1/2)\cdot\arcsin(u/3) + C = (1/2)\cdot\arcsin(2x/3) + C$.
Compute $\int dx/\sqrt{(9 - 4x^2)}$. The denominator has a root of (9 − square), so use arcsin with a = 3. Let u = 2x, so du = 2dx. The integral becomes $(1/2)\cdot\int du/\sqrt{(9 - u^2)} = (1/2)\cdot\arcsin(u/3) + C = (1/2)\cdot\arcsin(2x/3) + C$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ −2 đến 1 của $dx/(x^2 + 4x + 13)$. Bình phương đủ: $x^2 + 4x + 13 = (x + 2)^2 + 9$, nên u = x + 2, a = 3, du = dx. Nguyên hàm là $(1/3)\cdot\arctan((x + 2)/3)$. Tại x = 1: $(1/3)\cdot\arctan(1) = (1/3)\cdot(\pi/4) = \pi/12$. Tại x = −2: $(1/3)\cdot\arctan(0) = 0$. Kết quả: π/12.
Compute ∫ from −2 to 1 of $dx/(x^2 + 4x + 13)$. Complete the square: $x^2 + 4x + 13 = (x + 2)^2 + 9$, so u = x + 2, a = 3, du = dx. The antiderivative is $(1/3)\cdot\arctan((x + 2)/3)$. At x = 1: $(1/3)\cdot\arctan(1) = (1/3)\cdot(\pi/4) = \pi/12$. At x = −2: $(1/3)\cdot\arctan(0) = 0$. The result is π/12.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int dx/\sqrt{(5 - 4x - x^2)}$. Đưa dấu trừ ra: $5 - 4x - x^2 = 5 - (x^2 + 4x) = 5 - [(x + 2)^2 - 4] = 9 - (x + 2)^2$. Đặt u = x + 2, a = 3, du = dx. Kết quả: $\arcsin((x + 2)/3) + C$.
Compute $\int dx/\sqrt{(5 - 4x - x^2)}$. Factor out the minus sign: $5 - 4x - x^2 = 5 - (x^2 + 4x) = 5 - [(x + 2)^2 - 4] = 9 - (x + 2)^2$. Let u = x + 2, a = 3, du = dx. The result is $\arcsin((x + 2)/3) + C$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int dx/(x\cdot\sqrt{(9x^2 - 16)})$. Đặt u = 3x, a = 4. Khi đó x = u/3 và dx = du/3, nên $(du/3)/((u/3)\cdot\sqrt{(u^2 - 16)}) = du/(u\cdot\sqrt{(u^2 - 16)})$. Kết quả: $(1/4)\cdot\text{arcsec}(3|x|/4) + C$.
Compute $\int dx/(x\cdot\sqrt{(9x^2 - 16)})$. Let u = 3x, a = 4. Then x = u/3 and dx = du/3, so $(du/3)/((u/3)\cdot\sqrt{(u^2 - 16)}) = du/(u\cdot\sqrt{(u^2 - 16)})$. The result is $(1/4)\cdot\text{arcsec}(3|x|/4) + C$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int dx/(4x^2 + 8x + 13)$, trường hợp hệ số của x^2 khác 1. Đặt hệ số ra ngoài: $4x^2 + 8x + 13 = 4(x + 1)^2 + 9 = (2(x + 1))^2 + 9$. Đặt u = 2(x + 1), a = 3, du = 2dx. Tích phân thành $(1/2)\cdot\int du/(u^2 + 9) = (1/2)\cdot(1/3)\cdot\arctan(u/3) + C = (1/6)\cdot\arctan(2(x + 1)/3) + C$. Kiểm tra bằng đạo hàm: $(1/6)\cdot[1/(1 + 4(x + 1)^2/9)]\cdot(2/3) = 1/(9 + 4(x + 1)^2)$, đúng bằng hàm ban đầu.
Compute $\int dx/(4x^2 + 8x + 13)$, a case where the x^2 coefficient is not 1. Factor it out: $4x^2 + 8x + 13 = 4(x + 1)^2 + 9 = (2(x + 1))^2 + 9$. Let u = 2(x + 1), a = 3, du = 2dx. The integral becomes $(1/2)\cdot\int du/(u^2 + 9) = (1/2)\cdot(1/3)\cdot\arctan(u/3) + C = (1/6)\cdot\arctan(2(x + 1)/3) + C$. Check by differentiating: $(1/6)\cdot[1/(1 + 4(x + 1)^2/9)]\cdot(2/3) = 1/(9 + 4(x + 1)^2)$, which matches the original integrand.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int x\,dx/(x^4 + 1)$. Mẫu là $(x^2)^2 + 1^2$, nên a = 1 và u = x^2. Khi đó du = 2x dx, tức x dx = du/2. Tích phân thành $(1/2)\cdot\int du/(u^2 + 1) = (1/2)\cdot\arctan(u) + C = (1/2)\cdot\arctan(x^2) + C$.

Compute ∫ x dx/(x⁴ + 1). The denominator is (x²)² + 1², so a = 1 and u = x². Then du = 2x dx, so x dx = du/2. The integral becomes (1/2)·∫ du/(u² + 1) = (1/2)·arctan(u) + C = (1/2)·arctan(x²) + C.

Chỗ hay sai – *Common mistakes*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm arcsin với arctan. Hãy nhìn có căn không và dấu trước bình phương. ∫ dx/√(4 − x²) cho arcsin(x/2), còn ∫ dx/(4 + x²) cho (1/2)·arctan(x/2). Mẫu có căn mà dấu cộng, như √(4 + x²), thì không thuộc ba dạng này.
Mixing up arcsin and arctan. Check whether there is a root and what sign sits in front of the square. ∫ dx/√(4 − x²) gives arcsin(x/2), while ∫ dx/(4 + x²) gives (1/2)·arctan(x/2). A root with a plus sign, like √(4 + x²), fits none of these three forms.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên hệ số 1/a ở arctan và arcsec. Arcsin không có hệ số này, nên dễ bị "lây" sang hai dạng kia.
Forgetting the factor 1/a in arctan and arcsec. Arcsin has no such factor, so people carry that habit over to the other two.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên bù hệ số khi u = kx. Nếu u = 2x mà bạn không nhân 1/2 thì đáp án sai gấp đôi. Đạo hàm lại đáp án để kiểm tra.
Forgetting to compensate when u = kx. If u = 2x and you skip the factor 1/2, the answer is off by a factor of 2. Differentiate your answer to check.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bình phương đủ khi hệ số của x² khác 1 mà không đặt hệ số ra ngoài. Ví dụ 4x² + 8x + 13: phải viết 4(x² + 2x) + 13 = 4(x + 1)² + 9, rồi đặt u = 2(x + 1).
Completing the square when the x² coefficient is not 1 without factoring it out first. For 4x² + 8x + 13, write 4(x² + 2x) + 13 = 4(x + 1)² + 9, then let u = 2(x + 1).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chọn u mà trong tích phân không có phần du đi kèm. Với ∫ x dx/(x⁴ + 1), nếu đặt u = x² thì bắt buộc phải có x dx ở tử để thành du/2. Nếu tử là 1 chứ không phải x, cách đặt này không dùng được.
Choosing a u when the matching du is not in the integral. For ∫ x dx/(x⁴ + 1), letting u = x² works only because x dx sits in the numerator and becomes du/2. If the numerator were 1 instead of x, this substitution would not work.

MẸO / TIP – Sau khi có đáp án, đạo hàm ngược lại. Đạo hàm của arctan(u/a) là (1/a)·u′/(1 + u²/a²), phải ra đúng hàm dưới dấu tích phân.
Once you have an answer, differentiate it. The derivative of arctan(u/a) is (1/a)·u′/(1 + u²/a²), which must match the original integrand.

1.8. Logarit tự nhiên định nghĩa bằng tích phân và hàm hyperbolic – *1.8. The Natural Logarithm as an Integral and Hyperbolic Functions*

Ở các lớp trước bạn dùng ln x và e^x như đồ có sẵn. Ở đây ta dựng chúng từ đầu bằng tích phân. Với x > 0, định nghĩa ln x là diện tích dưới đường y = 1/t tính từ t = 1 đến t = x: ln x = ∫ từ 1 đến x của (1/t) dt. Hình dung như đo quãng đường từ cột mốc số 1 đến cột mốc số x, đi ngược thì đo ra số âm.

We build ln x and e^x from scratch using integrals. For x > 0, define ln x as the area under y = 1/t from t = 1 to t = x: ln x = ∫ from 1 to x of (1/t) dt. Think of measuring distance from marker 1 to marker x: walking backward gives a negative number.

Tính chất suy ra từ định nghĩa – ***Properties that follow from the definition***

- ln 1 = 0, vì tích phân từ 1 đến 1 có bề rộng bằng 0. Nếu x > 1 thì ln x > 0. Nếu 0 < x < 1 thì ln x < 0 (cận trên nhỏ hơn cận dưới).
  ln 1 = 0, because an integral from 1 to 1 has zero width. If x > 1 then ln x > 0. If 0 < x < 1 then ln x < 0 (the upper limit is below the lower one).
- Theo định lý cơ bản của giải tích, (ln x)′ = 1/x > 0. Vậy ln x luôn tăng, nên có hàm ngược. Hàm ngược đó là e^x, và số e là số duy nhất thỏa ln e = 1.
  By the fundamental theorem of calculus, (ln x)′ = 1/x > 0. So ln x is always increasing and has an inverse. That inverse is e^x, and e is the unique number with ln e = 1.

Tính chất ln(ab) = ln a + ln b cũng chứng minh được mà không cần biết trước logarit là gì. Cách làm gồm các bước sau.

The rule ln(ab) = ln a + ln b can also be proved without knowing in advance what a logarithm is. The steps are as follows.

1. Cố định a > 0, xét hàm f(x) = ln(ax). Đạo hàm bằng quy tắc hàm hợp: f′(x) = (1/(ax))·a = 1/x.
   Fix a > 0 and consider f(x) = ln(ax). By the chain rule, f′(x) = (1/(ax))·a = 1/x.
2. Hai hàm ln(ax) và ln x có cùng đạo hàm 1/x, nên chúng hơn kém nhau một hằng số: ln(ax) = ln x + C.
   The functions ln(ax) and ln x have the same derivative 1/x, so they differ by a constant: ln(ax) = ln x + C.
3. Thay x = 1: ln a = ln 1 + C = C. Vậy ln(ax) = ln x + ln a.
   Put x = 1: ln a = ln 1 + C = C. Hence ln(ax) = ln x + ln a.

> **VÍ DỤ / EXAMPLE** – Cho ln 2 ≈ 0,6931 và ln 3 ≈ 1,0986. Tính ln 6 và ln(1/4). Vì 6 = 2·3 nên ln 6 = ln 2 + ln 3 ≈ 1,7917. Vì 1/4 = 2^{-2} nên ln(1/4) = −2·ln 2 ≈ −1,3862.
> *Given ln 2 ≈ 0.6931 and ln 3 ≈ 1.0986, find ln 6 and ln(1/4). Since 6 = 2·3, ln 6 = ln 2 + ln 3 ≈ 1.7917. Since 1/4 = 2^{-2}, ln(1/4) = −2·ln 2 ≈ −1.3862.*

Từ đó suy ra ln(a/b) = ln a − ln b và ln(a^r) = r·ln a. Với r hữu tỉ hay vô tỉ đều đúng, nên ta định nghĩa a^x = e^(x·ln a) cho mọi x thực.

From this follow ln(a/b) = ln a − ln b and ln(a^r) = r·ln a. These hold for rational and irrational r alike, which is why we define a^x = e^(x·ln a) for every real x.

Với a > 0 và a ≠ 1, định nghĩa trên cho (a^x)′ = a^x·ln a, nên ∫ a^x dx = a^x/ln a + C. Logarit cơ số a của x được viết qua logarit tự nhiên: ln x / ln a. Chẳng hạn logarit cơ số 2 của 8 bằng ln 8 / ln 2 = 3·ln 2 / ln 2 = 3.

