

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP

Toán kinh tế

Dành cho sinh viên đại học khối kinh tế, tài chính

Mathematics for Economics — a bilingual study guide

Ma trận · Hệ phương trình · Mô hình cân bằng và Leontief · Đạo hàm cận biên · Hệ số co giãn · Tối ưu · Tích phân · Hàm nhiều biến · Cực trị Lagrange · Phương trình vi phân

Ví dụ giải từng bước · Kiểm đáp số bằng Python

Bài tập có lời giải · Tự luận có đáp số · Trắc nghiệm có đáp án

Song ngữ Việt – Anh · Vietnamese – English

Phiên bản 1.0 — Tháng 10 năm 2026

<https://globalmarket.vin>

M U C L U C

CONTENTS

Chương 1. Ma trận và định thức — Chapter 1. Matrices and determinants	6
1.1. Ma trận và các dạng ma trận đặc biệt — <i>Matrices and special types of matrices</i>	6
1.2. Các phép toán trên ma trận — <i>Matrix operations.....</i>	8
1.3. Định thức — <i>Determinants</i>	13
1.4. Ma trận nghịch đảo — <i>The inverse matrix.....</i>	17
1.5. Hạng của ma trận — <i>The rank of a matrix.....</i>	22
1.6. Kiểm bằng máy tính với Python — <i>Checking with Python</i>	23
1.7. Tổng hợp công thức và thuật ngữ — <i>Summary of formulas and terminology.....</i>	24
1.8. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	27
1.9. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	29
1.10. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	31
Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính — Chapter 2. Systems of linear equations.....	33
2.1. Khái niệm và dạng ma trận của hệ — <i>Basic notions and the matrix form.....</i>	33
2.2. Quy tắc Cramer — <i>Cramer's rule.....</i>	36
2.3. Giải hệ bằng ma trận nghịch đảo — <i>Solving by the inverse matrix</i>	38
2.4. Phương pháp khử Gauss — <i>Gaussian elimination</i>	41
2.5. Định lý Kronecker–Capelli và biện luận số nghiệm — <i>The Kronecker–Capelli theorem and the number of solutions</i>	44
2.6. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất — <i>Homogeneous linear systems.....</i>	47
2.7. Chọn phương pháp và kiểm bằng máy — <i>Choosing a method and checking by computer.....</i>	51
2.8. Bảng tổng hợp công thức — <i>Summary of formulas</i>	52
2.9. Thuật ngữ Việt – Anh — <i>Vietnamese – English glossary</i>	53
2.10. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	55
2.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	58
2.12. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	59
Chương 3. Mô hình tuyến tính trong kinh tế — Chapter 3. Linear models in economics	62
3.1. Mô hình cân bằng thị trường một hàng hóa — <i>Single-good market equilibrium model</i>	62
3.2. Mô hình cân bằng thị trường nhiều hàng hóa — <i>Multi-good market equilibrium model</i>	65
3.3. Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân — <i>National income equilibrium model.....</i>	67
3.4. Mô hình IS–LM — <i>The IS–LM model</i>	70
3.5. Mô hình input–output Leontief — <i>The Leontief input–output model.....</i>	72
3.6. Giải mô hình bằng Python — <i>Solving the models with Python</i>	77
3.7. Tổng hợp công thức và thuật ngữ — <i>Summary of formulas and terms</i>	79
3.8. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	82

3.9. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	85
3.10. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	87
Chương 4. Hàm số, giới hạn và liên tục trong kinh tế — Chapter 4. Functions, limits and continuity in economics	89
4.1. Hàm số một biến và các hàm số kinh tế cơ bản — <i>Functions of one variable and basic economic functions</i>	89
4.2. Giới hạn của hàm số — <i>Limits of functions</i>	94
4.3. Vô cùng bé, vô cùng lớn và giới hạn dạng vô định — <i>Infinitesimals, infinitely large quantities and indeterminate forms</i>	96
4.4. Số e, lãi kép và lãi kép liên tục — <i>The number e, compound and continuous compounding</i>	99
4.5. Hàm số liên tục và điểm gián đoạn — <i>Continuous functions and discontinuities</i>	101
4.6. Hàm liên tục từng khúc trong kinh tế: giá bậc thang và thuế lũy tiến — <i>Piecewise functions in economics: tiered prices and progressive tax</i>	104
4.7. Kiểm tra kết quả bằng Python — <i>Checking results with Python</i>	106
4.8. Bảng tổng hợp công thức chương 4 — <i>Chapter 4 formula summary</i>	107
4.9. Thuật ngữ Việt – Anh chương 4 — <i>Chapter 4 Vietnamese – English glossary</i>	108
4.10. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	110
4.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	112
4.12. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	114
Chương 5. Đạo hàm, vi phân và phân tích cận biên — Chapter 5. Derivatives, differentials and marginal analysis	116
5.1. Đạo hàm và các quy tắc tính — <i>Derivatives and differentiation rules</i>	116
5.2. Vi phân, đạo hàm cấp cao và quy tắc L'Hôpital — <i>Differentials, higher-order derivatives and L'Hôpital's rule</i>	121
5.3. Giá trị cận biên — <i>Marginal values</i>	123
5.4. Hệ số co giãn — <i>Elasticity</i>	127
5.5. Tốc độ tăng trưởng — <i>Growth rates</i>	132
5.6. Tổng hợp công thức, thuật ngữ và kiểm bằng máy — <i>Formula summary, glossary and computer check</i>	133
5.7. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	137
5.8. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	139
5.9. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	141
Chương 6. Tối ưu hàm một biến trong kinh tế — Chapter 6. Single-variable optimisation in economics	144
6.1. Cực trị của hàm một biến — <i>Extrema of a function of one variable</i>	144
6.2. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên một đoạn — <i>Global maximum and minimum on a closed interval</i>	147
6.3. Tính lồi, lõm và điểm uốn — <i>Convexity, concavity and inflection points</i>	149
6.4. Tối đa doanh thu và lợi nhuận — <i>Maximising revenue and profit</i>	152
6.5. Tối thiểu chi phí trung bình — <i>Minimising average cost</i>	155
6.6. Thuế tối ưu trên mỗi đơn vị sản phẩm — <i>The optimal per-unit tax</i>	157

6.7. Quy mô đặt hàng tối ưu (EOQ) — <i>The economic order quantity (EOQ)</i>	159
6.8. Tổng hợp công thức, thuật ngữ và kiểm bằng máy — <i>Formula summary, glossary and computer check</i>	162
6.9. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	165
6.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	168
6.11. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	170
Chương 7. Tích phân và ứng dụng trong kinh tế, tài chính — Chapter 7. Integration and its applications in economics and finance	172
7.1. Nguyên hàm và tích phân bất định — <i>Antiderivatives and indefinite integrals</i>	172
7.2. Phương pháp đổi biến và tích phân từng phần — <i>Substitution and integration by parts</i>	174
7.3. Tích phân xác định — <i>Definite integrals</i>	176
7.4. Tích phân suy rộng — <i>Improper integrals</i>	178
7.5. Tìm hàm tổng từ hàm cận biên; quỹ vốn từ dòng đầu tư — <i>Total functions from marginal functions; capital stock from investment flow</i>	179
7.6. Thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất — <i>Consumer surplus and producer surplus</i>	182
7.7. Giá trị hiện tại và giá trị tương lai của dòng tiền liên tục — <i>Present and future value of continuous cash flows</i>	185
7.8. Đường Lorenz và hệ số Gini — <i>The Lorenz curve and the Gini coefficient</i>	187
7.9. Tổng hợp công thức, thuật ngữ và kiểm bằng máy — <i>Formula summary, glossary and computer check</i>	189
7.10. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	193
7.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	195
7.12. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	197
Chương 8. Hàm nhiều biến và đạo hàm riêng — Chapter 8. Functions of several variables and partial derivatives	199
8.1. Hàm hai biến, miền xác định và đường mức — <i>Functions of two variables, domain and level curves</i>	199
8.2. Đạo hàm riêng và giá trị cận biên — <i>Partial derivatives and marginal values</i>	202
8.3. Vi phân toàn phần, xấp xỉ và đạo hàm hàm hợp — <i>Total differential, approximation and the chain rule</i>	205
8.4. Đạo hàm riêng cấp hai và quy luật cận biên giảm dần — <i>Second-order partial derivatives and diminishing marginal returns</i>	207
8.5. Đạo hàm hàm ẩn, tỷ lệ thay thế kỹ thuật cận biên và tỷ lệ thay thế cận biên — <i>Implicit differentiation, the marginal rate of technical substitution and the marginal rate of substitution</i>	208
8.6. Hàm thuần nhất, định lý Euler và hàm Cobb–Douglas — <i>Homogeneous functions, Euler’s theorem and the Cobb–Douglas function</i>	210
8.7. Hệ số co giãn riêng và co giãn chéo — <i>Partial elasticities and cross elasticities</i>	213
8.8. Bảng tổng hợp công thức và kiểm bằng máy — <i>Formula summary and computer check</i>	216
8.9. Thuật ngữ Việt – Anh — <i>Vietnamese – English glossary</i>	217

8.10. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	219
8.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	222
8.12. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	224
Chương 9. Cực trị tự do và cực trị có điều kiện — Chapter 9. Unconstrained and constrained optimisation	226
9.1. Cực trị tự do của hàm hai biến — <i>Unconstrained extrema of two-variable functions</i>	226
9.2. Ma trận Hesse của hàm nhiều biến — <i>The Hessian matrix of functions of several variables</i>	229
9.3. Bài toán cực trị tự do trong kinh tế — <i>Unconstrained optimisation problems in economics</i>	230
9.4. Cực trị có điều kiện: bài toán và phương pháp thế — <i>Constrained extrema: the problem and the substitution method</i>	233
9.5. Phương pháp nhân tử Lagrange và định thức Hesse bao — <i>The Lagrange multiplier method and the bordered Hessian</i>	234
9.6. Bài toán cực trị có điều kiện trong kinh tế — <i>Constrained optimisation problems in economics</i>	238
9.7. Tổng hợp công thức, thuật ngữ và kiểm bằng máy — <i>Formula summary, glossary and machine check</i>	243
9.8. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	247
9.9. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	249
9.10. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	251
Chương 10. Phương trình vi phân và ứng dụng — Chapter 10. Differential equations and applications	253
10.1. Khái niệm cơ bản về phương trình vi phân — <i>Basic concepts of differential equations</i>	253
10.2. Phương trình vi phân tách biến — <i>Separable differential equations</i>	255
10.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một — <i>First-order linear differential equations</i>	256
10.4. Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng — <i>Second-order linear equations with constant coefficients</i>	258
10.5. Mô hình tăng trưởng mũ và tăng trưởng logistic — <i>Exponential and logistic growth models</i>	260
10.6. Lãi kép liên tục có nạp và rút tiền — <i>Continuous compounding with deposits and withdrawals</i>	262
10.7. Mô hình điều chỉnh giá động Evans — <i>The Evans dynamic price adjustment model</i>	264
10.8. Mô hình tăng trưởng Domar — <i>The Domar growth model</i>	266
10.9. Tìm hàm cầu từ hệ số co giãn cho trước — <i>Recovering demand from a given elasticity</i>	267
10.10. Tổng hợp công thức, thuật ngữ và kiểm bằng máy — <i>Formula summary, glossary and computer check</i>	269
10.11. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	273

10.12. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	275
10.13. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	277
Phụ lục A. Đáp án câu hỏi trắc nghiệm — <i>Appendix A. Answer key</i>.....	279
Phụ lục B. Bảng công thức — <i>Appendix B. Formula tables</i>	283
Phụ lục C. Thuật ngữ Việt – Anh — <i>Appendix C. Vietnamese–English glossary</i>.....	285
Tài liệu tham khảo — <i>References</i>.....	293

Chương 1. Ma trận và định thức — Chapter 1. Matrices and determinants

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Biểu diễn bảng số liệu kinh doanh (doanh số, đơn giá, định mức tiêu hao) dưới dạng ma trận và vector.
Represent business tables (unit sales, prices, input requirements) as matrices and vectors.
- Thực hiện đúng các phép cộng, nhân số, nhân ma trận, chuyển vị; kiểm tra điều kiện kích thước trước khi nhân.
Carry out addition, scalar multiplication, matrix multiplication and transposition correctly; check the size condition before multiplying.
- Tính định thức cấp 2, cấp 3 (Sarrus), cấp cao (khai triển Laplace, đưa về tam giác) và vận dụng các tính chất của định thức.
Compute determinants of order 2 and 3 (Sarrus) and of higher order (Laplace expansion, reduction to triangular form), using the properties of determinants.
- Tìm ma trận nghịch đảo bằng ma trận phụ hợp và bằng Gauss–Jordan; giải phương trình ma trận $AX = B$, $XA = B$.
Find an inverse by the adjugate and by Gauss–Jordan elimination; solve the matrix equations $AX = B$ and $XA = B$.
- Tìm hạng ma trận bằng biến đổi sơ cấp, biện luận hạng theo tham số.
Find the rank of a matrix by elementary row operations and discuss the rank in terms of a parameter.

1.1. Ma trận và các dạng ma trận đặc biệt — Matrices and special types of matrices

Khái niệm ma trận — The concept of a matrix

Bảng số liệu kinh doanh thường có dạng hàng – cột: mỗi hàng là một cửa hàng, một tháng hay một sản phẩm; mỗi cột là một mặt hàng, một loại nguyên liệu hay một chỉ tiêu. Viết bảng đó thành một khối số đặt trong ngoặc vuông ta được một **ma trận**. Phần tử ở dòng i , cột j ký hiệu a_{ij} : chỉ số thứ nhất luôn là dòng, chỉ số thứ hai luôn là cột.

*Business tables are usually laid out in rows and columns: each row a shop, a month or a product; each column an item, an input or an indicator. Writing such a table as a block of numbers in square brackets gives a **matrix**. The entry in row i and column j is written a_{ij} : the first index is always the row, the second always the column.*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Ma trận cỡ $m \times n$ là một bảng gồm $m \cdot n$ số xếp thành **m** dòng và **n** cột. Ký hiệu $A = (a_{ij})_{m \times n}$, với $i = 1, \dots, m$ và $j = 1, \dots, n$. Hai ma trận **bằng nhau** khi cùng cỡ và mọi phần tử ở cùng vị trí bằng nhau.