For a > 0 and a ≠ 1, this definition gives (a^x)′ = a^x·ln a, so ∫ a^x dx = a^x/ln a + C. The logarithm of x to base a is written through the natural log: ln x / ln a. For instance, the base-2 logarithm of 8 is ln 8 / ln 2 = 3·ln 2 / ln 2 = 3.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ 0 đến 3 của 2^x dx. Nguyên hàm là 2^x/ln 2. Lấy từ 0 đến 3: (8 − 1)/ln 2 = 7/0,6931 ≈ 10,099.
Compute ∫ from 0 to 3 of 2^x dx. The antiderivative is 2^x/ln 2. Evaluated from 0 to 3: (8 − 1)/ln 2 = 7/0.6931 ≈ 10.099.

Hàm hyperbolic – *Hyperbolic functions*

Hàm sinh và cosh là hai tổ hợp quen thuộc của e^x và e^(−x). sinh x = (e^x − e^(−x))/2 và cosh x = (e^x + e^(−x))/2. Chúng hay gặp khi giải phương trình vi phân, vì dễ viết hơn các hàm mũ. Hàm còn lại là tanh x = sinh x / cosh x.

The functions sinh and cosh are two familiar combinations of e^x and e^(−x). sinh x = (e^x − e^(−x))/2 and cosh x = (e^x + e^(−x))/2. They turn up often in differential equations because they are easier to write than the exponentials. A third one is tanh x = sinh x / cosh x.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – cosh² x − sinh² x = 1. (sinh x)′ = cosh x, (cosh x)′ = sinh x (không có dấu trừ), (tanh x)′ = 1/cosh² x. Tích phân: ∫ sinh x dx = cosh x + C, ∫ cosh x dx = sinh x + C.
cosh² x − sinh² x = 1. (sinh x)′ = cosh x, (cosh x)′ = sinh x (no minus sign), (tanh x)′ = 1/cosh² x. Integrals: ∫ sinh x dx = cosh x + C, ∫ cosh x dx = sinh x + C.

Đẳng thức đầu kiểm tra được ngay. Bình phương rồi trừ: (e^x + e^(−x))² − (e^x − e^(−x))² = 4·e^x·e^(−x) = 4. Chia cho 4 thì được 1.

The first identity is quick to check. Square both and subtract: (e^x + e^(−x))² − (e^x − e^(−x))² = 4·e^x·e^(−x) = 4. Divide by 4 and you get 1.

Hàm ngược tính được bằng logarit: sinh⁻¹ x = ln(x + √(x² + 1)) với mọi x; cosh⁻¹ x = ln(x + √(x² − 1)) với x ≥ 1; tanh⁻¹ x = (1/2)·ln((1 + x)/(1 − x)) với |x| < 1. Đạo hàm của chúng lần lượt là 1/√(x² + 1), 1/√(x² − 1) (x > 1) và 1/(1 − x²). Vì thế ∫ dx/√(x² + a²) = sinh⁻¹(x/a) + C = ln(x + √(x² + a²)) + C.

The inverses can be written with logarithms: sinh⁻¹ x = ln(x + √(x² + 1)) for all x; cosh⁻¹ x = ln(x + √(x² − 1)) for x ≥ 1; tanh⁻¹ x = (1/2)·ln((1 + x)/(1 − x)) for |x| < 1. Their derivatives are 1/√(x² + 1), 1/√(x² − 1) (x > 1) and 1/(1 − x²). Hence ∫ dx/√(x² + a²) = sinh⁻¹(x/a) + C = ln(x + √(x² + a²)) + C.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ từ 0 đến 4 của dx/√(x² + 9). Dùng a = 3: kết quả là ln(x + √(x² + 9)) lấy từ 0 đến 4. Tại x = 4 được ln(4 + 5) = ln 9. Tại x = 0 được ln 3. Hiệu: ln 9 − ln 3 = ln 3 ≈ 1,0986.
Compute ∫ from 0 to 4 of dx/√(x² + 9). With a = 3 the antiderivative is ln(x + √(x² + 9)) evaluated from 0 to 4. At x = 4 we get ln(4 + 5) = ln 9. At x = 0 we get ln 3. The difference: ln 9 − ln 3 = ln 3 ≈ 1.0986.

Dây xích treo – *The hanging chain*

Sợi dây xích mềm treo giữa hai điểm có dạng y = a·cosh(x/a), gọi là đường dây xích. Giá trị a phụ thuộc lực căng và trọng lượng của dây. Điểm thấp nhất nằm ở x = 0, có y = a.

A flexible chain hanging between two points takes the shape $y = a\cdot\cosh(x/a)$, called a catenary. The value of a depends on the tension and the weight of the chain. The lowest point is at $x = 0$, where $y = a$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Dây có dạng $y = 10\cdot\cosh(x/10)$ (mét), với $-10 \le x \le 10$. Ta có $y' = \sinh(x/10)$, nên $\sqrt{(1 + y'^2)} = \sqrt{(1 + \sinh^2(x/10))} = \cosh(x/10)$. Độ dài = ∫ từ -10 đến 10 của $\cosh(x/10)\,dx = 10\cdot\sinh(x/10)$ lấy từ -10 đến 10 $= 10\cdot(\sinh 1 - \sinh(-1)) = 20\cdot\sinh 1$. Vì $\sinh 1 \approx 1{,}1752$ nên độ dài ≈ 23,50 m.
A chain has the shape $y = 10\cdot\cosh(x/10)$ (meters), for $-10 \le x \le 10$. Here $y' = \sinh(x/10)$, so $\sqrt{(1 + y'^2)} = \sqrt{(1 + \sinh^2(x/10))} = \cosh(x/10)$. Length = ∫ from -10 to 10 of $\cosh(x/10)\,dx = 10\cdot\sinh(x/10)$ evaluated from -10 to 10 $= 10\cdot(\sinh 1 - \sinh(-1)) = 20\cdot\sinh 1$. Since $\sinh 1 \approx 1.1752$, the length is about 23.50 m.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết $(\cosh x)' = -\sinh x$ do nhầm với cos. Hàm hyperbolic đạo hàm không đổi dấu. Lỗi nữa: quên điều kiện, $\cosh^{-1} x$ chỉ có nghĩa khi $x \ge 1$ và $\tanh^{-1} x$ chỉ khi $|x| < 1$.
Writing $(\cosh x)' = -\sinh x$ by confusing it with cos. Hyperbolic derivatives do not flip sign. Another slip: forgetting the domains, since $\cosh^{-1} x$ needs $x \ge 1$ and $\tanh^{-1} x$ needs $|x| < 1$.

1.9. Bài tập vận dụng có lời giải – *1.9. Applied exercises with solutions*

Bài 1. tính lượng nước trong bể bằng định lý biến thiên toàn phần – *Exercise 1. finding the water in a tank with the net change theorem*

Lúc phút thứ 1, một bể có 40 lít nước. Từ phút thứ 1 đến phút thứ 4, nước chảy vào bể với tốc độ $r(t) = 3t^2 + 2$ lít mỗi phút. Tính lượng nước trong bể ở phút thứ 4.
At minute 1 a tank holds 40 liters. From minute 1 to minute 4, water flows in at the rate $r(t) = 3t^2 + 2$ liters per minute. Find the amount of water in the tank at minute 4.

1. Lượng nước tăng thêm bằng tích phân của tốc độ chảy: ∫ từ 1 đến 4 của $(3t^2 + 2)\,dt$.
   The added water equals the integral of the flow rate: ∫ from 1 to 4 of $(3t^2 + 2)\,dt$.
2. Một nguyên hàm của $3t^2 + 2$ là $F(t) = t^3 + 2t$, vì đạo hàm của nó cho lại $3t^2 + 2$.
   An antiderivative of $3t^2 + 2$ is $F(t) = t^3 + 2t$, because its derivative gives back $3t^2 + 2$.
3. Thay cận: $F(4) - F(1) = (64 + 8) - (1 + 2) = 72 - 3 = 69$ lít.
   Plug in the limits: $F(4) - F(1) = (64 + 8) - (1 + 2) = 72 - 3 = 69$ liters.
4. Lượng nước ở phút thứ 4 = 40 + 69 = 109 lít. Đáp số: 109 lít.
   Water at minute 4 = 40 + 69 = 109 liters. Answer: 109 liters.

Bài 2. tính tích phân xác định bằng đổi biến – *Exercise 2. a definite integral by substitution*

Tính ∫ từ 0 đến 1 của $x(x^2 + 3)^3\,dx$.
Evaluate ∫ from 0 to 1 of $x(x^2 + 3)^3\,dx$.

1. Đặt $u = x^2 + 3$. Khi đó $du = 2x\,dx$, nên $x\,dx = du/2$.
   Let $u = x^2 + 3$. Then $du = 2x\,dx$, so $x\,dx = du/2$.

2. Đổi cận theo u: x = 0 thì u = 3; x = 1 thì u = 4.
   Change the limits to u: x = 0 gives u = 3; x = 1 gives u = 4.
3. Tích phân thành ∫ từ 3 đến 4 của (1/2)u³ du = (1/2)·[u⁴/4] từ 3 đến 4 = (1/8)(4⁴ − 3⁴).
   The integral becomes ∫ from 3 to 4 of (1/2)u³ du = (1/2)·[u⁴/4] from 3 to 4 = (1/8)(4⁴ − 3⁴).
4. Tính: 4⁴ = 256, 3⁴ = 81, hiệu bằng 175. Đáp số: 175/8 = 21,875.
   Compute: 4⁴ = 256, 3⁴ = 81, and the difference is 175. Answer: 175/8 = 21.875.

Bài 3. tích phân cho ra hàm lượng giác ngược – ***Exercise 3. an integral that gives an inverse trigonometric function***

Tính ∫ từ 0 đến 3 của dx/(9 + x²).
Evaluate ∫ from 0 to 3 of dx/(9 + x²).

1. Viết 9 + x² = 3² + x². Đây là dạng ∫ dx/(a² + x²) = (1/a)·arctan(x/a) với a = 3.
   Write 9 + x² = 3² + x². This is the form ∫ dx/(a² + x²) = (1/a)·arctan(x/a) with a = 3.
2. Nguyên hàm là (1/3)·arctan(x/3). Thay cận: (1/3)[arctan(1) − arctan(0)].
   The antiderivative is (1/3)·arctan(x/3). Plug in the limits: (1/3)[arctan(1) − arctan(0)].
3. Vì arctan(1) = π/4 và arctan(0) = 0, kết quả là (1/3)(π/4) = π/12. Đáp số: π/12 ≈ 0,262.
   Since arctan(1) = π/4 and arctan(0) = 0, the result is (1/3)(π/4) = π/12. Answer: π/12 ≈ 0.262.

1.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời – *1.10. Essay questions and answer outlines*

Câu 1. Giải thích tổng Riemann là gì, vì sao chia đoạn càng mịn thì xấp xỉ càng sát, và tổng này dẫn tới tích phân xác định thế nào.
Question 1. *Explain what a Riemann sum is, why a finer division gives a closer estimate, and how the sum leads to the definite integral.*

- Chia đoạn [a, b] thành n phần bằng nhau, mỗi phần rộng Δx = (b − a)/n.
  Split [a, b] into n equal pieces, each of width Δx = (b − a)/n.
- Trên mỗi phần dựng một hình chữ nhật có chiều cao là giá trị hàm tại một điểm chọn (đầu trái, đầu phải), rồi cộng các diện tích.
  On each piece build a rectangle whose height is the function value at a chosen point (left end, right end), then add the areas.
- Khi n tăng, các hình chữ nhật mảnh hơn, phần thừa hoặc thiếu so với miền thật nhỏ đi; giới hạn của tổng chính là tích phân xác định.
  As n grows, the rectangles get thinner and the overshoot or gap against the true region shrinks; the limit of the sum is the definite integral.
- Minh họa bằng f(x) = x² trên [0, 2] với n = 4: tổng trái 1,75, tổng phải 3,75, diện tích thật 8/3.
  Illustrate with f(x) = x² on [0, 2] and n = 4: left sum 1.75, right sum 3.75, true area 8/3.