*An $m \times n$ matrix is an array of $m \cdot n$ numbers arranged in m rows and n columns, written $A = (a_{ij})_{m \times n}$ with $i = 1, \dots, m$ and $j = 1, \dots, n$. Two matrices are **equal** when they have the same size and all corresponding entries are equal.*

Dạng tổng quát của ma trận cỡ 3×3 (chỉ số dưới: dòng trước, cột sau):

General form of a 3×3 matrix (subscripts: row first, column second):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{3 \times 3}$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Công ty bánh kẹo Hoàng Mai có 2 cửa hàng, bán 3 loại sản phẩm: bánh quy hộp, bánh bông lan, bánh trung thu. Số hộp bán trong tháng 9: cửa hàng 1 bán 120; 80; 50 hộp, cửa hàng 2 bán 90; 110; 60 hộp. Ma trận doanh số tháng 9 là ma trận A cỡ 2×3 dưới đây. Phần tử $a_{23} = 60$ là số hộp bánh trung thu (cột 3) của hàng 2 (dòng 2) bán được.
Hoàng Mai Confectionery has 2 shops selling 3 products: boxed biscuits, sponge cakes and mooncakes. September sales in boxes: shop 1 sold 120, 80, 50; shop 2 sold 90, 110, 60. The September sales matrix is the 2×3 matrix A below. Entry $a_{23} = 60$ is the number of mooncake boxes (column 3) sold by shop 2 (row 2).

$$A = \begin{bmatrix} 120 & 80 & 50 \\ 90 & 110 & 60 \end{bmatrix} \text{ (hộp)}$$

Các dạng ma trận đặc biệt — *Special types of matrices*

Tên gọi <i>Name</i>	Đặc điểm <i>Feature</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Ma trận vuông cấp n <i>Square matrix of order n</i>	Số dòng = số cột = n; các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tạo thành đường chéo chính <i>Rows = columns = n; $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ form the main diagonal</i>	(2; 1), (3; 4) là ma trận vuông cấp 2 <i>(2; 1), (3; 4) is square of order 2</i>
Ma trận dòng, ma trận cột <i>Row matrix, column matrix</i>	Cỡ $1 \times n$ hoặc $m \times 1$; còn gọi là vector dòng, vector cột <i>Size $1 \times n$ or $m \times 1$; also called row or column vectors</i>	Vector giá $p = (45; 30; 120)^T$ là ma trận cột 3×1 <i>The price vector $p = (45; 30; 120)^T$ is a 3×1 column</i>
Ma trận không O <i>Zero matrix O</i>	Mọi phần tử bằng 0; $A + O = A$ <i>All entries are 0; $A + O = A$</i>	Doanh số của một cửa hàng đóng cửa cả tháng <i>Sales of a shop closed for the whole month</i>
Ma trận chéo <i>Diagonal matrix</i>	Ma trận vuông, mọi phần tử ngoài đường chéo chính bằng 0 <i>Square, all entries off the main diagonal are 0</i>	(2; 0), (0; 5)
Ma trận đơn vị I_n <i>Identity matrix I_n</i>	Ma trận chéo có các phần tử chéo bằng 1; $AI = IA = A$ <i>Diagonal with all diagonal entries 1; $AI = IA = A$</i>	$I_2 = (1; 0), (0; 1)$

Tên gọi <i>Name</i>	Đặc điểm <i>Feature</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Ma trận tam giác trên (dưới) <i>Upper (lower) triangular matrix</i>	Ma trận vuông có mọi phần tử nằm dưới (trên) đường chéo chính bằng 0 <i>Square, all entries below (above) the main diagonal are 0</i>	(1; 4; 2), (0; 3; 5), (0; 0; 6) là tam giác trên <i>(1; 4; 2), (0; 3; 5), (0; 0; 6) is upper triangular</i>
Ma trận đối xứng <i>Symmetric matrix</i>	Ma trận vuông có $a_{ij} = a_{ji}$, tức $A^T = A$ <i>Square with $a_{ij} = a_{ji}$, that is $A^T = A$</i>	Bảng khoảng cách giữa các kho hàng <i>A table of distances between warehouses</i>

Trong bảng trên và trong cả chương, cách viết “ma trận có các dòng (2; 1), (3; 4)” dùng để ghi gọn ma trận trong câu văn; dấu chấm phẩy ngăn các phần tử trong một dòng.

In the table above and throughout the chapter, “the matrix with rows (2; 1), (3; 4)” is a compact way of writing a matrix in running text; semicolons separate the entries of a row.

1.2. Các phép toán trên ma trận — Matrix operations

Cộng, trừ hai ma trận và nhân ma trận với một số — Addition, subtraction and scalar multiplication

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Hai ma trận **cùng cỡ** $m \times n$ cộng (trừ) bằng cách cộng (trừ) các phần tử cùng vị trí: $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$. Nhân số k với ma trận: nhân k vào **mọi** phần tử, $kA = (k \cdot a_{ij})$. Ma trận khác cỡ không cộng được.

*Two matrices of the **same size** $m \times n$ are added (subtracted) entry by entry: $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$. A scalar k multiplies **every** entry: $kA = (k \cdot a_{ij})$. Matrices of different sizes cannot be added.*

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}; \quad kA = (k \cdot a_{ij})_{m \times n} \quad (1.1)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Tiếp ví dụ Hoàng Mai. Doanh số tháng 10: cửa hàng 1 bán 135; 70; 65 hộp, cửa hàng 2 bán 100; 125; 80 hộp (ma trận B). (a) Tổng doanh số hai tháng $A + B$. (b) Mức thay đổi $B - A$. (c) Tháng 11 là mùa trung thu, công ty đặt kế hoạch mọi sản phẩm tăng 20% so với tháng 10: $1,2B$.

Continuing the Hoàng Mai example. October sales: shop 1 sold 135, 70, 65 boxes and shop 2 sold 100, 125, 80 (matrix B). (a) Two-month total $A + B$. (b) Change $B - A$. (c) November is the Mid-Autumn season and the plan raises every product by 20% over October: $1.2B$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 255 & 150 & 115 \\ 190 & 235 & 140 \end{bmatrix} \text{ (hộp, hai tháng)}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 15 & -10 & 15 \\ 10 & 15 & 20 \end{bmatrix} \text{ (hộp)}$$

$$1,2B = \begin{bmatrix} 162 & 84 & 78 \\ 120 & 150 & 96 \end{bmatrix} \text{ (hộp, kế hoạch tháng 11)}$$

Phần tử -10 của $B - A$ cho biết cửa hàng 1 bán bánh bông lan tháng 10 ít hơn tháng 9 là 10 hộp. Phép trừ ma trận cho ngay bằng biến động của mọi cặp cửa hàng – sản phẩm.

The entry -10 in $B - A$ means shop 1 sold 10 fewer boxes of sponge cake in October than in September. Matrix subtraction gives the change for every shop–product pair at once.

Nhân hai ma trận — Matrix multiplication

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Tích AB chỉ xác định khi **số cột của A bằng số dòng của B**. Nếu A cỡ $m \times p$ và B cỡ $p \times n$ thì $C = AB$ cỡ $m \times n$, phần tử c_{ij} bằng **dòng i của A nhân vô hướng với cột j của B**.

*The product AB is defined only when **the number of columns of A equals the number of rows of B**. If A is $m \times p$ and B is $p \times n$, then $C = AB$ is $m \times n$, and c_{ij} is **row i of A times column j of B** (dot product).*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad (1.2)$$

Quy tắc kiểm cỡ: viết $(m \times p) \cdot (p \times n) \rightarrow m \times n$. Hai số ở giữa phải bằng nhau, hai số ở ngoài là cỡ của tích.

Size check: write $(m \times p) \cdot (p \times n) \rightarrow m \times n$. The two inner numbers must match; the two outer numbers give the size of the product.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Đơn giá ba sản phẩm của Hoàng Mai là $p = (45; 30; 120)^T$ nghìn đồng/hộp. Doanh thu tháng 9 của từng cửa hàng là $A \cdot p$, với A cỡ 2×3 và p cỡ 3×1 , tích cỡ 2×1 . Cửa hàng 1: $120 \cdot 45 + 80 \cdot 30 + 50 \cdot 120 = 5.400 + 2.400 + 6.000 = 13.800$ nghìn đồng. Cửa hàng 2: $90 \cdot 45 + 110 \cdot 30 + 60 \cdot 120 = 4.050 + 3.300 + 7.200 = 14.550$ nghìn đồng. Tương tự, doanh thu tháng 10: $B \cdot p = (15.975; 17.850)^T$ nghìn đồng.

Hoàng Mai's unit prices are $p = (45; 30; 120)^T$ thousand VND per box. September revenue of each shop is $A \cdot p$ with A 2×3 and p 3×1 , so the product is 2×1 . Shop 1: $120 \cdot 45 + 80 \cdot 30 + 50 \cdot 120 = 5,400 + 2,400 + 6,000 = 13,800$ thousand VND. Shop 2: $90 \cdot 45 + 110 \cdot 30 + 60 \cdot 120 = 4,050 + 3,300 + 7,200 = 14,550$ thousand VND. Likewise, October revenue: $B \cdot p = (15,975; 17,850)^T$ thousand VND.

$$A \cdot p = \begin{bmatrix} 120 & 80 & 50 \\ 90 & 110 & 60 \end{bmatrix} \cdot (45; 30; 120)^T = (13.800; 14.550)^T$$

Ma trận chi phí: định mức tiêu hao nhân đơn giá đầu vào — Cost matrices: input requirements times input prices

Xưởng nội thất Trường An sản xuất bàn, ghế, tủ. Mỗi sản phẩm dùng ba đầu vào: ván gỗ (tám), sơn (lít), giờ công. Định mức tiêu hao xếp thành ma trận N (dòng: sản phẩm; cột: đầu vào). Đơn giá đầu vào là $c = (150; 80; 40)^T$ nghìn đồng cho một tấm ván, một lít sơn, một giờ công.

Trường An Furniture makes tables, chairs and wardrobes. Each product uses three inputs: wood panels (sheets), paint (litres) and labour hours. The input requirements form a matrix N (rows: products; columns: inputs). Input prices are $c = (150; 80; 40)^T$ thousand VND per sheet, per litre and per hour.

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ (bàn; ghế; tủ)}$$

- Chi phí đầu vào một đơn vị sản phẩm: $N \cdot c$. Bàn: $4 \cdot 150 + 1 \cdot 80 + 3 \cdot 40 = 800$; ghế: $300 + 80 + 80 = 460$; tủ: $900 + 160 + 200 = 1.260$ nghìn đồng.
Input cost per unit of product: $N \cdot c$. Table: $4 \cdot 150 + 1 \cdot 80 + 3 \cdot 40 = 800$; chair: $300 + 80 + 80 = 460$; wardrobe: $900 + 160 + 200 = 1,260$ thousand VND.
- Kế hoạch tháng: $q = (50; 200; 30)$ (vector dòng: 50 bàn, 200 ghế, 30 tủ). Nhu cầu đầu vào: $q \cdot N = (50 \cdot 4 + 200 \cdot 2 + 30 \cdot 6; 50 \cdot 1 + 200 \cdot 1 + 30 \cdot 2; 50 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 30 \cdot 5) = (780; 310; 700)$: 780 tấm ván, 310 lít sơn, 700 giờ công.
Monthly plan: $q = (50; 200; 30)$ (row vector: 50 tables, 200 chairs, 30 wardrobes). Input needs: $q \cdot N = (50 \cdot 4 + 200 \cdot 2 + 30 \cdot 6; 50 \cdot 1 + 200 \cdot 1 + 30 \cdot 2; 50 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 30 \cdot 5) = (780; 310; 700)$: 780 sheets, 310 litres, 700 hours.
- Tổng chi phí đầu vào: $q \cdot N \cdot c$. Tính theo $(q \cdot N) \cdot c = 780 \cdot 150 + 310 \cdot 80 + 700 \cdot 40 = 117.000 + 24.800 + 28.000 = 169.800$ nghìn đồng; tính theo $q \cdot (N \cdot c) = 50 \cdot 800 + 200 \cdot 460 + 30 \cdot 1.260 = 169.800$ nghìn đồng. Hai cách cho cùng một số, minh họa tính kết hợp.
Total input cost: $q \cdot N \cdot c$. As $(q \cdot N) \cdot c = 780 \cdot 150 + 310 \cdot 80 + 700 \cdot 40 = 117,000 + 24,800 + 28,000 = 169,800$ thousand VND; as $q \cdot (N \cdot c) = 50 \cdot 800 + 200 \cdot 460 + 30 \cdot 1,260 = 169,800$ thousand VND. Both orders give the same figure, illustrating associativity.

$$TC = q \cdot N \cdot c = (q \cdot N) \cdot c = q \cdot (N \cdot c) = 169.800 \text{ (nghìn đồng)} \quad (1.3)$$

Tính chất của các phép toán; phép nhân không giao hoán — *Properties of the operations; multiplication is not commutative*

Tính chất <i>Property</i>	Phát biểu <i>Statement</i>	Lưu ý <i>Remark</i>
Giao hoán của phép cộng <i>Commutativity of addition</i>	$A + B = B + A$	Đúng với mọi ma trận cùng cỡ <i>Holds for all matrices of the same size</i>
Kết hợp <i>Associativity</i>	$(A + B) + C = A + (B + C); (AB)C = A(BC)$	Cho phép bỏ ngoặc trong tích nhiều ma trận <i>Brackets can be dropped in long products</i>
Phân phối <i>Distributivity</i>	$A(B + C) = AB + AC; (A + B)C = AC + BC$	Giữ nguyên bên trái, bên phải <i>Keep left factors on the left, right factors on the right</i>

Tính chất <i>Property</i>	Phát biểu <i>Statement</i>	Lưu ý <i>Remark</i>
Nhân với số <i>Scalar factors</i>	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$	Số đứng ở đâu cũng được <i>A scalar can sit anywhere</i>
Phần tử đơn vị <i>Identity</i>	$AI_n = I_m A = A$ (A cỡ $m \times n$) $AI_n = I_m A = A$ (A is $m \times n$)	I đóng vai trò số 1 <i>I plays the role of the number 1</i>
Không giao hoán <i>Not commutative</i>	Nói chung $AB \neq BA$ <i>In general $AB \neq BA$</i>	BA có thể không xác định, hoặc khác cỡ, hoặc cùng cỡ nhưng khác số <i>BA may be undefined, of another size, or the same size with different entries</i>
Không có luật giản ước <i>No cancellation law</i>	$AB = O$ không suy ra $A = O$ hoặc $B = O$ <i>$AB = O$ does not imply $A = O$ or $B = O$</i>	$AB = AC$ không suy ra $B = C$ khi A không khả nghịch <i>$AB = AC$ does not give $B = C$ unless A is invertible</i>

VÍ DỤ / EXAMPLE — P có các dòng (1; 2), (0; 1); Q có các dòng (1; 0), (3; 1). PQ có các dòng (1 + 6; 0 + 2), (0 + 3; 0 + 1) = (7; 2), (3; 1). QP có các dòng (1; 2), (3; 6 + 1) = (1; 2), (3; 7). Cả hai đều cỡ 2×2 nhưng $PQ \neq QP$. Trong ví dụ Hoàng Mai, $A \cdot p$ có nghĩa (doanh thu), còn $p \cdot A$ không xác định vì p cỡ 3×1 , A cỡ 2×3 .

P has rows (1; 2), (0; 1); Q has rows (1; 0), (3; 1). PQ has rows (1 + 6; 0 + 2), (0 + 3; 0 + 1) = (7; 2), (3; 1). QP has rows (1; 2), (3; 6 + 1) = (1; 2), (3; 7). Both are 2×2 but $PQ \neq QP$. In the Hoàng Mai example $A \cdot p$ is meaningful (revenue), while $p \cdot A$ is undefined because p is 3×1 and A is 2×3 .

VÍ DỤ / EXAMPLE — Không có luật giản ước: E có các dòng (1; 2), (2; 4); F có các dòng (2; -4), (-1; 2). EF có các dòng (2 - 2; -4 + 4), (4 - 4; -8 + 8) = (0; 0), (0; 0), tức $EF = O$ dù $E \neq O$ và $F \neq O$. Với số thực, $ab = 0$ kéo theo $a = 0$ hoặc $b = 0$; với ma trận thì không.

No cancellation law: E has rows (1; 2), (2; 4); F has rows (2; -4), (-1; 2). EF has rows (2 - 2; -4 + 4), (4 - 4; -8 + 8) = (0; 0), (0; 0), so $EF = O$ although $E \neq O$ and $F \neq O$. For real numbers $ab = 0$ forces $a = 0$ or $b = 0$; for matrices it does not.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Nhân sai thứ tự. Sinh viên viết $p \cdot A$ thay cho $A \cdot p$, hoặc khai triển $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Đúng: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$; chỉ rút gọn thành $2AB$ khi biết chắc $AB = BA$. Trước mỗi phép nhân, viết cỡ hai ma trận ra lề để kiểm.