Câu 2. Phát biểu hai phần của định lý cơ bản của giải tích và nói chúng cho biết điều gì về mối quan hệ giữa đạo hàm và tích phân.

Question 2. *State both parts of the fundamental theorem of calculus and say what they tell you about the link between derivatives and integrals.*

- Phần 1: nếu f liên tục và F(x) = ∫ từ a đến x của f(t) dt thì F'(x) = f(x).
  Part 1: if f is continuous and F(x) = ∫ from a to x of f(t) dt, then F'(x) = f(x).
- Phần 2: nếu G là một nguyên hàm bất kỳ của f thì ∫ từ a đến b của f = G(b) − G(a).
  Part 2: if G is any antiderivative of f, then ∫ from a to b of f = G(b) − G(a).
- Hai phần cho thấy lấy đạo hàm và lấy tích phân là hai phép ngược nhau; nhờ vậy ta tính diện tích bằng nguyên hàm thay vì cộng vô hạn hình chữ nhật.
  Together they show that differentiating and integrating undo each other, so we find areas with antiderivatives instead of adding endless rectangles.
- Ví dụ ∫ từ 0 đến 2 của $3x^2\,dx = 2^3 - 0^3 = 8$; nhắc điều kiện f phải liên tục trên đoạn đang xét.
  Example: ∫ from 0 to 2 of $3x^2\,dx = 2^3 - 0^3 = 8$; remind the reader that f must be continuous on the interval.

Câu 3. Trình bày các bước đổi biến trong tích phân xác định và những chỗ người mới học hay sai.

Question 3. *Describe the steps of substitution in a definite integral and the spots where beginners often slip.*

- Chọn u là biểu thức nằm bên trong (ví dụ trong ngoặc, dưới căn, trên số mũ), rồi tính du = u'(x) dx.
  Pick u as the inner expression (inside brackets, under a root, in an exponent), then compute du = u'(x) dx.
- Viết lại toàn bộ tích phân theo u, kể cả phần dx, và đổi cận: cận mới là giá trị của u tại cận cũ.
  Rewrite the whole integral in u, including the dx part, and change the limits: the new limits are the values of u at the old limits.
- Tính nguyên hàm theo u rồi thay cận mới, không cần quay về x.
  Find the antiderivative in u and plug in the new limits; there is no need to go back to x.
- Lỗi thường gặp: giữ cận cũ cho biến u, quên hệ số của du (như 2x dx so với x dx), hoặc để sót x trong tích phân theo u.
  Common slips: keeping the old limits for u, forgetting the factor in du (such as 2x dx versus x dx), or leaving x behind in the u-integral.

Câu 4. Nêu cách định nghĩa logarit tự nhiên bằng tích phân và các công thức chính của hàm sinh, cosh.

Question 4. *Describe how the natural logarithm is defined by an integral and give the main formulas for sinh and cosh.*

- Với x > 0, ln x = ∫ từ 1 đến x của dt/t; đó là diện tích dưới đường 1/t từ 1 đến x.
  For x > 0, ln x = ∫ from 1 to x of dt/t; it is the area under 1/t from 1 to x.

- Theo phần 1 của định lý cơ bản, đạo hàm của ln x là 1/x; từ đó suy ra ∫ dx/x = ln|x| + C.
  By part 1 of the fundamental theorem, the derivative of ln x is 1/x; this gives ∫ dx/x = ln|x| + C.
- sinh x = (e^x − e^(−x))/2 và cosh x = (e^x + e^(−x))/2.
  sinh x = (e^x − e^(−x))/2 and cosh x = (e^x + e^(−x))/2.
- Đạo hàm của sinh x là cosh x, đạo hàm của cosh x là sinh x, và cosh²x − sinh²x = 1.
  The derivative of sinh x is cosh x, the derivative of cosh x is sinh x, and cosh²x − sinh²x = 1.

1.11. Câu hỏi trắc nghiệm – *1.11. Multiple-choice questions*

1. Tổng Riemann trái của f(x) = x² trên [0, 2] với n = 4 phần bằng nhau có giá trị bao nhiêu?
What is the left Riemann sum of f(x) = x² on [0, 2] with n = 4 equal pieces?

A. 1,75 / *1.75*
B. 3,75 / *3.75*
C. 8/3
D. 3,5 / *3.5*

2. Cho F(x) = ∫ từ 2 đến x của (t³ + 1) dt. Đạo hàm F'(x) bằng gì?
Let F(x) = ∫ from 2 to x of (t³ + 1) dt. What is F'(x)?

A. x⁴/4 + x
B. 0
C. x³ + 1
D. 3x²

3. Giá trị trung bình của f(x) = 3x² trên đoạn [1, 3] là bao nhiêu?
What is the average value of f(x) = 3x² on the interval [1, 3]?

A. 12
B. 26
C. 13
D. 6

4. Giá trị của ∫ từ −2 đến 2 của x³ dx là bao nhiêu?
What is the value of ∫ from −2 to 2 of x³ dx?

A. 4
B. 8
C. 16
D. 0

5. Giá trị của ∫ từ 0 đến 2 của 2x·e^(x²) dx là bao nhiêu?
What is the value of ∫ from 0 to 2 of 2x·e^(x²) dx?

A. $e^4 - 1$
B. e^4
C. $2e^4 - 2$
D. $e^2 - 1$

6. Giá trị của ∫ từ 2 đến 8 của dx/x là bao nhiêu?
What is the value of ∫ from 2 to 8 of dx/x?

A. 3
B. ln 4
C. ln 16
D. ln 6

7. Giá trị của ∫ từ 0 đến 2√2 của dx/√(16 − x²) là bao nhiêu?
What is the value of ∫ from 0 to 2√2 of dx/√(16 − x²)?

A. π/6
B. π/4
C. π/3
D. π/2

8. Đạo hàm của cosh(3x) theo x là gì?
What is the derivative of cosh(3x) with respect to x?

A. 3cosh(3x)
B. sinh(3x)
C. −3sinh(3x)
D. 3sinh(3x)

Chương 2. Các kỹ thuật tính tích phân – *Chapter 2. Techniques of Integration*

Mục tiêu chương – *Chapter objectives*

- Tính được tích phân bằng từng phần, lượng giác, phép thế lượng giác và phân thức đơn giản, rồi chọn đúng phương pháp cho từng dạng hàm
  Evaluate integrals by parts, with trigonometric methods, trigonometric substitution and partial fractions, and pick the right method for each type of function
- Ước lượng tích phân xác định bằng quy tắc trung điểm, hình thang, Simpson và so sánh kết quả với giá trị đúng
  Estimate definite integrals with the midpoint, trapezoidal and Simpson's rules and compare the result with the exact value
- Xét hội tụ hay phân kỳ của tích phân suy rộng bằng giới hạn hoặc tiêu chuẩn so sánh, và tính giá trị khi nó hội tụ
  Decide whether an improper integral converges or diverges using limits or the comparison test, and compute its value when it converges

2.1. Tích phân từng phần – *2.1. Integration by Parts*

Tích phân từng phần là cách "đảo ngược" quy tắc đạo hàm của một tích. Bạn dùng nó khi hàm dưới dấu tích phân là tích của hai loại hàm khác nhau, như $x \cdot e^x$ hay $x \cdot \ln x$, mà đổi biến không giải được. Ý tưởng: đổi một tích phân khó lấy một tích phân dễ hơn.

Integration by parts reverses the product rule for derivatives. Use it when the integrand is a product of two different kinds of function, such as $x \cdot e^x$ or $x \cdot \ln x$, and substitution does not work. The idea is to trade a hard integral for an easier one.

> **PHẢI THUỘC / MEMORISE –** $\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$. Với tích phân xác định: $\int$ từ a đến b của $u\,dv = [u \cdot v]$ từ a đến b $- \int$ từ a đến b của $v\,du$.
> $\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$. *For definite integrals: $\int$ from a to b of $u\,dv$ = $[u \cdot v]$ from a to b $- \int$ from a to b of $v\,du$.*

Công thức có từ $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. Lấy tích phân hai vế rồi chuyển vế là ra. Bạn chỉ cần nhớ: một phần của tích đem đi đạo hàm (u), phần còn lại đem đi nguyên hàm (dv).

The formula comes from $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. Integrate both sides and rearrange. You only need to remember this: one factor gets differentiated (u), the other gets integrated (dv).

Cách làm từng bước – *Step by step*

1. Tách biểu thức thành hai phần: một phần làm u, phần còn lại cùng dx làm dv.
   Split the integrand into two parts: one becomes u, the rest together with dx becomes dv.
2. Tính du bằng cách đạo hàm u, và tính v bằng cách lấy nguyên hàm của dv (không cần hằng số C ở bước này).
   Find du by differentiating u, and find v by integrating dv (no constant C is needed at this stage).

3. Thay vào công thức $u \cdot v - \int v\,du$.
   Substitute into $u \cdot v - \int v\,du$.
4. Tính tích phân mới, rồi cộng C (nếu là tích phân bất định).
   Evaluate the new integral, then add C (for an indefinite integral).
5. Kiểm tra bằng cách đạo hàm kết quả. Nếu ra đúng hàm ban đầu thì bạn làm đúng.
   Check by differentiating your answer. If you get the original integrand back, the work is right.

Chọn u theo thứ tự LIATE – *Choosing u with LIATE*

Chọn u là hàm đứng sớm nhất trong dãy: Logarit, hàm lượng giác Ngược, Đại số (đa thức, lũy thừa), hàm Lượng giác, hàm Mũ. Lý do: logarit và lượng giác ngược khó lấy nguyên hàm nhưng đạo hàm lại đơn giản, còn mũ và lượng giác thì nguyên hàm luôn "lành".

Pick u as the function that comes first in this list: Logarithmic, Inverse trigonometric, Algebraic (polynomials, powers), Trigonometric, Exponential. The reason: logarithms and inverse trig functions are hard to integrate but easy to differentiate, while exponentials and trig functions integrate cleanly.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int x \cdot e^x\,dx$. Đa thức đứng trước mũ nên $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Suy ra $du = dx$, $v = e^x$. Kết quả: $x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C$. Kiểm tra bằng đạo hàm: $e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$. Đúng.
Evaluate $\int x \cdot e^x\,dx$. A polynomial comes before an exponential, so $u = x$ and $dv = e^x\,dx$. Then $du = dx$ and $v = e^x$. Result: $x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C$. Check by differentiating: $e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$. Correct.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int x \cdot \cos x\,dx$. Đa thức đứng trước lượng giác nên $u = x$, $dv = \cos x\,dx$. Suy ra $du = dx$, $v = \sin x$. Kết quả: $x \cdot \sin x - \int \sin x\,dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$. Đạo hàm lại: $\sin x + x \cdot \cos x - \sin x = x \cdot \cos x$. Đúng.
Evaluate $\int x \cdot \cos x\,dx$. A polynomial comes before a trig function, so $u = x$ and $dv = \cos x\,dx$. Then $du = dx$ and $v = \sin x$. Result: $x \cdot \sin x - \int \sin x\,dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$. Differentiate again: $\sin x + x \cdot \cos x - \sin x = x \cdot \cos x$. Correct.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int \ln x\,dx$. Chỉ có một thừa số, ta coi $dv = dx$. Chọn $u = \ln x$, $du = dx/x$, $v = x$. Kết quả: $x \cdot \ln x - \int 1\,dx = x \cdot \ln x - x + C$.
Evaluate $\int \ln x\,dx$. There is only one factor, so treat $dv = dx$. Take $u = \ln x$, $du = dx/x$, $v = x$. Result: $x \cdot \ln x - \int 1\,dx = x \cdot \ln x - x + C$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int \arctan x\,dx$. Cũng chỉ có một thừa số nên $dv = dx$. Chọn $u = \arctan x$, $du = dx/(1 + x^2)$, $v = x$. Ta có $x \cdot \arctan x - \int x/(1 + x^2)\,dx$. Tích phân còn lại giải bằng đổi biến $w = 1 + x^2$, $dw = 2x\,dx$, ra $(1/2) \cdot \ln(1 + x^2)$. Kết quả: $x \cdot \arctan x - (1/2) \cdot \ln(1 + x^2) + C$.
Evaluate $\int \arctan x\,dx$. Again there is one factor, so $dv = dx$. Take $u = \arctan x$, $du = dx/(1 + x^2)$, $v = x$. We get $x \cdot \arctan x - \int x/(1 + x^2)\,dx$. The remaining integral falls to the substitution $w = 1 + x^2$, $dw = 2x\,dx$, giving $(1/2) \cdot \ln(1 + x^2)$. Result: $x \cdot \arctan x - (1/2) \cdot \ln(1 + x^2) + C$.