Multiplying in the wrong order. Students write $p \cdot A$ instead of $A \cdot p$, or expand $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Correct: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$; it reduces to $2AB$ only when $AB = BA$ is known. Before every product, write both sizes in the margin and check.

Ma trận chuyển vị — *The transpose*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Chuyển vị của A cỡ $m \times n$ là ma trận A^T cỡ $n \times m$ có được bằng cách đổi dòng thành cột: phần tử dòng i cột j của A^T là a_{ji} . Tính chất: $(A^T)^T = A$; $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(kA)^T = kA^T$; $(AB)^T = B^T A^T$.

The **transpose** of an $m \times n$ matrix A is the $n \times m$ matrix A^T obtained by turning rows into columns: the entry in row i , column j of A^T is a_{ji} . Properties: $(A^T)^T = A$; $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(kA)^T = kA^T$; $(AB)^T = B^T A^T$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 120 & 90 \\ 80 & 110 \\ 50 & 60 \end{bmatrix} \quad (\text{dòng: sản phẩm; cột: cửa hàng})$$

Chuyển vị ma trận doanh số A đổi cách nhìn: dòng là sản phẩm, cột là cửa hàng. Với vector dòng $u = (1; 1)$ thì $u \cdot A = (210; 190; 110)$ là tổng số hộp mỗi sản phẩm của cả hai cửa hàng trong tháng 9; cùng kết quả đó viết theo cột là $A^T \cdot u^T$.

Transposing the sales matrix A changes the viewpoint: rows become products, columns become shops. With the row vector $u = (1; 1)$, $u \cdot A = (210; 190; 110)$ is the September total of each product over both shops; the same result in column form is $A^T \cdot u^T$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết $(AB)^T = A^T B^T$. Thử với A cỡ 2×3 , B cỡ 3×4 : A^T cỡ 3×2 và B^T cỡ 4×3 nên $A^T B^T$ không nhân được, trong khi $B^T A^T$ cỡ 4×2 đúng bằng cỡ của $(AB)^T$. Chuyển vị một tích thì **đảo thứ tự**.

*Writing $(AB)^T = A^T B^T$. Try A 2×3 and B 3×4 : A^T is 3×2 and B^T is 4×3 , so $A^T B^T$ is undefined, whereas $B^T A^T$ is 4×2 , exactly the size of $(AB)^T$. Transposing a product **reverses the order**.*

Lũy thừa ma trận vuông: ma trận chuyển dịch thị phần — *Powers of a square matrix: a market-share transition matrix*

Với A vuông, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, ...; quy ước $A^0 = I$. Lũy thừa chỉ định nghĩa cho ma trận vuông. Ứng dụng quen thuộc là ma trận chuyển dịch: phần tử p_{ij} là tỉ lệ khách hàng đang dùng hãng i chuyển sang hãng j sau một kỳ; mỗi dòng có tổng bằng 1.

For square A , $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, ..., with $A^0 = I$. Powers are defined only for square matrices. A familiar application is the transition matrix: p_{ij} is the share of customers of firm i who move to firm j after one period; each row sums to 1.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Hai ví điện tử X và Y chia nhau thị trường thanh toán của một thành phố, mỗi ví đang giữ 50% người dùng: $x_0 = (0,5; 0,5)$. Sau mỗi quý, X giữ lại 80% người dùng của mình (20% sang Y); Y giữ lại 70% (30% sang X). Thị phần sau một quý: $x_1 = x_0 P = (0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,3; 0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,7) = (0,55; 0,45)$. Sau hai quý: $x_2 = x_0 P^2 = (0,575; 0,425)$. Ví X tăng từ 50% lên 57,5%.

Two e-wallets X and Y share a city's payments market, each with 50% of users: $x_0 = (0.5; 0.5)$. Each quarter X keeps 80% of its users (20% move to Y) and Y keeps 70% (30% move to X). Shares after one quarter: $x_1 = x_0 P = (0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.3; 0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.7) = (0.55; 0.45)$. After two quarters: $x_2 = x_0 P^2 = (0.575; 0.425)$. Wallet X rises from 50% to 57.5%.

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} \Rightarrow P^2 = [(0,7; 0,3), (0,45; 0,55)]$$

Phần tử (1; 2) của P^2 bằng $0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,3$: sau hai quý, 30% người dùng ban đầu của X đang dùng Y (gồm người chuyển ngay quý đầu và ở lại Y, cộng người ở lại X quý đầu rồi chuyển sang Y quý sau).

Entry (1; 2) of P^2 is $0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.3$: after two quarters, 30% of X's original users are on Y (those who switched in the first quarter and stayed, plus those who stayed with X and then switched).

1.3. Định thức — Determinants

Định thức cấp 2 và cấp 3 — Determinants of order 2 and 3

Mỗi ma trận **vuông** A được gán với một số gọi là **định thức**, ký hiệu $\det A$ hoặc $|A|$. Ma trận không vuông không có định thức. Định thức cho biết ma trận có khả nghịch hay không (mục 1.4) và hệ phương trình tương ứng có nghiệm duy nhất hay không (Chương 2).

*Every square matrix A has an associated number called its **determinant**, written $\det A$ or $|A|$. Non-square matrices have no determinant. The determinant tells whether the matrix is invertible (Section 1.4) and whether the corresponding linear system has a unique solution (Chapter 2).*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Cấp 2: tích đường chéo chính trừ tích đường chéo phụ. Cấp 3 (quy tắc Sarrus): chép thêm cột 1 và cột 2 sang bên phải, cộng ba tích theo đường chéo xuống, trừ ba tích theo đường chéo lên. **Sarrus chỉ dùng cho cấp 3.**

Order 2: product of the main diagonal minus product of the other diagonal. Order 3 (Sarrus' rule): copy columns 1 and 2 to the right, add the three downward diagonal products and subtract the three upward ones. Sarrus' rule works only for order 3.

$$\det [(a; b), (c; d)] = ad - bc \quad (1.4)$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (1.5)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Cấp 2: ma trận có các dòng (5; -3), (2; 4) có định thức $5 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 20 + 6 = 26$.

Order 2: the matrix with rows (5; -3), (2; 4) has determinant $5 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 20 + 6 = 26$.

Cấp 3: tính $\det A$ với A dưới đây bằng quy tắc Sarrus.

Order 3: compute $\det A$ for the matrix A below by Sarrus' rule.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -41$$

Ba tích cộng (chéo xuống) <i>Three added products (downward)</i>	Ba tích trừ (chéo lên) <i>Three subtracted products (upward)</i>
$a_{11}a_{22}a_{33} = 2 \cdot 0 \cdot 5 = 0$	$a_{13}a_{22}a_{31} = (-1) \cdot 0 \cdot 1 = 0$

Ba tích cộng (chéo xuống) <i>Three added products (downward)</i>	Ba tích trừ (chéo lên) <i>Three subtracted products (upward)</i>
$a_{12}a_{23}a_{31} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$	$a_{11}a_{23}a_{32} = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$
$a_{13}a_{21}a_{32} = (-1) \cdot 3 \cdot 4 = -12$	$a_{12}a_{21}a_{33} = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$
Tổng: $0 + 2 - 12 = -10$ <i>Sum: $0 + 2 - 12 = -10$</i>	Tổng: $0 + 16 + 15 = 31$ <i>Sum: $0 + 16 + 15 = 31$</i>

$$\det A = -10 - 31 = -41.$$

$$\det A = -10 - 31 = -41.$$

Định thức con, phần bù đại số và khai triển Laplace — *Minors, cofactors and Laplace expansion*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Xóa dòng i và cột j của A (vuông cấp n), định thức cấp $n - 1$ còn lại là **định thức con** M_{ij} . **Phần bù đại số** $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. **Khai triển Laplace**: $\det A$ bằng tổng các phần tử của một dòng (hoặc một cột) bất kỳ nhân với phần bù đại số tương ứng.

*Deleting row i and column j of an $n \times n$ matrix A leaves an $(n - 1)$ -order determinant, the **minor** M_{ij} . The **cofactor** is $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. **Laplace expansion**: $\det A$ is the sum of the entries of any one row (or column) times their cofactors.*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \quad (1.6)$$

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (\text{theo dòng } i) \quad (1.7)$$

Dấu $(-1)^{i+j}$ xếp theo bàn cờ, bắt đầu bằng dấu cộng ở góc trên trái. Nên chọn dòng hoặc cột có nhiều số 0 nhất để khai triển.

The signs $(-1)^{i+j}$ follow a chessboard pattern starting with plus in the top-left corner. Expand along the row or column with the most zeros.

$$\text{Dấu: } \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ma trận B có các dòng $(3; 0; 2)$, $(1; -2; 4)$, $(5; 0; 1)$. Cột 2 có hai số 0 nên khai triển theo cột 2: chỉ còn số hạng $b_{22} = -2$ ở vị trí $(2; 2)$, dấu $(-1)^4 = +$. Xóa dòng 2, cột 2 còn định thức con có các dòng $(3; 2)$, $(5; 1)$, bằng $3 - 10 = -7$. Vậy $\det B = (-2) \cdot (+1) \cdot (-7) = 14$.

Matrix B has rows $(3; 0; 2)$, $(1; -2; 4)$, $(5; 0; 1)$. Column 2 has two zeros, so expand along column 2: only $b_{22} = -2$ at position $(2; 2)$ remains, sign $(-1)^4 = +$. Deleting row 2 and column 2 leaves the minor with rows $(3; 2)$, $(5; 1)$, equal to $3 - 10 = -7$. Hence $\det B = (-2) \cdot (+1) \cdot (-7) = 14$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên dấu $(-1)^{i+j}$: lấy thẳng định thức con M_{ij} làm phần bù đại số. Lỗi này chỉ lộ ra ở các vị trí $i + j$ lẻ — ví dụ $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(2; 3)$ — nên kết quả sai mà sinh viên khó tự phát hiện. Ghi bảng dấu bàn cờ ra nháp trước khi khai triển.

Forgetting the sign $(-1)^{i+j}$ and using the minor M_{ij} as the cofactor. The error only shows at positions

with $i + j$ odd — for example $(1; 2), (2; 1), (2; 3)$ — so the result is wrong in a way that is hard to spot. Write the chessboard of signs on scrap paper before expanding.

Tính chất của định thức — Properties of determinants

Thao tác hoặc tình huống <i>Operation or situation</i>	Ảnh hưởng tới định thức <i>Effect on the determinant</i>
Chuyển vị: $\det A^T$ <i>Transpose: $\det A^T$</i>	Không đổi: $\det A^T = \det A$; mọi tính chất về dòng đúng cả cho cột <i>Unchanged: $\det A^T = \det A$; every row property also holds for columns</i>
Đổi chỗ hai dòng <i>Swapping two rows</i>	Đổi dấu <i>Changes sign</i>
Nhân một dòng với số k <i>Multiplying one row by k</i>	Định thức nhân với k ; ngược lại, thừa số chung của một dòng được đưa ra ngoài <i>The determinant is multiplied by k; conversely, a common factor of a row can be taken out</i>
Nhân cả ma trận cấp n với k <i>Multiplying the whole $n \times n$ matrix by k</i>	$\det(kA) = k^n \cdot \det A$ (mỗi dòng góp một thừa số k) <i>$\det(kA) = k^n \cdot \det A$ (each row contributes a factor k)</i>
Cộng vào một dòng bội của dòng khác <i>Adding a multiple of one row to another</i>	Không đổi — phép biến đổi dùng để khử về tam giác <i>Unchanged</i> — the operation used to reduce to triangular form
Có một dòng toàn 0, hoặc hai dòng tỉ lệ <i>A zero row, or two proportional rows</i>	$\det A = 0$
Ma trận tam giác (hoặc chéo) <i>Triangular (or diagonal) matrix</i>	$\det A$ bằng tích các phần tử trên đường chéo chính <i>$\det A$ is the product of the diagonal entries</i>
Tích hai ma trận vuông cùng cấp <i>Product of two square matrices of the same order</i>	$\det(AB) = \det A \cdot \det B$; nhưng nói chung $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ <i>$\det(AB) = \det A \cdot \det B$; but in general $\det(A + B) \neq \det A + \det B$</i>

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ma trận D có các dòng $(2; 4; 6), (1; 3; 5), (0; 2; 7)$. Dòng 1 có thừa số chung 2: $\det D = 2 \cdot \det$ của ma trận có các dòng $(1; 2; 3), (1; 3; 5), (0; 2; 7)$. Lấy dòng 2 trừ dòng 1 được $(0; 1; 2)$; khai triển theo cột 1 còn định thức con có các dòng $(1; 2), (2; 7)$, bằng $7 - 4 = 3$. Vậy $\det D = 2 \cdot 3 = 6$. Với A cấp 3 ở trên ($\det A = -41$): $\det A^T = -41$; $\det(2A) = 2^3 \cdot (-41) = -328$.

Matrix D has rows $(2; 4; 6), (1; 3; 5), (0; 2; 7)$. Row 1 has the common factor 2: $\det D = 2 \cdot \det$ of the matrix with rows $(1; 2; 3), (1; 3; 5), (0; 2; 7)$. Row 2 minus row 1 gives $(0; 1; 2)$; expanding along column 1 leaves the minor with rows $(1; 2), (2; 7)$, equal to $7 - 4 = 3$. So $\det D = 2 \cdot 3 = 6$. For the order-3 matrix A above ($\det A = -41$): $\det A^T = -41$; $\det(2A) = 2^3 \cdot (-41) = -328$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết $\det(2A) = 2 \cdot \det A$. Hệ số k đưa ra ngoài **từng dòng**, nên ma trận cấp n cho k^n . Lỗi ngược lại cũng hay gặp: khi khử dòng, sinh viên làm “dòng 2 nhân 3 rồi trừ dòng 1” (thay d_2 bằng $3d_2 - d_1$) mà quên rằng định thức đã bị nhân 3. Chỉ phép “ $d_2 + k \cdot d_1$ ” mới giữ nguyên định thức.

*Writing $\det(2A) = 2 \cdot \det A$. The factor k comes out of **each row**, so an order- n matrix gives k^n . The reverse error is also common: when eliminating, students replace r_2 by $3r_2 - r_1$ and forget that the determinant has been multiplied by 3. Only “ $r_2 + k \cdot r_1$ ” leaves the determinant unchanged.*

Tính định thức bằng cách đưa về dạng tam giác — *Computing determinants by reduction to triangular form*

Với cấp 4 trở lên, khai triển Laplace đơn thuần dẫn tới nhiều định thức con. Cách nhanh: dùng phép “cộng bội của dòng này vào dòng khác” để tạo số 0 dưới đường chéo; mỗi lần đổi chỗ hai dòng thì ghi một dấu trừ; cuối cùng nhân các phần tử chéo.

From order 4 upwards, plain Laplace expansion produces many minors. Faster: use “add a multiple of one row to another” to create zeros below the diagonal; record a minus sign for every row swap; finally multiply the diagonal entries.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Tính lại $\det A = -41$ (A có các dòng $(2; 1; -1)$, $(3; 0; 2)$, $(1; 4; 5)$) bằng khử dòng. Đổi chỗ dòng 1 và dòng 3 để có phần tử dẫn bằng 1 (một dấu trừ): $(1; 4; 5)$, $(3; 0; 2)$, $(2; 1; -1)$. $d_2 - 3d_1 = (0; -12; -13)$; $d_3 - 2d_1 = (0; -7; -11)$. $\det A = -[1 \cdot ((-12)(-11) - (-13)(-7))] = -(132 - 91) = -41$, khớp với Sarrus.

Recompute $\det A = -41$ (A has rows $(2; 1; -1)$, $(3; 0; 2)$, $(1; 4; 5)$) by elimination. Swap rows 1 and 3 to get a leading 1 (one minus sign): $(1; 4; 5)$, $(3; 0; 2)$, $(2; 1; -1)$. $r_2 - 3r_1 = (0; -12; -13)$; $r_3 - 2r_1 = (0; -7; -11)$. $\det A = -[1 \cdot ((-12)(-11) - (-13)(-7))] = -(132 - 91) = -41$, matching Sarrus.

Định thức cấp 4: tính $\det C$ với C dưới đây.

Order 4: compute $\det C$ for the matrix C below.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det C = 15$$

1. Khử cột 1: $d_2 - 2d_1 = (0; 3; -1; 1)$; $d_4 - d_1 = (0; 3; -2; 3)$; dòng 3 đã có số 0 ở cột 1.

Định thức không đổi.

Clear column 1: $r_2 - 2r_1 = (0; 3; -1; 1)$; $r_4 - r_1 = (0; 3; -2; 3)$; row 3 already has 0 in column 1. The determinant is unchanged.

2. Khử cột 2 bằng dòng 2 mới (phần tử dẫn 3): $d_3 - d_2 = (0; 0; 2; 1)$; $d_4 - d_2 = (0; 0; -1; 2)$.

Clear column 2 with the new row 2 (pivot 3): $r_3 - r_2 = (0; 0; 2; 1)$; $r_4 - r_2 = (0; 0; -1; 2)$.

3. Để tránh phân số, đổi chỗ dòng 3 và dòng 4 (một dấu trừ): $(0; 0; -1; 2)$, $(0; 0; 2; 1)$.

Rồi $d_4 + 2d_3 = (0; 0; 0; 5)$.

To avoid fractions, swap rows 3 and 4 (one minus sign): $(0; 0; -1; 2)$, $(0; 0; 2; 1)$. Then $r_4 + 2r_3 = (0; 0; 0; 5)$.

4. Ma trận tam giác có đường chéo 1; 3; -1; 5. $\det C = -[1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 5] = -(-15) = 15$.
The triangular matrix has diagonal 1, 3, -1, 5. $\det C = -[1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 5] = -(-15) = 15$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên đổi dấu khi hoán vị dòng. Ở bước 3 nếu bỏ sót dấu trừ, kết quả thành -15. Cách phòng: mỗi lần đổi chỗ hai dòng, viết ngay dấu “-” trước định thức trên nháp; cuối bài đếm số dấu trừ (chẵn thì giữ dấu, lẻ thì đổi dấu). Cũng không được dùng Sarrus cho ma trận cấp 4: không có “quy tắc đường chéo” cho cấp 4.
Forgetting the sign change on a row swap. Missing the minus in step 3 gives -15. Prevention: each time two rows are swapped, write “-” in front of the determinant at once; at the end count the minus signs (even: keep the sign, odd: change it). Nor may Sarrus’ rule be used for order 4: there is no “diagonal rule” for order 4.

Ma trận cần tính <i>Matrix</i>	Cách nên dùng <i>Recommended method</i>	Lý do <i>Reason</i>
Cấp 2 <i>Order 2</i>	$ad - bc$	Một phép trừ <i>One subtraction</i>
Cấp 3, số nhỏ <i>Order 3, small entries</i>	Sarrus <i>Sarrus’ rule</i>	Sáu tích, không cần biến đổi <i>Six products, no row operations</i>
Có dòng hoặc cột nhiều số 0 <i>A row or column with many zeros</i>	Khai triển Laplace theo dòng (cột) đó <i>Laplace expansion along that row (column)</i>	Số hạng chứa phần tử 0 bị triệt tiêu <i>Terms with zero entries vanish</i>
Cấp 4 trở lên <i>Order 4 and above</i>	Khử về tam giác, hoặc khử một cột rồi Laplace <i>Reduce to triangular form, or clear one column then expand</i>	Laplace thuần cấp 4 cần 4 định thức cấp 3 <i>Plain Laplace at order 4 needs four order-3 determinants</i>
Chứa tham số <i>Contains a parameter</i>	Biến đổi để gom tham số vào một dòng, rồi Laplace <i>Use row operations to isolate the parameter, then expand</i>	Tránh chia cho biểu thức có thể bằng 0 <i>Avoids dividing by an expression that may be zero</i>

1.4. Ma trận nghịch đảo — *The inverse matrix*

Định nghĩa và điều kiện tồn tại — *Definition and existence*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Ma trận vuông A cấp n **khả nghịch** nếu có ma trận B cùng cấp sao cho $AB = BA = I_n$; khi đó B là duy nhất, ký hiệu A^{-1} . **A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0$** . Ma trận có $\det A = 0$ gọi là **suy biến**.
*A square matrix A of order n is **invertible** if there is a matrix B of the same order with $AB = BA = I_n$; B is then unique and written A^{-1} . **A is invertible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$** . A matrix with $\det A = 0$ is called **singular**.*

Công thức qua ma trận phụ hợp: lập ma trận các phần bù đại số A_{ij} , **chuyển vị** nó được ma trận phụ hợp $\text{adj } A$, rồi chia cho $\det A$.

*Formula via the adjugate: form the matrix of cofactors A_{ij} , **transpose** it to get the adjugate $\text{adj } A$, then divide by $\det A$.*

$$A^{-1} = (1/\det A) \cdot \text{adj } A, \quad \text{adj } A = (A_{ij})^T \quad (1.8)$$

$$[(a; b), (c; d)]^{-1} = (1/(ad - bc)) \cdot [(d; -b), (-c; a)] \quad (1.9)$$

Với cấp 2: đổi chỗ hai phần tử trên đường chéo chính, đổi dấu hai phần tử trên đường chéo phụ, chia cho định thức.

For order 2: swap the two main-diagonal entries, change the sign of the two off-diagonal entries, divide by the determinant.

VÍ DỤ / EXAMPLE — A có các dòng (3; 5), (1; 2). $\det A = 6 - 5 = 1$. A^{-1} có các dòng (2; -5), (-1; 3). Thử lại: dòng 1 của A nhân cột 1 của A^{-1} : $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$; dòng 1 nhân cột 2: $3 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 = 0$; tương tự cho dòng 2, được I_2 .

A has rows (3; 5), (1; 2). $\det A = 6 - 5 = 1$. A^{-1} has rows (2; -5), (-1; 3). Check: row 1 of A times column 1 of A^{-1} : $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$; row 1 times column 2: $3 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 = 0$; similarly for row 2, giving I_2 .

Tìm nghịch đảo cấp 3 bằng ma trận phụ hợp — *Inverting an order-3 matrix with the adjugate*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1$$

1. Định thức (Sarrus): $8 + 9 + 4 - 6 - 8 - 6 = 1 \neq 0$, A khả nghịch.

Determinant (Sarrus): $8 + 9 + 4 - 6 - 8 - 6 = 1 \neq 0$, so A is invertible.

2. Chín phần bù đại số, có dấu bàn cờ, ghi trong bảng dưới.

The nine cofactors, with chessboard signs, are listed in the table below.

Vị trí Position	Định thức con M_{ij} Minor M_{ij}	Dấu Sign	Phần bù A_{ij} Cofactor A_{ij}
(1; 1)	$2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$	+	0
(1; 2)	$1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -1$	-	1
(1; 3)	$1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$	+	-2
(2; 1)	$3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2$	-	-2
(2; 2)	$2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$	+	1
(2; 3)	$2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -1$	-	1
(3; 1)	$3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1$	+	1
(3; 2)	$2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$	-	-1
(3; 3)	$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$	+	1

3. Ma trận phần bù đại số có các dòng (0; 1; -2), (-2; 1; 1), (1; -1; 1). **Chuyển vị** để được adj A có các dòng (0; -2; 1), (1; 1; -1), (-2; 1; 1). Chia cho $\det A = 1$:
The cofactor matrix has rows (0; 1; -2), (-2; 1; 1), (1; -1; 1). Transpose it to get adj A with rows (0; -2; 1), (1; 1; -1), (-2; 1; 1). Divide by $\det A = 1$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Thử lại một phần tử: dòng 2 của A nhân cột 2 của A^{-1} : $1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$, đúng phần tử (2; 2) của I_3 . Nên thử đủ ít nhất một dòng.
Check one entry: row 2 of A times column 2 of A^{-1} : $1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$, the (2; 2) entry of I_3 . Check at least one full row.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên chuyển vị ma trận phần bù đại số. Nếu đặt thẳng A_{ij} vào vị trí (i; j), với ví dụ trên ta được ma trận có các dòng (0; 1; -2), (-2; 1; 1), (1; -1; 1) — sai. Phần bù đại số của **dòng i** nằm ở **cột i** của adj A. Với ma trận đối xứng lỗi này không lộ, nên luyện trên ma trận không đối xứng.

*Forgetting to transpose the cofactor matrix. Putting A_{ij} straight into position (i; j) gives, in the example above, the matrix with rows (0; 1; -2), (-2; 1; 1), (1; -1; 1) — wrong. The cofactors of **row i** go into **column i** of adj A. With a symmetric matrix the mistake does not show, so practise on non-symmetric ones.*

Tìm nghịch đảo bằng phương pháp Gauss–Jordan — *Inverting by Gauss–Jordan elimination*

Lập ma trận mở rộng $[A | I]$ rồi chỉ dùng **phép biến đổi sơ cấp trên dòng** (đổi chỗ hai dòng; nhân một dòng với số khác 0; cộng vào một dòng bội của dòng khác) đưa nửa trái về I. Khi đó nửa phải là A^{-1} . Nếu nửa trái xuất hiện một dòng toàn 0 thì A suy biến.

*Form the augmented matrix $[A | I]$ and use only **elementary row operations** (swap two rows; multiply a row by a non-zero number; add a multiple of one row to another) to turn the left half into I. The right half is then A^{-1} . If a zero row appears on the left, A is singular.*

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- $d_2 - 2d_1$: (0; 1; -1 | -2; 1; 0). $d_3 - d_1$: (0; 1; 0 | -1; 0; 1).
 $r_2 - 2r_1$: (0; 1; -1 | -2; 1; 0). $r_3 - r_1$: (0; 1; 0 | -1; 0; 1).
- $d_3 - d_2$: (0; 0; 1 | 1; -1; 1). Nửa trái đã có dạng tam giác trên với đường chéo 1; 1; 1, nên $\det A = 1$.
 $r_3 - r_2$: (0; 0; 1 | 1; -1; 1). The left half is now upper triangular with diagonal 1, 1, 1, so $\det A = 1$.
- Khử ngược lên: $d_2 + d_3$: (0; 1; 0 | -1; 0; 1). $d_1 - 2d_3$: (1; 1; 0 | -1; 2; -2). $d_1 - d_2$: (1; 0; 0 | 0; 2; -3).

Eliminate upwards: $r_2 + r_3$: $(0; 1; 0 \mid -1; 0; 1)$. $r_1 - 2r_3$: $(1; 1; 0 \mid -1; 2; -2)$. $r_1 - r_2$: $(1; 0; 0 \mid 0; 2; -3)$.

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Tiêu chí <i>Criterion</i>	Ma trận phụ hợp <i>Adjugate</i>	Gauss–Jordan
Phù hợp <i>Best for</i>	Cấp 2, cấp 3; ma trận chứa tham số <i>Order 2 or 3; matrices with parameters</i>	Cấp 3 trở lên, số cụ thể <i>Order 3 and above, numeric entries</i>
Số phép tính cấp 3 <i>Work for order 3</i>	1 định thức cấp 3 + 9 định thức cấp 2 <i>One order-3 and nine order-2 determinants</i>	Khoảng 6–9 phép biến đổi dòng <i>About 6–9 row operations</i>
Lỗi hay gặp <i>Typical slip</i>	Sai dấu bàn cờ, quên chuyển vị <i>Wrong chessboard sign, no transpose</i>	Biến đổi trên cột hoặc chỉ biến đổi nửa trái <i>Using column operations or changing only the left half</i>
Tự kiểm <i>Self-check</i>	Nhân $A \cdot A^{-1}$ một dòng <i>Multiply one row of $A \cdot A^{-1}$</i>	Như bên trái <i>Same as the left</i>

Ma trận chứa tham số: khi nào khả nghịch — *Matrices with a parameter: when is the inverse defined*

Tìm m để ma trận $K(m)$ dưới đây khả nghịch, rồi tìm nghịch đảo khi $m = 0$.

Find m for which the matrix $K(m)$ below is invertible, then find the inverse when $m = 0$.

$$K(m) = \begin{bmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Khai triển theo dòng 1: $\det K = 1 \cdot (2 - 6) - m \cdot (4 - 3) + 1 \cdot (4 - 1) = -4 - m + 3 = -1 - m$.

Expand along row 1: $\det K = 1 \cdot (2 - 6) - m \cdot (4 - 3) + 1 \cdot (4 - 1) = -4 - m + 3 = -1 - m$.

2. K khả nghịch $\Leftrightarrow -1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Khi $m = -1$ không cần tìm quan hệ tuyến tính giữa các dòng; $\det K = 0$ đủ để kết luận K suy biến.

K is invertible $\Leftrightarrow -1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. When $m = -1$ there is no need to find the linear relation between the rows; $\det K = 0$ is enough to conclude that K is singular.

3. $m = 0$: $\det K = -1$. Phần bù đại số dòng 1: $A_{11} = -4$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = 3$; dòng 2: $A_{21} = 2$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -2$; dòng 3: $A_{31} = -1$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 1$. Chuyển vị rồi chia cho -1 : $m = 0$: $\det K = -1$. *Cofactors of row 1: $A_{11} = -4$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = 3$; row 2: $A_{21} = 2$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -2$; row 3: $A_{31} = -1$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 1$. Transpose and divide by -1 :*

$$K(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Thử lại dòng 1 của $K(0)$ là $(1; 0; 1)$ nhân với ba cột: $4 - 3 = 1$; $-2 + 2 = 0$; $1 - 1 = 0$, đúng dòng 1 của I_3 . Lưu ý $\det K = -1$ âm nên mọi phần tử của $\text{adj } K$ đổi dấu khi chia.

Check: row 1 of $K(0)$, $(1; 0; 1)$, times the three columns: $4 - 3 = 1$; $-2 + 2 = 0$; $1 - 1 = 0$, the first row of I_3 . Note $\det K = -1$ is negative, so every entry of $\text{adj } K$ changes sign on division.

Tính chất và phương trình ma trận — Properties and matrix equations

PHẢI THUỘC / MEMORISE — $(A^{-1})^{-1} = A$; $(kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$ với $k \neq 0$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $\det(A^{-1}) = 1/\det A$. Phương trình $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ (nhân A^{-1} bên trái); $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$ (nhân A^{-1} bên phải).

$(A^{-1})^{-1} = A$; $(kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$ for $k \neq 0$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $\det(A^{-1}) = 1/\det A$. The equation $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ (multiply by A^{-1} on the left); $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$ (multiply by A^{-1} on the right).

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B; \quad XA = B \Rightarrow X = BA^{-1} \quad (1.10)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Một siêu thị mini nhập hai loại hàng theo thùng. Đơn 1: 3 thùng loại I và 5 thùng loại II, trả 2.100 nghìn đồng; đơn 2: 1 thùng loại I và 2 thùng loại II, trả 800 nghìn đồng. Viết $A \cdot p = t$ với A có các dòng $(3; 5)$, $(1; 2)$ và $t = (2.100; 800)^T$. Dùng A^{-1} ở ví dụ trước: $p = A^{-1}t = (2 \cdot 2.100 - 5 \cdot 800; -2.100 + 3 \cdot 800) = (200; 300)$. Đơn giá: loại I 200, loại II 300 nghìn đồng/thùng.