Dùng nhiều lần – *Applying it more than once*

Khi u là x^2, x^3... mỗi lần từng phần chỉ hạ số mũ đi 1. Bạn cứ lặp lại cho tới khi hết x.

When u is x^2, x^3 and so on, each round lowers the power by 1. Repeat until the x is gone.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int x^2 \cdot e^x\,dx$. Lần 1: $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$, ta được $x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x\,dx$. Lần 2 dùng kết quả ví dụ trên: $\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x$. Vậy tích phân bằng $x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.
Evaluate $\int x^2 \cdot e^x\,dx$. Round 1: $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$ gives $x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x\,dx$. Round 2 uses the earlier example: $\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x$. So the integral equals $x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

Dạng lặp vòng: $e^x \sin x$ – *The looping case: $e^x \sin x$*

Với $e^x \sin x$, đạo hàm hay nguyên hàm đều không làm hàm đơn giản đi. Nhưng sau hai lần từng phần, tích phân ban đầu xuất hiện lại. Bạn coi nó như một ẩn số và giải phương trình.
With $e^x \sin x$, neither differentiating nor integrating simplifies anything. But after two rounds the original integral reappears. Treat it as an unknown and solve an equation.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đặt $I = \int e^x \sin x\,dx$. Lần 1: $u = \sin x$, $dv = e^x\,dx$, ta có $I = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$. Lần 2, vẫn chọn u là hàm lượng giác: $u = \cos x$, $dv = e^x\,dx$, ta có $\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + I$. Thay vào: $I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$. Chuyển vế: $2I = e^x(\sin x - \cos x)$. Vậy $I = e^x(\sin x - \cos x)/2 + C$. Đạo hàm lại: $e^x(\sin x - \cos x)/2 + e^x(\cos x + \sin x)/2 = e^x \sin x$. Đúng.
Let $I = \int e^x \sin x\,dx$. Round 1: $u = \sin x$, $dv = e^x\,dx$ gives $I = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$. Round 2, again choosing the trig function as u: $u = \cos x$, $dv = e^x\,dx$ gives $\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + I$. Substitute: $I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$. Rearrange: $2I = e^x(\sin x - \cos x)$. So $I = e^x(\sin x - \cos x)/2 + C$. Differentiating again: $e^x(\sin x - \cos x)/2 + e^x(\cos x + \sin x)/2 = e^x \sin x$. Correct.

Tích phân xác định – *Definite integrals*

Cách làm giống hệt, chỉ thêm bước thay cận. Số hạng u·v cũng phải thay cận, không được bỏ.
The method is the same, with one extra step: plugging in the limits. The u·v term must also be evaluated at the limits, not dropped.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int$ từ 1 đến e của $x \cdot \ln x\,dx$. Chọn $u = \ln x$, $dv = x\,dx$, nên $du = dx/x$, $v = x^2/2$. Ta có $[x^2 \cdot \ln x/2]$ từ 1 đến e $- \int$ từ 1 đến e của $x/2\,dx$. Số hạng đầu: $e^2/2 - 0 = e^2/2$. Số hạng sau: $[x^2/4]$ từ 1 đến e $= e^2/4 - 1/4$. Kết quả: $e^2/2 - e^2/4 + 1/4 = (e^2 + 1)/4$.
Evaluate $\int$ from 1 to e of $x \cdot \ln x\,dx$. Take $u = \ln x$, $dv = x\,dx$, so $du = dx/x$, $v = x^2/2$. We get $[x^2 \cdot \ln x/2]$ from 1 to e $- \int$ from 1 to e of $x/2\,dx$. First term: $e^2/2 - 0 = e^2/2$. Second term: $[x^2/4]$ from 1 to e $= e^2/4 - 1/4$. Result: $e^2/2 - e^2/4 + 1/4 = (e^2 + 1)/4$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int$ từ 0 đến π của $x \cdot \sin x\,dx$. Chọn $u = x$, $dv = \sin x\,dx$, nên $du = dx$, $v = -\cos x$. Số hạng u·v: $[-x \cdot \cos x]$ từ 0 đến $\pi = -\pi \cdot (-1) - 0 = \pi$. Tích phân còn lại: $-\int$ từ 0 đến π của $(-\cos x)\,dx = \int$ từ 0 đến π của $\cos x\,dx = \sin \pi - \sin 0 = 0$. Kết quả: π. Đó cũng là diện tích miền nằm giữa đồ thị $y = x \cdot \sin x$ và trục hoành trên đoạn từ 0 đến π, vì hàm không âm trên đoạn này.
Evaluate $\int$ from 0 to π of $x \cdot \sin x\,dx$. Take $u = x$, $dv = \sin x\,dx$, so $du = dx$, $v = -\cos x$. The u·v term: $[-x \cdot \cos x]$ from 0 to $\pi = -\pi \cdot (-1) - 0 = \pi$. The remaining integral: $-\int$ from 0 to π of $(-\cos x)\,dx = \int$ from 0 to π of $\cos x\,dx = \sin \pi - \sin 0 = 0$. Result: π. This is also the area between the graph of $y = x \cdot \sin x$ and the x-axis over 0 to π, since the function is not negative there.

Chỗ hay sai – *Common mistakes*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chọn ngược u và dv làm bài khó hơn. Với $\int x \cdot e^x\,dx$ mà chọn $u = e^x$, $dv = x\,dx$ thì $v = x^2/2$ và tích phân mới là $\int x^2 \cdot e^x/2\,dx$, bậc cao hơn ban đầu. Gặp tình huống này, hãy quay lại đổi vai.
Swapping u and dv makes the problem harder. For $\int x \cdot e^x\,dx$, choosing $u = e^x$ and $dv = x\,dx$ gives $v = x^2/2$ and a new integral $\int x^2 \cdot e^x/2\,dx$, which has a higher power than before. When that happens, go back and swap roles.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên dấu trừ trước $\int v\,du$, hoặc quên thay cận cho $u \cdot v$ ở tích phân xác định. Dấu trừ bị mất là lỗi phổ biến nhất khi làm lần hai.
Forgetting the minus sign before $\int v\,du$, or forgetting to apply the limits to $u \cdot v$ in a definite integral. A lost minus sign is the most common slip in the second round.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Ở dạng lặp vòng, đổi vai giữa hai lần (lần 1 chọn u lượng giác, lần 2 chọn u mũ) thì hai lần triệt tiêu nhau và bạn chỉ quay về đề bài.
In the looping case, switching roles between rounds (trig as u first, exponential as u second) makes the two rounds cancel and you simply return to the original problem.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Dùng từng phần cho bài không cần. Với $\int x \cdot e^{(x^2)}\,dx$, đạo hàm của x^2 là $2x$ đã nằm sẵn trong đề, nên đổi biến $w = x^2$ cho ngay $e^{(x^2)}/2 + C$. Hãy thử đổi biến trước, từng phần để sau.
Using parts when it is not needed. In $\int x \cdot e^{(x^2)}\,dx$, the derivative of x^2, which is $2x$, already sits in the integrand, so the substitution $w = x^2$ gives $e^{(x^2)}/2 + C$ at once. Try substitution first and keep parts for later.

MẸO / TIP – LIATE chỉ là gợi ý. Với $\int x^3 \cdot e^{(x^2)}\,dx$, LIATE bảo chọn $u = x^3$, nhưng khi đó $dv = e^{(x^2)}\,dx$ không lấy nguyên hàm được. Hãy chọn $u = x^2$, $dv = x \cdot e^{(x^2)}\,dx$, khi đó $v = e^{(x^2)}/2$. Kết quả: $x^2 \cdot e^{(x^2)}/2 - e^{(x^2)}/2 + C$. Quy tắc cuối cùng: dv phải là phần bạn tìm được nguyên hàm.
LIATE is only a guide. For $\int x^3 \cdot e^{(x^2)}\,dx$, LIATE says $u = x^3$, but then $dv = e^{(x^2)}\,dx$ has no elementary antiderivative. Choose $u = x^2$ and $dv = x \cdot e^{(x^2)}\,dx$ instead, so $v = e^{(x^2)}/2$. Result: $x^2 \cdot e^{(x^2)}/2 - e^{(x^2)}/2 + C$. The final rule: dv must be a part you can actually integrate.

2.2. Tích phân hàm lượng giác – *2.2. Trigonometric Integrals*

Tích phân lượng giác là tích phân của sin, cos, tan, sec với số mũ nguyên. Mẹo chung giống việc đổi tiền lẻ: dùng một đồng nhất thức để biến biểu thức thành dạng "hàm nhân đạo hàm của nó", rồi đổi biến u. Chọn đồng nhất thức nào tùy vào số mũ chẵn hay lẻ.
Trigonometric integrals involve sin, cos, tan or sec raised to whole-number powers. The common trick is to use an identity to turn the expression into "a function times its own derivative", then substitute u. Which identity you pick depends on whether the exponents are even or odd.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Phải thuộc: $\sin^2x + \cos^2x = 1$; $1 + \tan^2x = \sec^2x$; $\sin^2x = (1 - \cos2x)/2$; $\cos^2x = (1 + \cos2x)/2$; $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$; $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$.
Memorize: $\sin^2x + \cos^2x = 1$; $1 + \tan^2x = \sec^2x$; $\sin^2x = (1 - \cos2x)/2$; $\cos^2x = (1 + \cos2x)/2$; $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$; $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$.

Lũy thừa của sin và cos, có một số mũ lẻ – *Powers of sin and cos with an odd exponent*

Nếu sin có số mũ lẻ, bạn "mượn" một thừa số sinx để làm du. Phần sin còn lại có số mũ chẵn nên đổi hết sang cos được. Nếu cos có số mũ lẻ thì làm ngược lại. Nếu cả hai cùng lẻ, chọn bên nào cũng được.

If sin has an odd exponent, you "borrow" one factor of sinx to serve as du. The remaining sin factors have an even exponent, so they convert entirely to cos. If cos is the odd one, do the reverse. If both are odd, either choice works.