A minimart buys two goods by the carton. Order 1: 3 cartons of type I and 5 of type II for 2,100 thousand VND; order 2: 1 carton of type I and 2 of type II for 800 thousand VND. Write $A \cdot p = t$ with A having rows $(3; 5)$, $(1; 2)$ and $t = (2,100; 800)^T$. Using A^{-1} from the previous example: $p = A^{-1}t = (2 \cdot 2,100 - 5 \cdot 800; -2,100 + 3 \cdot 800) = (200; 300)$. Prices: type I 200, type II 300 thousand VND per carton.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Phương trình $XA = B$ với A có các dòng $(3; 5)$, $(1; 2)$ và B có các dòng $(4; 7)$, $(1; 3)$. $X = BA^{-1}$ có các dòng $(4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1); 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 3) = (1; 1)$ và $(1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1); 1 \cdot (-5) + 3 \cdot 3) = (-1; 4)$. Nếu viết nhầm $X = A^{-1}B$ sẽ ra ma trận có các dòng $(3; -1)$, $(-1; 2)$ — khác hẳn; thử lại $(3; -1)$, $(-1; 2)$ nhân A không ra B .

The equation $XA = B$ with A having rows $(3; 5)$, $(1; 2)$ and B rows $(4; 7)$, $(1; 3)$. $X = BA^{-1}$ has rows $(4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1); 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 3) = (1; 1)$ and $(1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1); 1 \cdot (-5) + 3 \cdot 3) = (-1; 4)$. Writing $X = A^{-1}B$ by mistake gives the matrix with rows $(3; -1)$, $(-1; 2)$ — quite different; multiplying it by A does not give B .

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — “Chia hai vế cho A”. Ma trận không có phép chia; phải nói rõ nhân A^{-1} bên trái hay bên phải, và thứ tự đó quyết định đáp số. Cũng sai khi viết $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$: nghịch đảo của tích đảo thứ tự, giống chuyển vị.

“Dividing both sides by A”. Matrices cannot be divided; say explicitly whether A^{-1} multiplies on the left or on the right, as the order decides the answer. Writing $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ is also wrong: the inverse of a product reverses the order, as the transpose does.

1.5. Hạng của ma trận — The rank of a matrix

Định nghĩa và ma trận bậc thang — Definition and echelon form

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Hạng của ma trận A, ký hiệu $r(A)$, là cấp cao nhất của các định thức con khác 0 lập từ A. Tương đương: $r(A)$ là số dòng khác 0 của ma trận **bậc thang** nhận được từ A bằng các phép biến đổi sơ cấp (phép biến đổi sơ cấp không làm đổi hạng).

Với A cỡ $m \times n$: $0 \leq r(A) \leq \min(m; n)$; A vuông cấp n có $r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

*The **rank** of A, written $r(A)$, is the highest order of a non-zero minor of A. Equivalently, $r(A)$ is the number of non-zero rows of the **echelon form** obtained from A by elementary operations (elementary operations do not change the rank). For an $m \times n$ matrix: $0 \leq r(A) \leq \min(m; n)$; a square matrix of order n has $r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.*

Ma trận bậc thang dòng: các dòng toàn 0 (nếu có) nằm dưới cùng; phần tử khác 0 đầu tiên của mỗi dòng (phần tử dẫn) nằm lệch hẳn sang phải so với phần tử dẫn của dòng trên.

Row echelon form: zero rows (if any) are at the bottom; the first non-zero entry of each row (the pivot) lies strictly to the right of the pivot of the row above.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ bậc thang, } r = 3$$

Cách tìm hạng <i>Method</i>	Thực hiện <i>How</i>	Khi nào dùng <i>When to use</i>
Định thức con <i>Minors</i>	Tìm một định thức con cấp k khác 0, rồi chứng tỏ mọi định thức con cấp k + 1 bằng 0 <i>Find a non-zero minor of order k, then show every minor of order k + 1 is zero</i>	Ma trận nhỏ, ma trận vuông có tham số <i>Small matrices, square matrices with a parameter</i>
Biến đổi sơ cấp <i>Elementary operations</i>	Đưa về bậc thang, đếm số dòng khác 0 <i>Reduce to echelon form, count non-zero rows</i>	Hầu hết các bài; ma trận không vuông <i>Most exercises; non-square matrices</i>

VÍ DỤ / EXAMPLE — Một tập đoàn có bốn phương án sản xuất, mỗi phương án là vector sản lượng của bốn nhà máy (nghìn sản phẩm): $(1; 2; -1; 3)$, $(2; 4; 1; 0)$, $(3; 6; 0; 3)$, $(1; 2; 2; -3)$. Xếp thành ma trận R cỡ 4×4 . $d_2 - 2d_1 = (0; 0; 3; -6)$; $d_3 - 3d_1 = (0; 0; 3; -6)$; $d_4 - d_1 = (0; 0; 3; -6)$. Ba dòng mới trùng nhau, trừ tiếp còn một dòng khác 0. Bậc thang có 2 dòng khác 0: $r(R) = 2$. Ý nghĩa: chỉ có hai phương án độc lập; hai phương án còn lại là tổ hợp của chúng (phương án 3 = phương án 1 + phương án 2; phương án 4 = phương án 2 - phương án 1).

A group has four production plans, each a vector of output at four plants (thousand units): $(1; 2; -1; 3)$, $(2; 4; 1; 0)$, $(3; 6; 0; 3)$, $(1; 2; 2; -3)$. Stack them into the 4×4 matrix R . $r_2 - 2r_1 = (0; 0; 3; -6)$; $r_3 - 3r_1 = (0; 0; 3; -6)$; $r_4 - r_1 = (0; 0; 3; -6)$. The three new rows coincide; subtracting leaves one non-zero row. The echelon form has 2 non-zero rows: $r(R) = 2$. Meaning: only two plans are independent; the other two are combinations of them (plan 3 = plan 1 + plan 2; plan 4 = plan 2 - plan 1).

Biện luận hạng theo tham số — Rank depending on a parameter

$$R(m) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & m & 7 \end{bmatrix}$$

- $d_2 - 2d_1 = (0; 1; 3; -2)$; $d_3 - 3d_1 = (0; 1; m + 3; -2)$.
 $r_2 - 2r_1 = (0; 1; 3; -2)$; $r_3 - 3r_1 = (0; 1; m + 3; -2)$.
- Lấy dòng 3 mới trừ dòng 2 mới: $(0; 0; m; 0)$. Ma trận bậc thang có các dòng $(1; 2; -1; 3)$, $(0; 1; 3; -2)$, $(0; 0; m; 0)$.
New row 3 minus new row 2: $(0; 0; m; 0)$. The echelon form has rows $(1; 2; -1; 3)$, $(0; 1; 3; -2)$, $(0; 0; m; 0)$.
- Kết luận: $m \neq 0$ thì $r(R) = 3$; $m = 0$ thì dòng cuối toàn 0, $r(R) = 2$ (khi đó dòng 3 = dòng 1 + dòng 2).
Conclusion: if $m \neq 0$, $r(R) = 3$; if $m = 0$ the last row is zero and $r(R) = 2$ (then row 3 = row 1 + row 2).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Đếm số dòng khác 0 **trước** khi đưa về bậc thang. Ma trận R ở ví dụ bốn phương án có cả 4 dòng khác 0 nhưng hạng chỉ bằng 2. Một lỗi khác khi biện luận: chia cả dòng cho biểu thức chứa tham số (như m) mà không tách riêng trường hợp biểu thức đó bằng 0.

*Counting non-zero rows **before** reducing to echelon form. Matrix R in the four-plan example has 4 non-zero rows but rank only 2. Another slip in parameter problems: dividing a row by an expression in the parameter (such as m) without treating separately the case where it equals zero.*

1.6. Kiểm bằng máy tính với Python — Checking with Python

Đoạn mã dưới tính lại các ví dụ chính của chương bằng numpy và sympy. numpy tính bằng số thực nên định thức có thể lệch ở chữ số thập phân thứ 13–15; làm tròn trước khi so. sympy tính chính xác bằng phân số, hợp với bài có ma trận nghịch đảo và tham số.

The code below recomputes the chapter's main examples with numpy and sympy. numpy works in floating point, so a determinant may be off in the 13th–15th decimal place; round before comparing. sympy works exactly with fractions, which suits inverses and parameters.

```
import numpy as np
from sympy import Matrix, symbols
B = np.array([[135, 70, 65], [100, 125, 80]]) # doanh so thang 10
p = np.array([45, 30, 120]) # don gia, nghìn dong
print('Doanh thu thang 10:', B @ p)
N = np.array([[4, 1, 3], [2, 1, 2], [6, 2, 5]])
c = np.array([150, 80, 40]); q = np.array([50, 200, 30])
print('Chi phi don vi:', N @ c, '| Tong chi phi:', q @ N @ c)
A = np.array([[2, 1, -1], [3, 0, 2], [1, 4, 5]])
print('det A =', round(np.linalg.det(A), 6))
C = Matrix([[1, -1, 2, 0], [2, 1, 3, 1], [0, 3, 1, 2], [1, 2, 0, 3]])
print('det C =', C.det())
M = Matrix([[2, 3, 1], [1, 2, 1], [3, 4, 2]])
print('Nghich dao:', M.inv().tolist())
P = np.array([[0.8, 0.2], [0.3, 0.7]])
print('Thi phan sau 2 quy:', np.array([0.5, 0.5]) @ np.linalg.matrix_power(P, 2))
m = symbols('m')
R = Matrix([[1, 2, -1, 3], [2, 5, 1, 4], [3, 7, m, 7]])
print('Hang khi m = 0:', R.subs(m, 0).rank(), '| khi m = 1:', R.subs(m, 1).rank())
```

Kết quả in ra:

Printed output:

```
Doanh thu thang 10: [15975 17850]
Chi phi don vi: [ 800  460 1260] | Tong chi phi: 169800
det A = -41.0
det C = 15
Nghich dao: [[0, -2, 1], [1, 1, -1], [-2, 1, 1]]
Thi phan sau 2 quy: [0.575 0.425]
Hang khi m = 0: 2 | khi m = 1: 3
```

VÍ DỤ / EXAMPLE — Cách dùng để tự kiểm: giải bài bằng tay trước, sau đó thay ma trận của bài vào dòng tương ứng (A, C, M hoặc R) và so kết quả. Phép nhân ma trận trong numpy viết bằng toán tử @; dấu sao (phép nhân thông thường) nhân từng phần tử cùng vị trí, không phải phép nhân ma trận.

How to self-check: solve by hand first, then put the exercise's matrix into the matching line (A, C, M or R) and compare. Matrix multiplication in numpy uses the @ operator; the asterisk (ordinary multiplication) multiplies entry by entry and is not matrix multiplication.

1.7. Tổng hợp công thức và thuật ngữ — Summary of formulas and terminology

Bảng tổng hợp công thức — Formula summary

Công thức Formula	Ý nghĩa và điều kiện Meaning and conditions
$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}); kA = (k \cdot a_{ij})$	Cộng, trừ khi cùng cỡ; nhân số vào mọi phần tử — tổng doanh số, kế hoạch tăng k lần <i>Add or subtract matrices of the same size; a scalar multiplies every entry — combined sales, a plan scaled by k</i>

Công thức <i>Formula</i>	Ý nghĩa và điều kiện <i>Meaning and conditions</i>
$c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}; (m \times p) \cdot (p \times n) \rightarrow m \times n$	Dòng nhân cột; doanh thu = số lượng · đơn giá, chi phí = định mức · đơn giá đầu vào <i>Row times column; revenue = quantities · prices, cost = requirements · input prices</i>
$AB \neq BA; (AB)^T = B^T A^T; (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	Không giao hoán; chuyển vị và nghịch đảo của tích đảo thứ tự <i>Not commutative; transpose and inverse of a product reverse the order</i>
$\det [(a; b), (c; d)] = ad - bc$	Định thức cấp 2 <i>Order-2 determinant</i>
Sarrus: 3 tích chéo xuống – 3 tích chéo lên <i>Sarrus: 3 downward products – 3 upward products</i>	Chỉ cho cấp 3 <i>Order 3 only</i>
$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}; \det A = \sum_j a_{ij} A_{ij}$	Khai triển Laplace theo dòng i (hoặc theo cột) <i>Laplace expansion along row i (or a column)</i>
$\det(kA) = k^n \cdot \det A; \det(AB) = \det A \cdot \det B; \det A^T = \det A$	Tính chất định thức (A, B vuông cấp n) <i>Determinant properties (A, B square of order n)</i>
$A^{-1} = \text{adj } A / \det A; \text{adj } A = (A_{ij})^T$	Tồn tại $\Leftrightarrow \det A \neq 0$; nhớ chuyển vị <i>Exists $\Leftrightarrow \det A \neq 0$; remember to transpose</i>
$[A I] \rightarrow [I A^{-1}]$	Gauss–Jordan, chỉ biến đổi dòng <i>Gauss–Jordan, row operations only</i>
$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B; XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$	Suy đơn giá từ hóa đơn, suy đầu vào từ đầu ra <i>Recover prices from invoices, inputs from outputs</i>
$r(A) = \text{số dòng khác 0 của dạng bậc thang}$ $r(A) = \text{number of non-zero rows in echelon form}$	Số phương án (vector) độc lập tuyến tính; $r(A) \leq \min(m; n)$ <i>Number of linearly independent plans (vectors); $r(A) \leq \min(m; n)$</i>

Bảng thuật ngữ Việt – Anh — Vietnamese – English glossary

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Ma trận	Matrix	Bảng số m dòng, n cột <i>Array of numbers with m rows and n columns</i>
Phần tử	Entry (element)	Số a_{ij} ở dòng i, cột j <i>The number a_{ij} in row i, column j</i>
Ma trận vuông	Square matrix	Số dòng bằng số cột <i>Rows equal columns</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Ma trận đơn vị	Identity matrix	Chéo, các phần tử chéo bằng 1 <i>Diagonal with ones on the diagonal</i>
Đường chéo chính	Main diagonal	Các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ <i>Entries $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$</i>
Ma trận chuyển vị	Transpose	Đổi dòng thành cột <i>Rows turned into columns</i>
Nhân ma trận với số	Scalar multiplication	Nhân số vào mọi phần tử <i>Multiply every entry by a number</i>
Tích ma trận	Matrix product	Dòng nhân cột <i>Row times column</i>
Định thức	Determinant	Số gắn với ma trận vuông <i>Number attached to a square matrix</i>
Định thức con	Minor	Định thức sau khi xóa một dòng, một cột <i>Determinant after deleting a row and a column</i>
Phần bù đại số	Cofactor	$(-1)^{i+j}$ nhân định thức con M_{ij} <i>$(-1)^{i+j}$ times the minor M_{ij}</i>
Khai triển Laplace	Laplace (cofactor) expansion	Tính định thức theo một dòng hoặc cột <i>Determinant along one row or column</i>
Quy tắc Sarrus	Sarrus' rule	Quy tắc đường chéo cho cấp 3 <i>Diagonal rule for order 3</i>
Ma trận khả nghịch	Invertible (non-singular) matrix	Có A^{-1} ; $\det A \neq 0$ <i>Has an inverse; $\det A \neq 0$</i>
Ma trận suy biến	Singular matrix	$\det A = 0$, không có nghịch đảo <i>$\det A = 0$, no inverse</i>
Ma trận nghịch đảo	Inverse matrix	A^{-1} với $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ <i>A^{-1} with $AA^{-1} = A^{-1}A = I$</i>
Ma trận phụ hợp	Adjugate (adjoint) matrix	Chuyển vị của ma trận phần bù đại số <i>Transpose of the cofactor matrix</i>
Phép biến đổi sơ cấp	Elementary row operation	Đổi chỗ, nhân, cộng bội dòng <i>Swap, scale, add a multiple of a row</i>
Ma trận bậc thang	Row echelon form	Dạng bậc thang sau khử <i>Staircase form after elimination</i>
Phần tử dẫn	Pivot	Phần tử khác 0 đầu tiên của dòng <i>First non-zero entry of a row</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Hạng ma trận	Rank	Số dòng độc lập tuyến tính <i>Number of linearly independent rows</i>
Ma trận chuyển dịch	Transition matrix	Tỉ lệ chuyển giữa các trạng thái sau một kỳ <i>Shares moving between states in one period</i>
Định mức tiêu hao	Input requirement (input coefficient)	Lượng đầu vào cho một đơn vị sản phẩm <i>Input used per unit of output</i>

1.8. Bài tập vận dụng có lời giải — *Applied exercises with solutions*

Bài 1. Doanh thu và lãi gộp của chuỗi cửa hàng điện gia dụng — *Exercise 1. Revenue and gross profit of a home-appliance chain*

Chuỗi cửa hàng Minh Phát có ba cửa hàng (Quận 3, Bình Thạnh, Thủ Đức) cùng bán ba mặt hàng: nồi cơm điện, quạt đứng, máy xay sinh tố. Số lượng bán trong quý III (cái) xếp thành ma trận Q , mỗi dòng là một cửa hàng, mỗi cột là một mặt hàng: dòng 1 (40; 120; 60), dòng 2 (55; 90; 70), dòng 3 (30; 150; 45). Giá bán lần lượt 1,2; 0,5; 0,8 triệu đồng/cái; giá vốn lần lượt 0,9; 0,35; 0,6 triệu đồng/cái. (a) Tính doanh thu và lãi gộp từng cửa hàng bằng phép nhân ma trận. (b) Tính tổng số lượng bán theo từng mặt hàng. (c) Quý IV dự kiến số lượng bán mọi mặt hàng tăng 20%, giá không đổi; chi phí cố định quý của ba cửa hàng là 25; 28; 22 triệu đồng. Tính lợi nhuận từng cửa hàng quý IV và cho biết cửa hàng nào lãi nhiều nhất.

The Minh Phát chain has three shops (District 3, Bình Thạnh, Thủ Đức) selling three products: rice cookers, standing fans and blenders. Third-quarter unit sales form a matrix Q , one row per shop and one column per product: row 1 (40; 120; 60), row 2 (55; 90; 70), row 3 (30; 150; 45). Selling prices are 1.2, 0.5 and 0.8 million VND per unit; unit costs are 0.9, 0.35 and 0.6 million VND. (a) Use matrix multiplication to find each shop's revenue and gross profit. (b) Find total unit sales of each product. (c) In Q4 unit sales of every product are expected to rise by 20% at unchanged prices; quarterly fixed costs of the three shops are 25, 28 and 22 million VND. Find each shop's Q4 profit and say which shop earns the most.

- Lập dữ liệu: Q là ma trận 3×3 ; vector giá bán $p = (1,2; 0,5; 0,8)^T$; vector giá vốn $c = (0,9; 0,35; 0,6)^T$. Lãi gộp một đơn vị: $g = p - c = (0,3; 0,15; 0,2)^T$ triệu đồng.
Set up the data: Q is 3×3 ; selling-price vector $p = (1.2; 0.5; 0.8)^T$; unit-cost vector $c = (0.9; 0.35; 0.6)^T$. Unit gross margin: $g = p - c = (0.3; 0.15; 0.2)^T$ million VND.
- Doanh thu $R = Q \cdot p$. Dòng 1: $40 \cdot 1,2 + 120 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,8 = 48 + 60 + 48 = 156$.
Dòng 2: $55 \cdot 1,2 + 90 \cdot 0,5 + 70 \cdot 0,8 = 66 + 45 + 56 = 167$. Dòng 3: $30 \cdot 1,2 + 150 \cdot 0,5 + 45 \cdot 0,8 = 36 + 75 + 36 = 147$. Vậy $R = (156; 167; 147)^T$ triệu đồng, tổng 470 triệu đồng.
Revenue $R = Q \cdot p$. Row 1: $40 \cdot 1.2 + 120 \cdot 0.5 + 60 \cdot 0.8 = 48 + 60 + 48 = 156$. Row 2: $55 \cdot 1.2 + 90 \cdot 0.5 + 70 \cdot 0.8 = 66 + 45 + 56 = 167$. Row 3: $30 \cdot 1.2 + 150 \cdot 0.5 + 45 \cdot 0.8 = 36 + 75 + 36 = 147$.

$45 + 56 = 167$. Row 3: $36 + 75 + 36 = 147$. So $R = (156; 167; 147)^T$ million VND, 470 million in total.

3. Lãi gộp $G = Q \cdot g$. Dòng 1: $12 + 18 + 12 = 42$. Dòng 2: $16,5 + 13,5 + 14 = 44$. Dòng 3: $9 + 22,5 + 9 = 40,5$. $G = (42; 44; 40,5)^T$ triệu đồng, tổng 126,5 triệu đồng. Kiểm lại: $Q \cdot p - Q \cdot c = Q \cdot (p - c)$ theo tính chất phân phối.

Gross profit $G = Q \cdot g$. Row 1: $12 + 18 + 12 = 42$. Row 2: $16.5 + 13.5 + 14 = 44$. Row 3: $9 + 22.5 + 9 = 40.5$. $G = (42; 44; 40.5)^T$ million VND, 126.5 million in total. Check: $Q \cdot p - Q \cdot c = Q \cdot (p - c)$ by distributivity.

4. Tổng theo mặt hàng: nhân vector hàng $(1; 1; 1)$ bên trái Q : $(1; 1; 1) \cdot Q = (125; 360; 175)$ — nồi cơm 125 cái, quạt 360 cái, máy xay 175 cái. Vector đứng bên trái vì cần cộng theo cột.

Totals by product: multiply the row vector $(1; 1; 1)$ on the left of Q : $(1; 1; 1) \cdot Q = (125; 360; 175)$ — 125 rice cookers, 360 fans, 175 blenders. The vector goes on the left because the columns are summed.

5. Quý IV: số lượng $1,2Q$ nên lãi gộp $(1,2Q) \cdot g = 1,2G = (50,4; 52,8; 48,6)^T$. Trừ chi phí cố định $F = (25; 28; 22)^T$: lợi nhuận $= 1,2G - F = (25,4; 24,8; 26,6)^T$ triệu đồng, tổng 76,8 triệu đồng.

Q4: quantities $1.2Q$, so gross profit $(1.2Q) \cdot g = 1.2G = (50.4; 52.8; 48.6)^T$. Subtract fixed costs $F = (25; 28; 22)^T$: profit $= 1.2G - F = (25.4; 24.8; 26.6)^T$ million VND, 76.8 million in total.

6. Kết luận: quý III cửa hàng Bình Thạnh có lãi gộp cao nhất (44 triệu đồng), nhưng quý IV sau khi trừ chi phí cố định thì Thủ Đức lãi nhiều nhất (26,6 triệu đồng) nhờ chi phí cố định thấp nhất. So sánh hiệu quả cửa hàng phải dùng lợi nhuận sau chi phí cố định, không dùng doanh thu.

Conclusion: in Q3 Bình Thạnh has the highest gross profit (44 million VND), but in Q4, after fixed costs, Thủ Đức earns the most (26.6 million VND) because its fixed cost is the lowest. Shop performance must be compared on profit after fixed costs, not on revenue.

Bài 2. Suy ra đơn giá nhập từ ba hóa đơn — Exercise 2. Recovering unit prices from three invoices

Đại lý nước giải khát Hưng Thịnh nhập ba mặt hàng: sữa hộp, nước suối, nước ngọt (tính theo thùng) từ một nhà phân phối, đơn giá không đổi trong tháng. Ba hóa đơn trong tháng: hóa đơn 1 gồm 2 thùng sữa, 1 thùng nước suối, 1 thùng nước ngọt, trả 570 nghìn đồng; hóa đơn 2 gồm 2; 2; 1 thùng, trả 630 nghìn đồng; hóa đơn 3 gồm 3; 2; 2 thùng, trả 960 nghìn đồng. (a) Viết bài toán dưới dạng phương trình ma trận. (b) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận số lượng. (c) Tìm đơn giá từng mặt hàng. (d) Hóa đơn thứ tư gồm 4; 5; 3 thùng thì phải trả bao nhiêu?

The Hưng Thịnh beverage dealer buys three items — boxed milk, bottled water and soft drinks (by the carton) — from one distributor at prices fixed for the month. Three invoices: invoice 1 has 2 cartons of milk, 1 of water and 1 of soft drinks, total 570 thousand VND; invoice 2 has 2, 2, 1 cartons, total 630 thousand VND; invoice 3 has 3, 2, 2 cartons, total 960 thousand VND. (a) Write the problem as a matrix equation. (b) Find the inverse of the quantity matrix. (c) Find the unit price of each item. (d) How much does a fourth invoice of 4, 5, 3 cartons cost?

1. Gọi $p = (p_1; p_2; p_3)^T$ là đơn giá (nghìn đồng/thùng). Ma trận số lượng M có các dòng $(2; 1; 1)$, $(2; 2; 1)$, $(3; 2; 2)$; vector tiền $t = (570; 630; 960)^T$. Phương trình: $M \cdot p = t$.
Let $p = (p_1; p_2; p_3)^T$ be unit prices (thousand VND per carton). The quantity matrix M has rows $(2; 1; 1)$, $(2; 2; 1)$, $(3; 2; 2)$; the payment vector is $t = (570; 630; 960)^T$. Equation: $M \cdot p = t$.
2. Định thức theo Sarrus: $\det M = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = 8 + 3 + 4 - 6 - 4 - 4 = 1 \neq 0$, nên M khả nghịch.
Determinant by Sarrus: $\det M = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = 8 + 3 + 4 - 6 - 4 - 4 = 1 \neq 0$, so M is invertible.
3. Phần bù đại số: $A_{11} = 2$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = -2$; $A_{21} = 0$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -1$; $A_{31} = -1$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = 2$. Chuyển vị được ma trận phụ hợp; chia cho $\det M = 1$: M^{-1} có các dòng $(2; 0; -1)$, $(-1; 1; 0)$, $(-2; -1; 2)$.
Cofactors: $A_{11} = 2$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = -2$; $A_{21} = 0$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -1$; $A_{31} = -1$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = 2$. Transposing gives the adjugate; dividing by $\det M = 1$: M^{-1} has rows $(2; 0; -1)$, $(-1; 1; 0)$, $(-2; -1; 2)$.
4. Đơn giá $p = M^{-1} \cdot t$: $p_1 = 2 \cdot 570 - 960 = 180$; $p_2 = -570 + 630 = 60$; $p_3 = -2 \cdot 570 - 630 + 2 \cdot 960 = 150$. Sữa 180, nước suối 60, nước ngọt 150 nghìn đồng/thùng.
Prices $p = M^{-1} \cdot t$: $p_1 = 2 \cdot 570 - 960 = 180$; $p_2 = -570 + 630 = 60$; $p_3 = -2 \cdot 570 - 630 + 2 \cdot 960 = 150$. Milk 180, water 60, soft drinks 150 thousand VND per carton.
5. Thử lại hóa đơn 3: $3 \cdot 180 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 150 = 540 + 120 + 300 = 960$, khớp. Hóa đơn 4: $4 \cdot 180 + 5 \cdot 60 + 3 \cdot 150 = 720 + 300 + 450 = 1.470$ nghìn đồng.
Check invoice 3: $3 \cdot 180 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 150 = 540 + 120 + 300 = 960$, as given. Invoice 4: $4 \cdot 180 + 5 \cdot 60 + 3 \cdot 150 = 720 + 300 + 450 = 1,470$ thousand VND.
6. Ý nghĩa: ba hóa đơn chỉ xác định được ba đơn giá khi ma trận số lượng có định thức khác 0. Nếu hóa đơn 3 đúng bằng tổng hai hóa đơn đầu thì $\det M = 0$ và dữ liệu không đủ để tách giá.
Interpretation: three invoices pin down three prices only when the quantity matrix has a non-zero determinant. If invoice 3 were exactly the sum of the first two, $\det M = 0$ and the data could not separate the prices.

1.9. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — Essay questions and answer outlines

Câu 1. Cho A là ma trận 2×2 có các dòng $(1; 2)$, $(-1; 3)$ và B là ma trận 2×3 có các dòng $(2; 0; 1)$, $(1; -1; 4)$. (a) Tính AB ; tích BA có xác định không? (b) Kiểm tra $(AB)^T = B^T A^T$. (c) Chứng minh $A^2 - 4A + 5I = O$ và suy ra A^{-1} .

Question 1. Let A be the 2×2 matrix with rows $(1; 2)$, $(-1; 3)$ and B the 2×3 matrix with rows $(2; 0; 1)$, $(1; -1; 4)$. (a) Compute AB ; is BA defined? (b) Verify $(AB)^T = B^T A^T$. (c) Show that $A^2 - 4A + 5I = O$ and deduce A^{-1} .

- AB cỡ 2×3 , các dòng $(4; -2; 9)$, $(1; -3; 11)$. BA không xác định vì B có 3 cột còn A có 2 dòng.

AB is 2×3 with rows $(4; -2; 9)$, $(1; -3; 11)$. BA is undefined: B has 3 columns but A has 2 rows.

- $(AB)^T$ cỡ 3×2 , các dòng $(4; 1)$, $(-2; -3)$, $(9; 11)$. $B^T (3 \times 2)$ nhân $A^T (2 \times 2)$ cho đúng ma trận đó.
 $(AB)^T$ is 3×2 with rows $(4; 1)$, $(-2; -3)$, $(9; 11)$. $B^T (3 \times 2)$ times $A^T (2 \times 2)$ gives the same matrix.
- A^2 có các dòng $(-1; 8)$, $(-4; 7)$. $A^2 - 4A + 5I: (-1 - 4 + 5; 8 - 8 + 0) = (0; 0)$ và $(-4 + 4 + 0; 7 - 12 + 5) = (0; 0)$. Vậy $A^2 - 4A + 5I = O$.
 A^2 has rows $(-1; 8)$, $(-4; 7)$. $A^2 - 4A + 5I: (-1 - 4 + 5; 8 - 8 + 0) = (0; 0)$ and $(-4 + 4 + 0; 7 - 12 + 5) = (0; 0)$. Hence $A^2 - 4A + 5I = O$.
- Viết lại $A(4I - A) = 5I$ nên $A^{-1} = (4I - A)/5$, các dòng $(3/5; -2/5)$, $(1/5; 1/5)$.
Rewrite as $A(4I - A) = 5I$, so $A^{-1} = (4I - A)/5$ with rows $(3/5; -2/5)$, $(1/5; 1/5)$.
- Kiểm bằng công thức cấp 2: $\det A = 3 + 2 = 5$, $A^{-1} = (1/5) \cdot [(3; -2), (1; 1)]$, trùng kết quả trên.
Check with the 2×2 formula: $\det A = 3 + 2 = 5$, $A^{-1} = (1/5) \cdot [(3; -2), (1; 1)]$, the same result.