1. Tìm hàm có số mũ lẻ và tách riêng một thừa số của nó (sinx hoặc cosx).
   Find the function with the odd exponent and split off one factor of it (sinx or cosx).
2. Dùng $\sin^2x + \cos^2x = 1$ để viết phần còn lại theo hàm kia.
   Use $\sin^2x + \cos^2x = 1$ to write the rest in terms of the other function.
3. Đặt u bằng hàm kia (u = cosx nếu tách sinx; u = sinx nếu tách cosx), tính du.
   Set u equal to the other function (u = cosx if you split off sinx; u = sinx if you split off cosx) and compute du.
4. Tích phân đa thức theo u rồi thay u trở lại.
   Integrate the polynomial in u, then substitute back.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int \sin^3x \cos^2x\,dx$. Tách $\sin^3x = \sin^2x \cdot \sin x = (1 - \cos^2x)\sin x$. Đặt $u = \cos x$ thì $du = -\sin x\,dx$. Tích phân thành $-\int(1 - u^2)u^2\,du = -\int(u^2 - u^4)\,du = -u^3/3 + u^5/5 + C$. Kết quả: $-\cos^3x/3 + \cos^5x/5 + C$. Kiểm tra bằng đạo hàm: $\cos^2x \sin x - \cos^4x \sin x = \sin x \cos^2x (1 - \cos^2x) = \sin^3x \cos^2x$.
Evaluate $\int \sin^3x \cos^2x\,dx$. Split $\sin^3x = \sin^2x \cdot \sin x = (1 - \cos^2x)\sin x$. Let $u = \cos x$, so $du = -\sin x\,dx$. The integral becomes $-\int(1 - u^2)u^2\,du = -\int(u^2 - u^4)\,du = -u^3/3 + u^5/5 + C$. Result: $-\cos^3x/3 + \cos^5x/5 + C$. Check by differentiating: $\cos^2x \sin x - \cos^4x \sin x = \sin x \cos^2x (1 - \cos^2x) = \sin^3x \cos^2x$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int \cos^3x\,dx$, chỉ có một hàm. Tách $\cos^3x = \cos^2x \cdot \cos x = (1 - \sin^2x)\cos x$. Đặt $u = \sin x$ thì $du = \cos x\,dx$, không có dấu trừ. Được $\int(1 - u^2)\,du = u - u^3/3 + C = \sin x - \sin^3x/3 + C$. Đạo hàm lại: $\cos x - \sin^2x \cos x = \cos x (1 - \sin^2x) = \cos^3x$.
Evaluate $\int \cos^3x\,dx$, with a single function. Split $\cos^3x = \cos^2x \cdot \cos x = (1 - \sin^2x)\cos x$. Let $u = \sin x$, so $du = \cos x\,dx$, with no minus sign. This gives $\int(1 - u^2)\,du = u - u^3/3 + C = \sin x - \sin^3x/3 + C$. Differentiating back: $\cos x - \sin^2x \cos x = \cos x (1 - \sin^2x) = \cos^3x$.

Cả hai số mũ chẵn: công thức hạ bậc – *Both exponents even: power-reducing formulas*

Không còn thừa số lẻ để mượn, nên bạn phải hạ bậc: thay $\sin^2x$ bằng $(1 - \cos 2x)/2$ và $\cos^2x$ bằng $(1 + \cos 2x)/2$. Mỗi lần hạ bậc, số mũ giảm đi một nửa còn góc nhân đôi. Nếu vẫn còn số mũ chẵn thì hạ bậc tiếp.

There is no odd factor to borrow, so you reduce the power: replace $\sin^2x$ with $(1 - \cos 2x)/2$ and $\cos^2x$ with $(1 + \cos 2x)/2$. Each pass halves the exponent and doubles the angle. If an even exponent remains, reduce again.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int \sin^2x \cos^2x\,dx$. Ta có $\sin x \cos x = (\sin 2x)/2$, nên $\sin^2x \cos^2x = \sin^2 2x/4$. Hạ bậc: $\sin^2 2x = (1 - \cos 4x)/2$, vậy biểu thức bằng $(1 - \cos 4x)/8$. Tích phân: $x/8 - \sin 4x/32 + C$. Số 32 đến từ 8 nhân 4, vì $\int \cos 4x\,dx = \sin 4x/4$.
Evaluate $\int \sin^2x \cos^2x\,dx$. Since $\sin x \cos x = (\sin 2x)/2$, we get $\sin^2x \cos^2x = \sin^2 2x/4$. Reduce: $\sin^2 2x =$

(1 − cos4x)/2, so the integrand is (1 − cos4x)/8. Integrating gives x/8 − sin4x/32 + C. The 32 comes from 8 times 4, because ∫cos4x dx = sin4x/4.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ sin⁴x dx, hạ bậc hai lần. Viết sin⁴x = ((1 − cos2x)/2)² = (1 − 2cos2x + cos²2x)/4. Hạ bậc tiếp cos²2x = (1 + cos4x)/2. Biểu thức thành 3/8 − (cos2x)/2 + (cos4x)/8. Tích phân: 3x/8 − sin2x/4 + sin4x/32 + C.
Evaluate ∫ sin⁴x dx, reducing the power twice. Write sin⁴x = ((1 − cos2x)/2)² = (1 − 2cos2x + cos²2x)/4. Reduce again: cos²2x = (1 + cos4x)/2. The integrand becomes 3/8 − (cos2x)/2 + (cos4x)/8. Integrating gives 3x/8 − sin2x/4 + sin4x/32 + C.

Tích của tan và sec – *Products of tan and sec*

Nhớ hai đạo hàm: (tanx)′ = sec²x và (secx)′ = secx tanx. Mỗi đạo hàm gợi ra một cách tách.
Remember two derivatives: (tanx)′ = sec²x and (secx)′ = secx tanx. Each one suggests a way to split the integrand.

- Số mũ của sec chẵn (từ 2 trở lên): tách sec²x làm du, đổi phần sec còn lại bằng sec²x = 1 + tan²x, đặt u = tanx.
  Even power of sec (2 or more): split off sec²x as du, convert the remaining sec factors with sec²x = 1 + tan²x, and set u = tanx.
- Số mũ của tan lẻ và có sec: tách secx tanx làm du, đổi tan² = sec² − 1, đặt u = secx.
  Odd power of tan together with sec: split off secx tanx as du, convert tan² = sec² − 1, and set u = secx.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ tan²x sec⁴x dx. Sec có số mũ chẵn. Viết sec⁴x = sec²x (1 + tan²x). Đặt u = tanx, du = sec²x dx. Được ∫u²(1 + u²) du = u³/3 + u⁵/5 + C = tan³x/3 + tan⁵x/5 + C.
Evaluate ∫ tan²x sec⁴x dx. Sec has an even exponent. Write sec⁴x = sec²x (1 + tan²x). Let u = tanx, du = sec²x dx. This gives ∫u²(1 + u²) du = u³/3 + u⁵/5 + C = tan³x/3 + tan⁵x/5 + C.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính ∫ tan³x secx dx. Tách tan³x secx = tan²x · (secx tanx) = (sec²x − 1) secx tanx. Đặt u = secx, du = secx tanx dx. Được ∫(u² − 1) du = u³/3 − u + C = sec³x/3 − secx + C. Chỉ có tan, không có sec: ∫tan²x dx = ∫(sec²x − 1) dx = tanx − x + C.
Evaluate ∫ tan³x secx dx. Split tan³x secx = tan²x · (secx tanx) = (sec²x − 1) secx tanx. Let u = secx, du = secx tanx dx. This gives ∫(u² − 1) du = u³/3 − u + C = sec³x/3 − secx + C. With tan alone and no sec: ∫tan²x dx = ∫(sec²x − 1) dx = tanx − x + C.

Tích sin, cos của hai góc khác nhau: biến tích thành tổng – *Products of sin and cos with different angles: product-to-sum*

Với sin3x cos5x, hai góc khác nhau nên các cách trên không dùng được. Hãy đổi tích thành tổng, vì tổng thì tích phân từng số hạng rất dễ.
With sin3x cos5x the angles differ, so the methods above do not apply. Turn the product into a sum, since each term of a sum is easy to integrate.

```
sinA cosB = [sin(A − B) + sin(A + B)]/2
sinA sinB = [cos(A − B) − cos(A + B)]/2
cosA cosB = [cos(A − B) + cos(A + B)]/2
```

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int \sin 3x \cos 5x\,dx$. Lấy A = 3x, B = 5x: $\sin 3x \cos 5x = [\sin(-2x) + \sin 8x]/2 = (\sin 8x - \sin 2x)/2$, vì $\sin(-2x) = -\sin 2x$. Tích phân: $-\cos 8x/16 + \cos 2x/4 + C$.
Evaluate $\int \sin 3x \cos 5x\,dx$. Take A = 3x, B = 5x: $\sin 3x \cos 5x = [\sin(-2x) + \sin 8x]/2 = (\sin 8x - \sin 2x)/2$, because $\sin(-2x) = -\sin 2x$. Integrating gives $-\cos 8x/16 + \cos 2x/4 + C$.

Gặp dạng nào thì dùng cách nào – *Which method for which form*

- Sin hoặc cos có số mũ lẻ: mượn một thừa số, đổi phần còn lại bằng $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, rồi đặt u.
  Odd exponent on sin or cos: borrow one factor, convert the rest with $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, then set u.
- Sin và cos đều có số mũ chẵn: hạ bậc bằng góc nhân đôi, lặp lại đến khi hết số mũ chẵn.
  Even exponents on both sin and cos: reduce with double angles, repeating until no even exponent remains.
- Có sec với số mũ chẵn, hoặc tan lẻ đi cùng sec: chọn u = tanx hay u = secx như hai gạch đầu dòng ở trên.
  Sec with an even exponent, or odd tan together with sec: choose u = tanx or u = secx as in the two rules above.
- Hai góc khác nhau: dùng công thức biến tích thành tổng.
  Two different angles: use the product-to-sum formulas.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đặt u = cosx thì du = −sinx dx. Quên dấu trừ là lỗi phổ biến nhất ở dạng số mũ lẻ.
With u = cosx, du = −sinx dx. Forgetting the minus sign is the most common error in the odd-exponent case.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên chia cho hệ số của góc: $\int \cos 4x\,dx = \sin 4x/4$, không phải sin4x. Quên nhân 1/2 khi hạ bậc cũng làm sai kết quả.
Forgetting to divide by the angle's coefficient: $\int \cos 4x\,dx = \sin 4x/4$, not sin4x. Dropping the 1/2 in a power-reducing formula also ruins the result.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Dùng hạ bậc cho số mũ lẻ làm bài dài ra mà dễ nhầm. Thấy số mũ lẻ thì mượn thừa số trước.
Using power reduction on an odd exponent makes the work longer and error-prone. When you see an odd exponent, borrow a factor first.

MẸO / TIP – Luôn kiểm tra bằng cách lấy đạo hàm đáp án. Nếu ra lại biểu thức ban đầu, bạn đã làm đúng.
Always check by differentiating your answer. If you get the original integrand back, you are right.

2.3. Phép thế lượng giác – *2.3. Trigonometric Substitution*

Khi gặp căn của tổng hoặc hiệu hai bình phương, ví dụ $\sqrt{(9 - x^2)}$, việc tính nguyên hàm thường bị kẹt vì dấu căn. Phép thế lượng giác gỡ dấu căn bằng cách thay x bằng một hàm lượng giác, để biểu thức dưới căn thành một bình phương đúng. Ví dụ đời thường: bạn

muốn mở một hộp khóa, và đồng nhất thức lượng giác chính là chiếc chìa. Ở đây a là hằng số dương.

When an integral contains the root of a sum or difference of two squares, such as $\sqrt{(9 - x^2)}$, the root blocks the usual methods. Trigonometric substitution removes it by replacing x with a trig function, so the expression under the root becomes a perfect square. Think of a locked box: the Pythagorean identities are the key. Here a is a positive constant.

Ba phép thế cần nhớ – *The three substitutions*

Mỗi dạng căn dùng một đồng nhất thức: $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$. Sau đây là bảng tra:

Each root form uses one identity: $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$. Use this table to look them up:

Dạng căn *Root form*	**Phép thế và dx** *Substitution and dx*	**Căn trở thành** *The root becomes*
$\sqrt{(a^2 - x^2)}$	$x = a\sin\theta$, $dx = a\cos\theta\, d\theta$	$a\cos\theta$ (với θ từ $-\pi/2$ đến $\pi/2$) *$a\cos\theta$ (for θ from $-\pi/2$ to $\pi/2$)*
$\sqrt{(a^2 + x^2)}$	$x = a\tan\theta$, $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$	$a\sec\theta$ (với θ từ $-\pi/2$ đến $\pi/2$) *$a\sec\theta$ (for θ between $-\pi/2$ and $\pi/2$)*
$\sqrt{(x^2 - a^2)}$	$x = a\sec\theta$, $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$	$a\tan\theta$ (khi $x \geq a$, θ từ 0 đến $\pi/2$) *$a\tan\theta$ (when $x \geq a$, θ from 0 to $\pi/2$)*

Miền của θ được chọn để cosθ, secθ, tanθ không âm trong từng trường hợp. Nhờ vậy căn bậc hai của bình phương bỏ được dấu giá trị tuyệt đối.