Câu 2. (a) Tính định thức của ma trận C cấp 4 có các dòng $(2; 1; 0; 3)$, $(1; 0; 2; 1)$, $(3; 2; 1; 0)$, $(0; 1; 1; 2)$. (b) Cho ma trận R có các dòng $(1; 2; -1; 3)$, $(2; 5; 1; 4)$, $(3; 7; m; 7)$. Biện luận hạng của R theo m.

Question 2. (a) Compute the determinant of the 4×4 matrix C with rows $(2; 1; 0; 3)$, $(1; 0; 2; 1)$, $(3; 2; 1; 0)$, $(0; 1; 1; 2)$. (b) Let R have rows $(1; 2; -1; 3)$, $(2; 5; 1; 4)$, $(3; 7; m; 7)$. Discuss the rank of R in terms of m.

- (a) Đổi chỗ dòng 1 và dòng 2 để có phần tử dẫn bằng 1 (định thức đổi dấu): dòng mới $(1; 0; 2; 1)$, $(2; 1; 0; 3)$, $(3; 2; 1; 0)$, $(0; 1; 1; 2)$.
(a) Swap rows 1 and 2 to get a leading 1 (the determinant changes sign): new rows $(1; 0; 2; 1)$, $(2; 1; 0; 3)$, $(3; 2; 1; 0)$, $(0; 1; 1; 2)$.
- Khử cột 1: $d_2 - 2d_1 = (0; 1; -4; 1)$, $d_3 - 3d_1 = (0; 2; -5; -3)$. Khử cột 2: $d_3 - 2d_2 = (0; 0; 3; -5)$, $d_4 - d_2 = (0; 0; 5; 1)$.
Clear column 1: $r_2 - 2r_1 = (0; 1; -4; 1)$, $r_3 - 3r_1 = (0; 2; -5; -3)$. Clear column 2: $r_3 - 2r_2 = (0; 0; 3; -5)$, $r_4 - r_2 = (0; 0; 5; 1)$.
- Còn khối 2×2 ở góc dưới: $3 \cdot 1 - (-5) \cdot 5 = 28$. Vậy $\det C = -(1 \cdot 1 \cdot 28) = -28$.
The remaining 2×2 block: $3 \cdot 1 - (-5) \cdot 5 = 28$. Hence $\det C = -(1 \cdot 1 \cdot 28) = -28$.
- (b) $d_2 - 2d_1 = (0; 1; 3; -2)$; $d_3 - 3d_1 = (0; 1; m + 3; -2)$; lấy dòng mới thứ ba trừ dòng mới thứ hai được $(0; 0; m; 0)$.
(b) $r_2 - 2r_1 = (0; 1; 3; -2)$; $r_3 - 3r_1 = (0; 1; m + 3; -2)$; subtracting the new second row from the new third row gives $(0; 0; m; 0)$.
- Kết luận: $m = 0$ thì dòng cuối bằng 0, $r(R) = 2$; $m \neq 0$ thì ma trận bậc thang có 3 dòng khác 0, $r(R) = 3$.
Conclusion: if $m = 0$ the last row is zero and $r(R) = 2$; if $m \neq 0$ the echelon form has 3 non-zero rows and $r(R) = 3$.

Câu 3. Cho A là ma trận 3×3 có các dòng $(1; 2; 2)$, $(1; 3; 4)$, $(1; 1; 1)$ và B là ma trận 2×3 có các dòng $(1; 2; 3)$, $(0; 1; 1)$. (a) Tính $\det A$. (b) Tìm A^{-1} bằng phương pháp Gauss–Jordan. (c) Giải phương trình ma trận $XA = B$.

Question 3. Let A be the 3×3 matrix with rows $(1; 2; 2)$, $(1; 3; 4)$, $(1; 1; 1)$ and B the 2×3 matrix with rows $(1; 2; 3)$, $(0; 1; 1)$. (a) Compute $\det A$. (b) Find A^{-1} by Gauss–Jordan elimination. (c) Solve the matrix equation $XA = B$.

- (a) Sarrus: $3 + 8 + 2 - 6 - 4 - 2 = 1$. $\det A = 1 \neq 0$ nên A khả nghịch.
(a) Sarrus: $3 + 8 + 2 - 6 - 4 - 2 = 1$. $\det A = 1 \neq 0$, so A is invertible.
- (b) Lập $[A | I]$; $d_2 - d_1$, $d_3 - d_1$: $(0; 1; 2 | -1; 1; 0)$, $(0; -1; -1 | -1; 0; 1)$; $d_3 + d_2$: $(0; 0; 1 | -2; 1; 1)$.
(b) Form $[A | I]$; $r_2 - r_1$, $r_3 - r_1$: $(0; 1; 2 | -1; 1; 0)$, $(0; -1; -1 | -1; 0; 1)$; $r_3 + r_2$: $(0; 0; 1 | -2; 1; 1)$.
- Khử ngược: $d_2 - 2d_3 = (0; 1; 0 | 3; -1; -2)$; $d_1 - 2d_3 - 2d_2 = (1; 0; 0 | -1; 0; 2)$. A^{-1} có các dòng $(-1; 0; 2)$, $(3; -1; -2)$, $(-2; 1; 1)$.
Back substitution: $r_2 - 2r_3 = (0; 1; 0 | 3; -1; -2)$; $r_1 - 2r_3 - 2r_2 = (1; 0; 0 | -1; 0; 2)$. A^{-1} has rows $(-1; 0; 2)$, $(3; -1; -2)$, $(-2; 1; 1)$.
- (c) $XA = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$ (nhân A^{-1} bên PHẢI). X cỡ 2×3 , các dòng $(-1; 1; 1)$, $(1; 0; -1)$.
(c) $XA = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$ (multiply by A^{-1} on the RIGHT). X is 2×3 with rows $(-1; 1; 1)$, $(1; 0; -1)$.
- Thử lại: dòng 1 của X nhân A : $(-1 + 1 + 1; -2 + 3 + 1; -2 + 4 + 1) = (1; 2; 3)$, đúng dòng 1 của B . Viết $X = A^{-1} \cdot B$ là sai vì A^{-1} (3×3) không nhân được với B (2×3).
Check: row 1 of X times A : $(-1 + 1 + 1; -2 + 3 + 1; -2 + 4 + 1) = (1; 2; 3)$, row 1 of B .
Writing $X = A^{-1} \cdot B$ is wrong: A^{-1} (3×3) cannot multiply B (2×3).

1.10. Câu hỏi trắc nghiệm — Multiple-choice questions

1. Ma trận doanh số A cỡ 2×3 (2 cửa hàng, 3 mặt hàng), ma trận B cỡ 3×4 . Tích AB có cỡ nào?

The sales matrix A is 2×3 (2 shops, 3 products) and B is 3×4 . What is the size of AB ?

- A. 3×3
- B. 2×4
- C. 4×2
- D. Không nhân được / Not defined

2. Định thức của ma trận cấp 2 có các dòng $(3; -2)$, $(4; 1)$ bằng bao nhiêu?

What is the determinant of the 2×2 matrix with rows $(3; -2)$, $(4; 1)$?

- A. 11
- B. -5
- C. 5
- D. -11

3. A là ma trận vuông cấp 3 có $\det A = 2$. Định thức của $3A$ bằng bao nhiêu?
A is a 3×3 matrix with $\det A = 2$. What is $\det(3A)$?
- A. 6
 - B. 18
 - C. 54
 - D. $2/3$
4. Ma trận A cấp 3 có $\det A = 5$. Đổi chỗ dòng 1 và dòng 3, rồi nhân dòng 2 với 2, được ma trận B. $\det B$ bằng bao nhiêu?
A is 3×3 with $\det A = 5$. Swap rows 1 and 3, then multiply row 2 by 2, giving B. What is $\det B$?
- A. 10
 - B. 5
 - C. -5
 - D. -10
5. Ma trận nghịch đảo của ma trận cấp 2 có các dòng (3; 5), (1; 2) là ma trận có các dòng:
The inverse of the 2×2 matrix with rows (3; 5), (1; 2) is the matrix with rows:
- A. (2; -5), (-1; 3)
 - B. (2; 5), (1; 3)
 - C. (-2; 5), (1; -3)
 - D. (2; -1), (-5; 3)
6. Ma trận A có các dòng (1; 2; 3), (2; 4; m), (1; 3; 4). Với giá trị nào của m thì hạng của A bằng 2?
Matrix A has rows (1; 2; 3), (2; 4; m), (1; 3; 4). For which m is the rank of A equal to 2?
- A. $m = -6$
 - B. $m = 0$
 - C. $m = 6$
 - D. $m = 4$
7. Với A, B là các ma trận sao cho tích AB xác định, ma trận chuyển vị $(AB)^T$ bằng:
For matrices A, B such that AB is defined, the transpose $(AB)^T$ equals:
- A. $A^T B^T$
 - B. $B^T A^T$
 - C. BA
 - D. AB

- Viết một bài toán kinh tế thành hệ phương trình tuyến tính và chuyển sang dạng ma trận $AX = B$.
Translate an economic problem into a system of linear equations and write it in matrix form $AX = B$.
- Giải hệ vuông bằng quy tắc Cramer và bằng ma trận nghịch đảo; biết khi nào hai cách này không dùng được.
Solve square systems by Cramer's rule and by the inverse matrix; know when these methods do not apply.
- Giải hệ bất kỳ bằng phương pháp khử Gauss, viết nghiệm tổng quát với ẩn tự do.
Solve any system by Gaussian elimination and write the general solution with free variables.
- Biện luận số nghiệm theo hạng (định lý Kronecker–Capelli) và theo tham số.
Determine the number of solutions from ranks (Kronecker–Capelli theorem) and in terms of a parameter.
- Tìm điều kiện có nghiệm không tầm thường và hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất; tự kiểm đáp số bằng Python.
Find when a homogeneous system has non-trivial solutions and find a fundamental system of solutions; check answers in Python.

[illegible]

Here a_{ij} is the coefficient of x_j in equation i and b_i is the constant term (right-hand side). Each unknown appears only to the first power, with no products of unknowns and no functions of unknowns. Collect the coefficients into three matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = (b_1; b_2; \dots; b_m)^T$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — **Dạng ma trận** của hệ (2.1): $AX = B$. A là ma trận hệ số ($m \times n$), X là vector cột ẩn ($n \times 1$), B là vector cột hệ số tự do ($m \times 1$).

Ma trận bổ sung (ma trận mở rộng) $\bar{A} = [A | B]$: ghép cột B vào bên phải A , cấp $m \times (n + 1)$. Một bộ số $(c_1; c_2; \dots; c_n)$ là **nghiệm** nếu thay $x_j = c_j$ thì mọi phương trình đều đúng. Hai hệ cùng ẩn là **tương đương** nếu có cùng tập nghiệm.

Matrix form of (2.1): $AX = B$. A is the coefficient matrix ($m \times n$), X is the column vector of unknowns ($n \times 1$), B is the column vector of constants ($m \times 1$).

Augmented matrix $\bar{A} = [A | B]$: append column B to the right of A , size $m \times (n + 1)$.

*A tuple $(c_1; c_2; \dots; c_n)$ is a **solution** if putting $x_j = c_j$ makes every equation true. Two systems in the same unknowns are **equivalent** if they have the same solution set.*

$$AX = B, \quad \bar{A} = [A | B] \quad (2.2)$$

Tích AX là vector cột có dòng thứ i bằng $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$, tức vế trái của phương trình thứ i . Vì vậy viết $AX = B$ chỉ là viết gọn m phương trình. Phép nhân phải đúng thứ tự A rồi đến X : XA không xác định khi $m \neq 1$.

The product AX is a column vector whose i -th entry is $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$, the left-hand side of equation i . Writing $AX = B$ is therefore shorthand for the m equations. The order A then X matters: XA is undefined when $m \neq 1$.

Phân loại hệ theo số nghiệm — Classification by number of solutions

Tên gọi <i>Name</i>	Nghĩa <i>Meaning</i>	Ví dụ hai ẩn <i>Two-unknown example</i>
Hệ tương thích, xác định <i>Consistent, determinate</i>	Có đúng một nghiệm <i>Exactly one solution</i>	$x + y = 5; x - y = 1 \Rightarrow (3; 2)$
Hệ tương thích, không xác định <i>Consistent, indeterminate</i>	Có vô số nghiệm <i>Infinitely many solutions</i>	$x + y = 5; 2x + 2y = 10 \Rightarrow (5 - t; t)$
Hệ không tương thích <i>Inconsistent</i>	Không có nghiệm <i>No solution</i>	$x + y = 5; x + y = 7$

Tên gọi <i>Name</i>	Nghĩa <i>Meaning</i>	Ví dụ hai ẩn <i>Two-unknown example</i>
Hệ vuông <i>Square system</i>	Số phương trình bằng số ẩn ($m = n$) <i>As many equations as unknowns ($m = n$)</i>	Dùng được Cramer, A^{-1} khi $\det A \neq 0$ <i>Cramer, A^{-1} apply when $\det A \neq 0$</i>
Hệ thuần nhất <i>Homogeneous system</i>	Mọi $b_i = 0$, tức $B = O$ <i>All $b_i = 0$, i.e. $B = O$</i>	$x + 2y = 0; 3x + 6y = 0$

Một hệ tuyến tính chỉ có thể rơi vào một trong ba khả năng: vô nghiệm, đúng một nghiệm, vô số nghiệm. Không có hệ tuyến tính nào có đúng hai hoặc đúng ba nghiệm: nếu $X_1 \neq X_2$ đều là nghiệm thì mọi điểm $X_1 + t(X_2 - X_1)$ cũng là nghiệm.

A linear system has exactly one of three outcomes: no solution, exactly one solution, or infinitely many. No linear system has exactly two or three solutions: if $X_1 \neq X_2$ are both solutions, then every point $X_1 + t(X_2 - X_1)$ is a solution too.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ví dụ 2.1. Cơ sở bánh trung thu Hữu Hạnh (Cần Thơ) làm ba loại bánh: đậu xanh, thập cẩm, trứng muối. Đơn vị sản lượng là trăm cái. Mỗi trăm bánh cần số giờ công ở ba khâu như sau: nhào bột 2, 1, 3 giờ; nướng 1, 2, 1 giờ; đóng gói 3, 1, 2 giờ (theo thứ tự đậu xanh, thập cẩm, trứng muối). Mỗi ngày cơ sở có 17 giờ nhào, 12 giờ nướng, 19 giờ đóng gói. Gọi x_1, x_2, x_3 là sản lượng ba loại (trăm cái). Dùng hết giờ công ở cả ba khâu:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17; \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 12; \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 19.$$

Dạng ma trận: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = (17; 12; 19)$. Thử $X = (4; 3; 2)$: $8 + 3 + 6 = 17$; $4 + 6 + 2 = 12$; $12 + 3 + 4 = 19$. Vậy làm 400 bánh đậu xanh, 300 thập cẩm, 200 trứng muối thì dùng hết giờ công. Mục 2.2 chứng minh đây là nghiệm duy nhất.

Example 2.1. Hữu Hạnh mooncake bakery (Cần Thơ) makes three kinds: mung bean, mixed nut and salted egg. Output is measured in hundreds of cakes. Each hundred needs these labour hours: kneading 2, 1, 3; baking 1, 2, 1; packing 3, 1, 2 (in the order mung bean, mixed nut, salted egg). Daily capacity is 17 kneading, 12 baking and 19 packing hours. Let x_1, x_2, x_3 be the outputs (hundreds).