The range of θ is chosen so that $\cos\theta$, $\sec\theta$ and $\tan\theta$ are not negative in each case. That lets you drop the absolute value when taking the square root of a square.

Các bước làm – *Steps*

1. Kiểm tra xem có đổi biến u đơn giản hơn không. Ví dụ $\int x/\sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx$ chỉ cần đặt $u = a^2 - x^2$.
   Check whether a simple u-substitution works first. For example, $\int x/\sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx$ only needs $u = a^2 - x^2$.
2. Chọn phép thế theo bảng, tính dx, và thay vào tích phân.
   Pick the substitution from the table, compute dx, and substitute.
3. Rút gọn bằng đồng nhất thức để hết căn, rồi tính tích phân lượng giác theo θ.
   Simplify with the identity so the root disappears, then integrate in θ.
4. Vẽ tam giác vuông: đặt tỉ số lượng giác của θ bằng biểu thức theo x. Với $x = a\sin\theta$, cạnh đối là x, cạnh huyền là a, cạnh kề là $\sqrt{(a^2 - x^2)}$.
   Draw a right triangle with the trig ratio of θ equal to the expression in x. For $x = a\sin\theta$, the opposite side is x, the hypotenuse is a, and the adjacent side is $\sqrt{(a^2 - x^2)}$.
5. Đọc các hàm lượng giác còn lại từ tam giác để đổi kết quả về x. Với tích phân xác định, đổi cận sang θ rồi khỏi cần đổi ngược.

Read the other trig functions off the triangle to convert the answer back to x. For a definite integral, change the limits to θ and skip the back-conversion.

Với x = a tanθ, cạnh đối là x, cạnh kề là a, cạnh huyền là $\sqrt{(a^2 + x^2)}$. Với x = a secθ, cạnh huyền là x, cạnh kề là a, cạnh đối là $\sqrt{(x^2 - a^2)}$.

For x = a tanθ, the opposite side is x, the adjacent side is a, and the hypotenuse is $\sqrt{(a^2 + x^2)}$. For x = a secθ, the hypotenuse is x, the adjacent side is a, and the opposite side is $\sqrt{(x^2 - a^2)}$.

Muốn chắc kết quả đúng, hãy lấy đạo hàm đáp số theo x. Nếu ra đúng biểu thức ban đầu trong tích phân thì bạn làm đúng. Cách này nhanh và không cần đáp án mẫu.

To be sure of your result, differentiate the answer with respect to x. If you get the original integrand back, the work is right. It is quick and needs no answer key.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int dx/(x^2\sqrt{(4 - x^2)})$. Đặt x = 2 sinθ, dx = 2 cosθ dθ, căn bằng 2 cosθ. Tích phân thành $\int 2\cos\theta\, d\theta/(4\sin^2\theta \cdot 2\cos\theta) = (1/4)\int \csc^2\theta\, d\theta = -(1/4)\cot\theta + C$. Từ tam giác (đối x, huyền 2, kề $\sqrt{(4 - x^2)}$) có $\cot\theta = \sqrt{(4 - x^2)}/x$. Kết quả: $-\sqrt{(4 - x^2)}/(4x) + C$.
Evaluate $\int dx/(x^2\sqrt{(4 - x^2)})$. Let x = 2 sinθ, dx = 2 cosθ dθ, and the root equals 2 cosθ. The integral becomes $\int 2\cos\theta\, d\theta/(4\sin^2\theta \cdot 2\cos\theta) = (1/4)\int \csc^2\theta\, d\theta = -(1/4)\cot\theta + C$. The triangle (opposite x, hypotenuse 2, adjacent $\sqrt{(4 - x^2)}$) gives $\cot\theta = \sqrt{(4 - x^2)}/x$. Answer: $-\sqrt{(4 - x^2)}/(4x) + C$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Diện tích phần hình tròn bán kính 3 nằm dưới đường $y = \sqrt{(9 - x^2)}$, từ x = 0 đến x = 3/2. Diện tích là $\int$ từ 0 đến 3/2 của $\sqrt{(9 - x^2)}\, dx$. Đặt x = 3 sinθ, dx = 3 cosθ dθ, căn bằng 3 cosθ. Cận: x = 0 ra θ = 0; x = 3/2 thì sinθ = 1/2 nên θ = π/6. Tích phân thành $\int$ từ 0 đến π/6 của $9\cos^2\theta\, d\theta = 9(\theta/2 + \sin2\theta/4)$, tính từ 0 đến π/6. Thay cận: $9(\pi/12 + (\sqrt{3}/2)/4) = 3\pi/4 + 9\sqrt{3}/8 \approx 4{,}30$. Kiểm tra nhanh: chiều cao gần 3 và rộng 1,5 cho diện tích cỡ 4,3, khớp.
Find the area under $y = \sqrt{(9 - x^2)}$, part of a circle of radius 3, from x = 0 to x = 3/2. The area is $\int$ from 0 to 3/2 of $\sqrt{(9 - x^2)}\, dx$. Let x = 3 sinθ, dx = 3 cosθ dθ, and the root equals 3 cosθ. Limits: x = 0 gives θ = 0; x = 3/2 gives sinθ = 1/2, so θ = π/6. The integral becomes $\int$ from 0 to π/6 of $9\cos^2\theta\, d\theta = 9(\theta/2 + \sin2\theta/4)$, evaluated from 0 to π/6. Substituting: $9(\pi/12 + (\sqrt{3}/2)/4) = 3\pi/4 + 9\sqrt{3}/8 \approx 4.30$. Quick check: height near 3 and width 1.5 give about 4.3, which matches.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Tính $\int dx/(x^2 + 4)^{(3/2)}$. Dạng $a^2 + x^2$ với a = 2, nên đặt x = 2 tanθ, dx = $2\sec^2\theta\, d\theta$. Khi đó $(x^2 + 4)^{(3/2)} = (4\sec^2\theta)^{(3/2)} = 8\sec^3\theta$. Tích phân thành $\int 2\sec^2\theta\, d\theta/(8\sec^3\theta) = (1/4)\int \cos\theta\, d\theta = (1/4)\sin\theta + C$. Tam giác có đối x, kề 2, huyền $\sqrt{(x^2 + 4)}$, nên $\sin\theta = x/\sqrt{(x^2 + 4)}$. Kết quả: $x/(4\sqrt{(x^2 + 4)}) + C$. Kiểm tra: đạo hàm của $x(x^2 + 4)^{(-1/2)}$ là $4/(x^2 + 4)^{(3/2)}$, nhân 1/4 ra đúng biểu thức ban đầu.
Evaluate $\int dx/(x^2 + 4)^{(3/2)}$. The form is $a^2 + x^2$ with a = 2, so let x = 2 tanθ, dx = $2\sec^2\theta\, d\theta$. Then $(x^2 + 4)^{(3/2)} = (4\sec^2\theta)^{(3/2)} = 8\sec^3\theta$. The integral becomes $\int 2\sec^2\theta\, d\theta/(8\sec^3\theta) = (1/4)\int \cos\theta\, d\theta = (1/4)\sin\theta + C$. The triangle has opposite x, adjacent 2, hypotenuse $\sqrt{(x^2 + 4)}$, so $\sin\theta = x/\sqrt{(x^2 + 4)}$. Answer: $x/(4\sqrt{(x^2 + 4)}) + C$. Check: the derivative of $x(x^2 + 4)^{(-1/2)}$ is $4/(x^2 + 4)^{(3/2)}$, and multiplying by 1/4 returns the original integrand.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên đổi cận khi tính tích phân xác định, hoặc đổi cận xong vẫn thay θ ngược về x. Chọn một cách và giữ nguyên.
Forgetting to change the limits in a definite integral, or changing them and then also converting back to x. Pick one route and stay with it.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên nhân dx, hoặc viết căn thành a cosθ khi dạng căn lại là $a^2 + x^2$. Mỗi dạng có căn riêng, hãy xem lại bảng.

Forgetting dx, or writing the root as a cosθ when the form is $a^2 + x^2$. Each form has its own root, so check the table.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Vẽ tam giác với cạnh sai chỗ. Hãy ghi sẵn tỉ số, ví dụ sinθ = x/a, rồi mới điền cạnh.
Placing the sides wrongly in the triangle. Write the ratio first, for example sinθ = x/a, and then fill in the sides.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết $\sqrt{(\cos^2\theta)}$ thành cosθ mà không nghĩ tới miền của θ. Phép thế chỉ đúng khi θ nằm trong miền ghi ở bảng, nên hãy ghi miền ra trước khi rút gọn.
Writing $\sqrt{(\cos^2\theta)}$ as cosθ without thinking about the range of θ. The step is valid only when θ lies in the range given in the table, so write the range down before simplifying.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ dùng x = a sinθ; $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ dùng x = a tanθ; $\sqrt{(x^2 - a^2)}$ dùng x = a secθ.
$\sqrt{(a^2 - x^2)}$ uses x = a sinθ; $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ uses x = a tanθ; $\sqrt{(x^2 - a^2)}$ uses x = a secθ.

2.4. Tích phân hàm hữu tỉ bằng phân thức đơn giản – *2.4. Integrating Rational Functions with Partial Fractions*

Hàm hữu tỉ là một phân số có tử và mẫu đều là đa thức. Phân thức đơn giản là phép làm ngược lại việc quy đồng. Ví dụ 1/(x–1) – 1/(x+2) = 3/((x–1)(x+2)). Khi gặp vế phải, ta muốn tách nó về hai phân số nhỏ, vì mỗi phân số nhỏ tích phân rất dễ.
A rational function is a fraction whose numerator and denominator are both polynomials. Partial fractions is the reverse of finding a common denominator. For example, 1/(x–1) – 1/(x+2) = 3/((x–1)(x+2)). When you meet the right-hand side, you want to split it back into two small fractions, because each small fraction is easy to integrate.

Quy trình năm bước – *The five-step routine*

1. So bậc tử với bậc mẫu. Nếu bậc tử ≥ bậc mẫu, hãy chia đa thức trước để được thương cộng với phân số có bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu.
   Compare the degree of the numerator with the degree of the denominator. If the numerator's degree is greater than or equal to the denominator's, do polynomial long division first. You get a quotient plus a fraction whose numerator has the smaller degree.
2. Phân tích mẫu thành nhân tử bậc nhất và nhân tử bậc hai vô nghiệm. Bậc hai ax^2+bx+c vô nghiệm khi $\Delta = b^2-4ac < 0$, tức là không tách tiếp được.
   Factor the denominator into linear factors and irreducible quadratic factors. A quadratic ax^2+bx+c is irreducible when $\Delta = b^2-4ac < 0$, meaning it cannot be split further.
3. Viết dạng phân tích theo từng nhân tử, dùng bảng sau để tra.
   Write the decomposition factor by factor, using this table:

Nhân tử trong mẫu *Factor in the denominator*	**Phần tương ứng cần viết** *Matching terms to write*
Bậc nhất, không lặp: (x–a) *Linear, not repeated: (x–a)*	Một phân số A/(x–a). *One fraction A/(x–a).*

Nhân tử trong mẫu *Factor in the denominator*	**Phần tương ứng cần viết** *Matching terms to write*
Bậc nhất lặp: $(x–a)^2$ *Repeated linear: $(x–a)^2$*	Hai phân số $A/(x–a) + B/(x–a)^2$. *Two fractions $A/(x–a) + B/(x–a)^2$.*
Bậc hai vô nghiệm: $q = ax^2+bx+c$ *Irreducible quadratic: $q = ax^2+bx+c$*	Một phân số $(Ax+B)/q$. *One fraction $(Ax+B)/q$.*
Bậc hai vô nghiệm lặp: q^2 *Repeated irreducible quadratic: q^2*	Hai phân số $(Ax+B)/q + (Cx+D)/q^2$. *Two fractions $(Ax+B)/q + (Cx+D)/q^2$.*

1. Tìm các hệ số A, B, C… Nhân hai vế với mẫu chung để mất mẫu, rồi dùng một trong hai cách: thế giá trị x thích hợp, hoặc đồng nhất hệ số của các luỹ thừa x ở hai vế.
   Find the coefficients A, B, C… Multiply both sides by the common denominator to clear it. Then use one of two methods: plug in convenient values of x, or match the coefficients of each power of x on both sides.
2. Thay các hệ số vào, tích phân từng phân số, nhớ cộng hằng số C.
   Put the coefficients back, integrate each fraction, and add the constant C.

MẸO / TIP – Thế x bằng nghiệm của nhân tử bậc nhất sẽ làm các số hạng khác biến mất, nên ra ngay một hệ số. Hệ số còn lại thì đồng nhất. Hai cách phối hợp thường nhanh nhất.
Plugging in the root of a linear factor wipes out the other terms and gives one coefficient at once. Match coefficients for the rest. Using both methods together is usually fastest.

Ví dụ mẫu – *Worked examples*

VÍ DỤ / EXAMPLE – Nhân tử bậc nhất phân biệt. Tính $\int (5x+1)/((x–1)(x+2))\,dx$. Viết $(5x+1)/((x–1)(x+2)) = A/(x–1) + B/(x+2)$, suy ra $5x+1 = A(x+2) + B(x–1)$. Thế $x=1$: $6 = 3A$, nên $A=2$. Thế $x=–2$: $–9 = –3B$, nên $B=3$. Kết quả: $2\ln|x–1| + 3\ln|x+2| + C$.
Distinct linear factors. Compute $\int (5x+1)/((x–1)(x+2))\,dx$. Write $(5x+1)/((x–1)(x+2)) = A/(x–1) + B/(x+2)$, so $5x+1 = A(x+2) + B(x–1)$. Put $x=1$: $6 = 3A$, so $A=2$. Put $x=–2$: $–9 = –3B$, so $B=3$. Result: $2\ln|x–1| + 3\ln|x+2| + C$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Mẫu chưa ở dạng tích. Tính $\int 1/(x^2–4)\,dx$. Trước hết nhận ra $x^2–4 = (x–2)(x+2)$, hiệu hai bình phương. Viết $1/((x–2)(x+2)) = A/(x–2) + B/(x+2)$, suy ra $1 = A(x+2) + B(x–2)$. Thế $x=2$: $1=4A$, nên $A=1/4$. Thế $x=–2$: $1=–4B$, nên $B=–1/4$. Kết quả: $(1/4)\ln|x–2| – (1/4)\ln|x+2| + C$, hay $(1/4)\ln|(x–2)/(x+2)| + C$.
Denominator not yet a product. Compute $\int 1/(x^2–4)\,dx$. First spot that $x^2–4 = (x–2)(x+2)$, a difference of squares. Write $1/((x–2)(x+2)) = A/(x–2) + B/(x+2)$, so $1 = A(x+2) + B(x–2)$. Put $x=2$: $1=4A$, so $A=1/4$. Put $x=–2$: $1=–4B$, so $B=–1/4$. Result: $(1/4)\ln|x–2| – (1/4)\ln|x+2| + C$, or $(1/4)\ln|(x–2)/(x+2)| + C$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Cần chia trước. Tính $\int (x^2+2x+3)/(x^2–1)\,dx$. Tử và mẫu cùng bậc 2, nên chia: $x^2+2x+3 = 1\cdot(x^2–1) + (2x+4)$. Vậy hàm bằng $1 + (2x+4)/((x–1)(x+1))$. Đặt $(2x+4) = A(x+1) + B(x–1)$. Thế $x=1$: $6=2A$, $A=3$. Thế $x=–1$: $2=–2B$, $B=–1$. Kết quả: $x + 3\ln|x–1| – \ln|x+1| + C$.
Division needed first. Compute $\int (x^2+2x+3)/(x^2–1)\,dx$. Numerator and denominator both have degree 2, so divide: $x^2+2x+3 = 1\cdot(x^2–1) + (2x+4)$. The function equals $1 + (2x+4)/((x–1)(x+1))$. Set $2x+4 =$

$A(x+1) + B(x–1)$. Put $x=1$: $6=2A$, so $A=3$. Put $x=–1$: $2=–2B$, so $B=–1$. Result: $x + 3\ln|x–1| – \ln|x+1| + C$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Nhân tử lặp. Tính $\int 1/(x(x+1)^2)\,dx$. Viết $1/(x(x+1)^2) = A/x + B/(x+1) + C/(x+1)^2$, suy ra $1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$. Thế $x=0$: $A=1$. Thế $x=–1$: $1=–C$, nên $C=–1$. Hệ số của x^2 ở hai vế: $0 = A+B$, nên $B=–1$. Kiểm tra hệ số của x: $2A+B+C = 2–1–1 = 0$, khớp. Kết quả: $\ln|x| – \ln|x+1| + 1/(x+1) + C$.

Repeated factor. Compute $\int 1/(x(x+1)^2)\,dx$. Write $1/(x(x+1)^2) = A/x + B/(x+1) + C/(x+1)^2$, so $1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$. Put $x=0$: $A=1$. Put $x=–1$: $1=–C$, so $C=–1$. Compare the x^2 coefficients: $0 = A+B$, so $B=–1$. Check the x coefficient: $2A+B+C = 2–1–1 = 0$, which matches. Result: $\ln|x| – \ln|x+1| + 1/(x+1) + C$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Nhân tử bậc hai vô nghiệm. Tính $\int (3x+1)/((x–1)(x^2+1))\,dx$. Vì x^2+1 có $\Delta = –4 < 0$, viết $A/(x–1) + (Bx+C)/(x^2+1)$, suy ra $3x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x–1)$. Thế $x=1$: $4=2A$, $A=2$. Hệ số x^2: $0=A+B$, $B=–2$. Hệ số tự do: $1 = A – C$, $C=1$. Hàm bằng $2/(x–1) + (–2x+1)/(x^2+1)$. Kết quả: $2\ln|x–1| – \ln(x^2+1) + \arctan x + C$.

Irreducible quadratic factor. Compute $\int (3x+1)/((x–1)(x^2+1))\,dx$. Since x^2+1 has $\Delta = –4 < 0$, write $A/(x–1) + (Bx+C)/(x^2+1)$, so $3x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x–1)$. Put $x=1$: $4=2A$, $A=2$. Coefficient of x^2: $0=A+B$, $B=–2$. Constant term: $1 = A – C$, $C=1$. The function equals $2/(x–1) + (–2x+1)/(x^2+1)$. Result: $2\ln|x–1| – \ln(x^2+1) + \arctan x + C$.

GHI CHÚ / NOTE – Phần $(–2x)/(x^2+1)$ tích phân bằng cách đặt $u = x^2+1$. Phần $1/(x^2+1)$ cho arctan x. Mỗi tử bậc nhất trên mẫu bậc hai đều tách được theo hai hướng này.

The piece $–2x/(x^2+1)$ integrates with $u = x^2+1$. The piece $1/(x^2+1)$ gives arctan x. Any linear numerator over a quadratic denominator splits along these two lines.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Đổi biến để ra hàm hữu tỉ. Tính $\int e^x/((e^x–1)(e^x+2))\,dx$. Đặt $u = e^x$, thì $du = e^x\,dx$, và tích phân thành $\int 1/((u–1)(u+2))\,du$. Viết $1 = A(u+2) + B(u–1)$. Thế $u=1$: $1=3A$, nên $A=1/3$. Thế $u=–2$: $1=–3B$, nên $B=–1/3$. Kết quả: $(1/3)\ln|u–1| – (1/3)\ln|u+2| + C$. Trả $u = e^x$: $(1/3)\ln|(e^x–1)/(e^x+2)| + C$.

Substitution to reach a rational function. Compute $\int e^x/((e^x–1)(e^x+2))\,dx$. Let $u = e^x$, so $du = e^x\,dx$, and the integral becomes $\int 1/((u–1)(u+2))\,du$. Write $1 = A(u+2) + B(u–1)$. Put $u=1$: $1=3A$, so $A=1/3$. Put $u=–2$: $1=–3B$, so $B=–1/3$. Result: $(1/3)\ln|u–1| – (1/3)\ln|u+2| + C$. Replace u with e^x: $(1/3)\ln|(e^x–1)/(e^x+2)| + C$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên chia đa thức khi bậc tử ≥ bậc mẫu, dẫn tới hệ không giải được hoặc kết quả thiếu phần đa thức.

Forgetting long division when the numerator's degree is at least the denominator's. The system then has no solution, or the answer misses the polynomial part.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Với $(x–a)^2$ chỉ viết $A/(x–a)^2$. Phải có cả $A/(x–a)$ lẫn $B/(x–a)^2$. Nhân tử lặp bậc n thì viết đủ n phân số.

For $(x–a)^2$, writing only $A/(x–a)^2$. You need both $A/(x–a)$ and $B/(x–a)^2$. A factor repeated n times needs n fractions.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đặt tử là hằng số cho nhân tử bậc hai. Tử phải là Ax+B. Ngoài ra, không phải bậc hai nào cũng vô nghiệm, hãy tính Δ trước khi quyết định.

Using a constant numerator over a quadratic factor. The numerator must be Ax+B. Also, not every quadratic is irreducible, so compute Δ before you decide.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết ln(x–a) thiếu dấu giá trị tuyệt đối, hoặc tính sai hệ số rồi không thử lại. Có thể kiểm tra bằng cách thế một giá trị x bất kỳ vào đẳng thức đã nhân mẫu.
Writing ln(x–a) without absolute value, or miscalculating a coefficient and never checking. You can test by plugging any x into the identity after clearing denominators.

2.5. Chiến lược chọn phương pháp và dùng bảng tích phân – *2.5. Choosing a Method and Using Integral Tables*

Gặp một tích phân lạ, đừng vội chọn kỹ thuật. Hãy nhìn hình dạng hàm dưới dấu tích phân, giống như bác sĩ nhìn triệu chứng trước khi kê đơn. Bạn sẽ có một quy trình nhận dạng, cách dùng bảng và phần mềm, và cách kiểm tra kết quả.
When you meet an unfamiliar integral, don't pick a technique right away. Look at the shape of the integrand first, the way a doctor looks at symptoms before prescribing. You get a recognition routine, advice on tables and software, and a way to check your answer.

Quy trình nhận dạng theo dấu hiệu – *Recognizing the type from its features*

1. Thử cách đơn giản nhất: có công thức nguyên hàm cơ bản dùng ngay không, hoặc rút gọn biểu thức (khai triển, chia đa thức, đổi lượng giác) có làm bài dễ hơn không.
   Try the simplest route: does a basic antiderivative formula apply, or does simplifying (expanding, dividing polynomials, a trig identity) make it easier?
2. Tìm một hàm và đạo hàm của nó cùng xuất hiện, ví dụ x và x^2, hoặc cos x và sin x. Nếu có, đặt u bằng hàm bên trong và đổi biến.
   Look for a function and its derivative appearing together, such as x and x^2, or cos x and sin x. If so, let u be the inner function and substitute.
3. Thấy tích của hai loại hàm khác nhau (đa thức nhân mũ, đa thức nhân lượng giác, logarit, hàm lượng giác ngược) thì nghĩ đến tích phân từng phần.
   If you see a product of two different kinds of function (polynomial times exponential or trig, a logarithm, an inverse trig function), think integration by parts.
4. Thấy căn dạng $\sqrt{(a^2 - x^2)}$, $\sqrt{(a^2 + x^2)}$, $\sqrt{(x^2 - a^2)}$ thì dùng phép thế lượng giác. Thấy tích các lũy thừa của sin và cos thì dùng kỹ thuật tích phân lượng giác.
   A root like $\sqrt{(a^2 - x^2)}$, $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ or $\sqrt{(x^2 - a^2)}$ calls for trigonometric substitution. Products of powers of sin and cos call for trig-integral techniques.
5. Thấy phân thức của hai đa thức thì chia dài nếu bậc tử không nhỏ hơn bậc mẫu, rồi phân tích mẫu và tách thành phân thức đơn giản. Mẫu bậc hai vô nghiệm thì thử hoàn thành bình phương.
   For a ratio of polynomials, divide first if the numerator's degree is not smaller than the denominator's, then factor the denominator and split into partial fractions. For an irreducible quadratic, try completing the square.
6. Nếu đã thử mà chưa thấy dấu hiệu nào khớp, tra bảng tích phân hoặc nhờ CAS, rồi đối chiếu kết quả bằng đạo hàm.
   If no feature matches after a fair try, look in an integral table or ask a CAS, then verify the result by differentiating.

Bảng tích phân và phần mềm – *Integral tables and software*

Bảng tích phân là danh sách công thức có đánh số. Bạn đưa bài về đúng dạng một dòng trong bảng, thường bằng đổi biến hoặc hoàn thành bình phương, rồi thay số. Phần mềm đại số máy tính (CAS) cho kết quả nhanh hơn, nhưng bạn vẫn phải biết cách làm tay để thi.

An integral table is a numbered list of formulas. You rewrite your integral to match a line in the table, usually by a substitution or by completing the square, then plug in. A computer algebra system (CAS) is faster, but you still need hand methods for the exam.

1. Chọn dòng trong bảng có hình dạng gần bài nhất. Nhìn vào căn, phân thức hoặc hàm lượng giác có mặt trong bài.
   Pick the table line whose shape is closest to your integral. Look at the root, fraction or trig function in it.
2. Đổi biến cho khớp dòng đó. Ví dụ với $x^2 + 4x + 13$, viết thành $(x + 2)^2 + 9$ rồi đặt $u = x + 2$.
   Substitute so the integral matches that line. For $x^2 + 4x + 13$, write it as $(x + 2)^2 + 9$ and let $u = x + 2$.
3. Thay các hằng số như a và b vào công thức, nhân lại hệ số nếu phép đổi biến sinh ra, rồi đổi u về x và viết thêm C.
   Plug in constants such as a and b, restore any factor the substitution created, convert u back to x and add C.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Hai kết quả khác hình thức vẫn có thể cùng đúng. Chúng có thể hơn kém nhau một hằng số hoặc một đồng nhất thức lượng giác. Đừng kết luận sai chỉ vì đáp án không giống bảng hay máy.
Two answers that look different can both be right. They may differ by a constant or by a trig identity. Don't call yours wrong just because it doesn't match the table or the software.

Kiểm tra bằng đạo hàm – *Checking by differentiation*

Đạo hàm của nguyên hàm phải trả về đúng hàm dưới dấu tích phân. Đây là cách kiểm tra chắc nhất, và nó không cần đáp án mẫu. Thử với Ví dụ 1 bên dưới: đạo hàm của $(1/2)\cdot e^{(x^2)}$ là $(1/2)\cdot e^{(x^2)}\cdot 2x = x\cdot e^{(x^2)}$, khớp với hàm ban đầu.

The derivative of your antiderivative must return the original integrand. This is the most reliable check, and it needs no answer key. Try it on Example 1 in the next section: the derivative of $(1/2)\cdot e^{(x^2)}$ is $(1/2)\cdot e^{(x^2)}\cdot 2x = x\cdot e^{(x^2)}$, which matches the original function.

Ví dụ phân loại tám tích phân hỗn hợp – *Classifying eight mixed integrals*

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ví dụ 1: $\int x\cdot e^{(x^2)}\,dx$. Có x và x^2 (đạo hàm của x^2 là 2x), nên đặt $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Kết quả: $(1/2)\cdot e^{(x^2)} + C$.
Example 1: $\int x\cdot e^{(x^2)}\,dx$. It has x and x^2 (the derivative of x^2 is 2x), so let $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Result: $(1/2)\cdot e^{(x^2)} + C$.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ví dụ 2: $\int x\cdot\cos x\,dx$. Tích đa thức nhân lượng giác, dùng từng phần với $u = x$, $dv = \cos x\,dx$. Kết quả: $x\cdot\sin x + \cos x + C$. Kiểm tra: đạo hàm là $\sin x + x\cdot\cos x - \sin x = x\cdot\cos x$. Đúng.

Example 2: ∫ x·cos x dx. A polynomial times a trig function, so use parts with u = x, dv = cos x dx. Result: x·sin x + cos x + C. Check: the derivative is sin x + x·cos x − sin x = x·cos x. Correct.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ví dụ 3: ∫ √(9 − x²) dx. Có căn dạng a² − x² với a = 3, đặt x = 3 sin θ. Kết quả: (x/2)·√(9 − x²) + (9/2)·arcsin(x/3) + C. Bảng tích phân cũng có sẵn công thức này.
Example 3: ∫ √(9 − x²) dx. The root has the form a² − x² with a = 3, so let x = 3 sin θ. Result: (x/2)·√(9 − x²) + (9/2)·arcsin(x/3) + C. An integral table also lists this formula.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ví dụ 4: ∫ (x + 5)/(x² − 1) dx. Phân thức, mẫu bằng (x − 1)(x + 1). Viết (x + 5)/((x − 1)(x + 1)) = A/(x − 1) + B/(x + 1). Thay x = 1 được A = 3, thay x = −1 được B = −2. Kết quả: 3 ln|x − 1| − 2 ln|x + 1| + C.
Example 4: ∫ (x + 5)/(x² − 1) dx. A rational function with denominator (x − 1)(x + 1). Write (x + 5)/((x − 1)(x + 1)) = A/(x − 1) + B/(x + 1). Setting x = 1 gives A = 3, and x = −1 gives B = −2. Result: 3 ln|x − 1| − 2 ln|x + 1| + C.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ví dụ 5: ∫ sin³x·cos²x dx. Lũy thừa lẻ của sin: tách sin³x = (1 − cos²x)·sin x, đặt u = cos x, du = −sin x dx. Được −∫ (1 − u²)·u² du = −u³/3 + u⁵/5. Kết quả: −cos³x/3 + cos⁵x/5 + C.
Example 5: ∫ sin³x·cos²x dx. An odd power of sin: write sin³x = (1 − cos²x)·sin x, let u = cos x, du = −sin x dx. This gives −∫ (1 − u²)·u² du = −u³/3 + u⁵/5. Result: −cos³x/3 + cos⁵x/5 + C.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ví dụ 6: ∫ dx/(x² + 4x + 13). Mẫu vô nghiệm, hoàn thành bình phương: x² + 4x + 13 = (x + 2)² + 9. Dùng công thức arctan với a = 3. Kết quả: (1/3)·arctan((x + 2)/3) + C.
Example 6: ∫ dx/(x² + 4x + 13). The denominator has no real roots, so complete the square: x² + 4x + 13 = (x + 2)² + 9. Use the arctan formula with a = 3. Result: (1/3)·arctan((x + 2)/3) + C.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ví dụ 7: ∫ (x² + 1)/(x + 1) dx. Bậc tử bằng 2, lớn hơn bậc mẫu bằng 1, nên chia dài trước: x² + 1 = (x + 1)(x − 1) + 2. Vậy biểu thức bằng x − 1 + 2/(x + 1). Kết quả: x²/2 − x + 2 ln|x + 1| + C.
Example 7: ∫ (x² + 1)/(x + 1) dx. The numerator has degree 2, higher than the denominator's 1, so divide first: x² + 1 = (x + 1)(x − 1) + 2. The expression equals x − 1 + 2/(x + 1). Result: x²/2 − x + 2 ln|x + 1| + C.

VÍ DỤ / EXAMPLE – Ví dụ 8: ∫ sin x·cos x dx. Đặt u = sin x thì được sin²x/2 + C. Đặt u = cos x thì được −cos²x/2 + C. Hai đáp án trông khác nhau, nhưng sin²x/2 − (−cos²x/2) = (sin²x + cos²x)/2 = 1/2, chỉ là một hằng số. Cả hai đều đúng.
Example 8: ∫ sin x·cos x dx. Let u = sin x to get sin²x/2 + C. Let u = cos x to get −cos²x/2 + C. The two answers look different, but sin²x/2 − (−cos²x/2) = (sin²x + cos²x)/2 = 1/2, just a constant. Both are correct.

Chỗ hay sai – *Common mistakes*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên chia dài khi bậc tử lớn hơn hoặc bằng bậc mẫu rồi mới tách phân thức. Quên hằng số C. Quên dấu trừ khi đặt u = cos x. Quên giá trị tuyệt đối trong logarit.
Forgetting long division when the numerator's degree is at least the denominator's before splitting into partial fractions. Forgetting the constant C. Dropping the minus sign when u = cos x. Leaving out the absolute value inside a logarithm.

> **MẸO / TIP –** Nếu một kỹ thuật làm bài rối thêm sau vài dòng, hãy dừng và thử dấu hiệu khác. Nhiều bài giải được bằng hai cách, và cách ngắn hơn thường đúng hơn.
> *If a technique makes the problem messier after a few lines, stop and try another feature. Many integrals can be solved two ways, and the shorter way is usually the better one.*

2.6. Tích phân số: trung điểm, hình thang, Simpson – *2.6. Numerical Integration: Midpoint, Trapezoidal, and Simpson's Rules*

Có những tích phân không tìm được nguyên hàm sơ cấp, ví dụ ∫ từ 0 đến 1 của e^(−x²) dx. Khi đó ta tính gần đúng bằng cách chia đoạn [a, b] thành n đoạn nhỏ bằng nhau, mỗi đoạn rộng Δx = (b − a)/n, rồi thay đường cong bằng hình đơn giản hơn. Các điểm chia là $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$.

P: Some integrals have no elementary antiderivative, for example the integral from 0 to 1 of e^(−x²) dx. In that case we estimate the value: split [a, b] into n equal pieces of width Δx = (b − a)/n, then replace the curve with a simpler shape. The division points are $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$.

Ba quy tắc – *Three rules*

Quy tắc trung điểm dùng hình chữ nhật, chiều cao lấy tại điểm giữa mỗi đoạn. Quy tắc hình thang nối các đầu mút bằng đoạn thẳng. Quy tắc Simpson thay đường cong bằng các parabol, mỗi parabol đi qua ba điểm liên tiếp, nên n phải là số chẵn.

P: The midpoint rule uses rectangles whose height is read at the middle of each piece. The trapezoidal rule joins the endpoints with straight segments. Simpson's rule fits a parabola through each group of three consecutive points, so n must be even.

> **PHẢI THUỘC / MEMORISE –** Gọi m_i là trung điểm của đoạn thứ i. Trung điểm: $M_n = \Delta x \cdot [f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n)]$. Hình thang: $T_n = (\Delta x/2) \cdot [f(x_0) + 2f(x_1) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$. Simpson: $S_n = (\Delta x/3) \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$.
> *Let m_i be the midpoint of the i-th piece. Midpoint: $M_n = \Delta x \cdot [f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n)]$. Trapezoid: $T_n = (\Delta x/2) \cdot [f(x_0) + 2f(x_1) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$. Simpson: $S_n = (\Delta x/3) \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$.*

Hệ số của Simpson lặp theo kiểu 1, 4, 2, 4, 2, ..., 4, 1. Hai đầu là 1, các điểm lẻ là 4, các điểm chẵn bên trong là 2.

P: Simpson's coefficients follow the pattern 1, 4, 2, 4, 2, ..., 4, 1. The two ends get 1, odd-numbered points get 4, and the even-numbered interior points get 2.

Sai số và cận sai số – *Error and error bounds*

Sai số tuyệt đối là |giá trị đúng − giá trị xấp xỉ|. Sai số tương đối là sai số tuyệt đối chia cho |giá trị đúng|, thường đổi ra phần trăm. Thực tế ta không biết giá trị đúng, nên dùng cận trên của sai số.

P: The absolute error is |exact value − estimate|. The relative error is the absolute error divided by |exact value|, usually written as a percentage. In practice we do not know the exact value, so we use an upper bound for the error.