Using all hours in every stage:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17; \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 12; \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 19.$$

Matrix form: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = (17; 12; 19)$. Try $X = (4; 3; 2)$: $8 + 3 + 6 = 17$; $4 + 6 + 2 = 12$; $12 + 3 + 4 = 19$. So 400 mung bean, 300 mixed nut and 200 salted egg cakes use up all hours.

Section 2.2 shows this is the only solution.

Ma trận bổ sung của Ví dụ 2.1:

The augmented matrix of Example 2.1:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 17 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 19 \end{array} \right]$$

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lập ma trận hệ số sai: (1) xếp hệ số không theo cùng một thứ tự ẩn ở mọi dòng; (2) bỏ trống thay vì ghi 0 khi một ẩn vắng mặt, ví dụ phương trình $x - 2z = 0$ phải ghi dòng $[1 \ 0 \ -2]$, không phải $[1 \ -2]$; (3) với bài kinh tế, đặt dòng theo sản phẩm nhưng cột cũng theo sản phẩm. Quy ước an toàn: **mỗi dòng là một ràng**

bước (một nguồn lực, một điều kiện), **mỗi cột là một ẩn**.

Building the coefficient matrix wrongly: (1) ordering coefficients differently in different rows; (2) leaving a blank instead of writing 0 for a missing unknown, e.g. $x - 2z = 0$ must give the row $[1 \ 0 \ -2]$, not $[1 \ -2]$; (3) in an economic problem, indexing rows by product as well as columns. Safe rule: each row is one constraint (a resource, a condition), each column is one unknown.

2.2. Quy tắc Cramer — Cramer's rule

Hệ vuông n phương trình, n ẩn có định thức ma trận hệ số $D = \det A \neq 0$ gọi là **hệ Cramer**. Gọi D_j là định thức của ma trận nhận được từ A khi **thay cột thứ j bằng cột vế phải B** , giữ nguyên các cột khác.

*A square system of n equations in n unknowns whose coefficient determinant $D = \det A \neq 0$ is called a **Cramer system**. Let D_j be the determinant of the matrix obtained from A by **replacing column j with the right-hand side B** , all other columns unchanged.*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Định lý Cramer. Nếu A vuông cấp n và $D = \det A \neq 0$ thì hệ $AX = B$ có **nghiệm duy nhất**:

$$x_j = D_j / D, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Nếu $D = 0$ thì quy tắc Cramer không dùng được: hệ hoặc vô nghiệm, hoặc vô số nghiệm; phải biện luận bằng phương pháp Gauss hay theo hạng (mục 2.5).

Cramer's theorem. *If A is square of order n and $D = \det A \neq 0$, the system $AX = B$ has a **unique solution**:*

$$x_j = D_j / D, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

If $D = 0$, Cramer's rule does not apply: the system has either no solution or infinitely many; decide by Gaussian elimination or by ranks (Section 2.5).

$$x_j = D_j / D, \quad D = \det A \neq 0 \quad (2.3)$$

Với hệ hai ẩn $ax + by = e$; $cx + dy = f$, ba định thức viết thẳng ra:

For two unknowns, $ax + by = e$; $cx + dy = f$, the three determinants are:

$$D = ad - bc, \quad D_1 = ed - bf, \quad D_2 = af - ec \quad (2.4)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ví dụ 2.2. Giải hệ $3x + 2y = 16$; $5x - y = 18$.

$$D = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -13 \neq 0. \quad D_1 = 16 \cdot (-1) - 2 \cdot 18 = -52. \quad D_2 = 3 \cdot 18 - 16 \cdot 5 = -26.$$

$$x = D_1/D = -52/(-13) = 4; \quad y = D_2/D = -26/(-13) = 2. \quad \text{Kiểm: } 12 + 4 = 16; \quad 20 - 2 = 18.$$

Example 2.2. *Solve $3x + 2y = 16$; $5x - y = 18$.*

$$D = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -13 \neq 0. \quad D_1 = 16 \cdot (-1) - 2 \cdot 18 = -52. \quad D_2 = 3 \cdot 18 - 16 \cdot 5 = -26.$$

$$x = D_1/D = -52/(-13) = 4; \quad y = D_2/D = -26/(-13) = 2. \quad \text{Check: } 12 + 4 = 16; \quad 20 - 2 = 18.$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ví dụ 2.2b. Quán cà phê Phở Núi (Đà Lạt) không niêm yết giá lẻ.

Hóa đơn thứ nhất: 3 ly cà phê sữa và 2 bánh mì hết 125 nghìn đồng. Hóa đơn thứ hai: 2 ly cà phê sữa và 3 bánh mì hết 120 nghìn đồng. Gọi x, y là giá một ly và một bánh (nghìn đồng): $3x + 2y = 125$; $2x + 3y = 120$.

$$D = 9 - 4 = 5; \quad D_1 = 125 \cdot 3 - 2 \cdot 120 = 135; \quad D_2 = 3 \cdot 120 - 125 \cdot 2 = 110.$$

$x = 135/5 = 27$; $y = 110/5 = 22$. Giá một ly cà phê sữa 27 nghìn đồng, một bánh mì 22 nghìn đồng. Kiểm: $81 + 44 = 125$; $54 + 66 = 120$.

Example 2.2b. *Phở Núi café (Đà Lạt) posts no unit prices. Bill one: 3 iced milk coffees and 2 baguettes cost VND 125 thousand. Bill two: 2 coffees and 3 baguettes cost VND 120 thousand. Let x, y*

be the unit prices (VND thousand): $3x + 2y = 125$; $2x + 3y = 120$.

$D = 9 - 4 = 5$; $D_1 = 125 \cdot 3 - 2 \cdot 120 = 135$; $D_2 = 3 \cdot 120 - 125 \cdot 2 = 110$.

$x = 135/5 = 27$; $y = 110/5 = 22$. A coffee costs VND 27 thousand and a baguette VND 22 thousand.

Check: $81 + 44 = 125$; $54 + 66 = 120$.

Ví dụ 2.3. Giải bài toán bánh trung thu bằng Cramer — Example 2.3. The mooncake problem by Cramer's rule

Quay lại Ví dụ 2.1. Bước 1: tính D bằng quy tắc Sarrus.

Return to Example 2.1. Step 1: compute D by Sarrus' rule.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 8 + 3 + 3 - 18 - 2 - 2 = -8$$

$D = -8 \neq 0$ nên hệ là hệ Cramer, có nghiệm duy nhất. Bước 2: thay lần lượt từng cột bằng $B = (17; 12; 19)$.

$D = -8 \neq 0$, so this is a Cramer system with a unique solution. Step 2: replace each column in turn by $B = (17; 12; 19)$.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 17 & 1 & 3 \\ 12 & 2 & 1 \\ 19 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 68 + 19 + 36 - 114 - 17 - 24 = -32$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 17 & 3 \\ 1 & 12 & 1 \\ 3 & 19 & 2 \end{bmatrix} = 48 + 51 + 57 - 108 - 38 - 34 = -24$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 17 \\ 1 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 19 \end{bmatrix} = 76 + 36 + 17 - 102 - 24 - 19 = -16$$

Bước 3: $x_1 = -32/(-8) = 4$; $x_2 = -24/(-8) = 3$; $x_3 = -16/(-8) = 2$ (trăm cái). Kết quả khớp với phép thử ở Ví dụ 2.1, và vì $D \neq 0$ nên không còn kế hoạch nào khác dùng hết đúng 17, 12, 19 giờ.

Step 3: $x_1 = -32/(-8) = 4$; $x_2 = -24/(-8) = 3$; $x_3 = -16/(-8) = 2$ (hundreds of cakes). This matches the check in Example 2.1, and since $D \neq 0$ no other plan uses exactly 17, 12 and 19 hours.

Trường hợp <i>Case</i>	Kết luận <i>Conclusion</i>	Cách xử lý <i>What to do</i>
$D \neq 0$	Nghiệm duy nhất $x_j = D_j/D$ <i>Unique solution $x_j = D_j/D$</i>	Dùng Cramer <i>Use Cramer</i>
$D = 0$ và có ít nhất một $D_j \neq 0$ <i>$D = 0$ and some $D_j \neq 0$</i>	Hệ vô nghiệm <i>No solution</i>	Kết luận ngay <i>Conclude at once</i>
$D = 0$ và mọi $D_j = 0$ <i>$D = 0$ and all $D_j = 0$</i>	Chưa kết luận được: có thể vô số nghiệm hoặc vô nghiệm <i>Undecided: infinitely many or none</i>	Khử Gauss, so sánh hạng <i>Eliminate, compare ranks</i>

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Thấy $D = 0$ và $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ rồi kết luận “hệ vô số nghiệm”. Phản ví dụ: $x + y + z = 1$; $x + y + z = 2$; $x + y + z = 3$. Ba cột của A bằng nhau nên $D = 0$, và mỗi D_j vẫn có hai cột bằng nhau nên $D_j = 0$; nhưng ba phương trình mâu thuẫn nhau nên hệ vô nghiệm. Với hệ từ 3 ẩn trở lên, trường hợp mọi định thức bằng 0 phải giải bằng Gauss.

Seeing $D = 0$ and $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ and concluding “infinitely many solutions”. Counterexample: $x + y + z = 1$; $x + y + z = 2$; $x + y + z = 3$. All three columns of A are equal, so $D = 0$, and each D_j still has two equal columns, so $D_j = 0$; yet the three equations contradict one another, so there is no solution. With 3 or more unknowns, the all-zero case must be settled by Gaussian elimination.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Thay dòng j thay vì cột j bằng B khi lập D_j , hoặc lấy D_j/D nhưng quên dấu âm của D. Ở Ví dụ 2.3, bỏ dấu của $D = -8$ sẽ ra nghiệm $(-4; -3; -2)$: sản lượng âm là dấu hiệu tính sai.

Replacing row j instead of column j with B when forming D_j , or dividing by D but dropping its minus sign. In Example 2.3, ignoring the sign of $D = -8$ gives $(-4; -3; -2)$: negative outputs signal an arithmetic error.

2.3. Giải hệ bằng ma trận nghịch đảo — Solving by the inverse matrix

Nếu A vuông và $\det A \neq 0$ thì A có ma trận nghịch đảo A^{-1} (Chương 1). Nhân bên trái hai vế của $AX = B$ với A^{-1} : $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, mà $A^{-1}A = I$ và $IX = X$, nên:

If A is square and $\det A \neq 0$, A has an inverse A^{-1} (Chapter 1). Multiply both sides of $AX = B$ on the left by A^{-1} : $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$; since $A^{-1}A = I$ and $IX = X$:

$$AX = B, \det A \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1}B \quad (2.5)$$

$$XA = B, \det A \neq 0 \Rightarrow X = BA^{-1} \quad (2.6)$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Phương pháp ma trận nghịch đảo: tính $A^{-1} = (1/\det A) \cdot C^T$, trong đó C là ma trận các phần bù đại số $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$; sau đó nhân $X = A^{-1}B$. Ấn đứng bên phải A thì A^{-1} nhân bên trái B; ấn đứng bên trái A thì A^{-1} nhân bên phải B. Cách này có lợi khi cùng ma trận A phải giải với nhiều vế phải $B_1, B_2, \dots$ (nhiều kịch bản kế hoạch, nhiều đơn hàng): chỉ tính A^{-1} một lần.

Inverse-matrix method: compute $A^{-1} = (1/\det A) \cdot C^T$, where C is the matrix of cofactors $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$; then multiply $X = A^{-1}B$. If the unknown stands to the right of A, A^{-1} multiplies B on the left; if it stands to the left of A, A^{-1} multiplies B on the right.

*It pays off when **the same matrix A** must be solved with **many right-hand sides** $B_1, B_2, \dots$ (several planning scenarios, several orders): A^{-1} is computed only once.*

Ví dụ 2.4. Một ma trận nghịch đảo, hai kịch bản nguyên liệu — Example 2.4. One inverse, two input scenarios

Nhà máy thức ăn chăn nuôi Phú Thịnh (Đồng Nai) trộn ba loại cám G1, G2, G3. Mỗi tấn cám cần: ngô 1, 1, 0 tạ; khô đậu nành 2, 3, 1 tạ; cám gạo 1, 2, 2 tạ (theo thứ tự G1, G2, G3). Tháng 10 kho có 50 tạ ngô, 170 tạ khô đậu, 160 tạ cám gạo; tháng 11 dự kiến 55, 175, 155 tạ. Tìm số tấn mỗi loại để dùng hết nguyên liệu trong từng tháng.

Phú Thịnh feed mill (Đồng Nai) blends three feeds G1, G2, G3. Each tonne needs: maize 1, 1, 0 quintals; soybean meal 2, 3, 1 quintals; rice bran 1, 2, 2 quintals (in the order G1, G2, G3). In October the store holds 50 quintals of maize, 170 of soybean meal and 160 of rice bran; November is expected to bring 55, 175 and 155. Find the tonnes of each feed that use up all inputs in each month.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \det A = 1(6 - 2) - 1(4 - 1) = 1$$

Các phần bù đại số: $A_{11} = 4, A_{12} = -3, A_{13} = 1; A_{21} = -2, A_{22} = 2, A_{23} = -1; A_{31} = 1, A_{32} = -1, A_{33} = 1$. Chuyển vị ma trận phần bù và chia cho $\det A = 1$:

Cofactors: $A_{11} = 4, A_{12} = -3, A_{13} = 1; A_{21} = -2, A_{22} = 2, A_{23} = -1; A_{31} = 1, A_{32} = -1, A_{33} = 1$. Transpose the cofactor matrix and divide by $\det A = 1$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kiểm A^{-1} bằng cách khác: khử Gauss–Jordan trên $[A \mid I]$. Khi nửa trái thành I thì nửa phải chính là A^{-1} . Cách này ít phép tính hơn phần bù đại số khi ma trận từ cấp 3 trở lên.

Check A^{-1} another way: Gauss–Jordan elimination on $[A \mid I]$. When the left half becomes I, the right half is A^{-1} . For order 3 and above this takes fewer operations than cofactors.

$$\begin{aligned} [A \mid I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad d_2 - 2d_1; \quad d_3 - d_1 \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad d_3 - d_2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \quad d_2 - d_3; \quad d_1 - d_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] = [I \mid A^{-1}]$$

Tháng 10, $B_1 = (50; 170; 160)$:

October, $B_1 = (50; 170; 160)$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \\ A^{-1}B_1 &= \\ &= \left[\begin{array}{c} 200 - 340 + 160 \\ -150 + 340 - 160 \\ 50 - 170 + 160 \end{array} \right] = (20; 30; 40) \end{aligned}$$

Tháng 11, $B_2 = (55; 175; 155)$:

November, $B_2 = (55; 175; 155)$:

$$\begin{aligned} X_2 &= \\ A^{-1}B_2 &= \\ &= \left[\begin{array}{c} 220 - 350 + 155 \\ -165 + 350 - 155 \\ 55 - 175 + 155 \end{array} \right] = (25; 30; 35) \end{aligned}$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Kết luận Ví dụ 2.4: tháng 10 trộn 20 tấn G1, 30 tấn G2, 40 tấn G3; tháng 11 trộn 25 tấn G1, 30 tấn G2, 35 tấn G3. Kiểm tháng 10: ngô $20 + 30 = 50$; khô đậu $40 + 90 + 40 = 170$; cám gạo $20 + 60 + 80 = 160$. Ý nghĩa của A^{-1} : cột 1 của A^{-1} là $(4; -3; 1)$, nên có thêm 1 tạ ngô (giữ nguyên hai nguyên liệu kia) thì phương án dùng hết nguyên liệu đổi thành +4 tấn G1, -3 tấn G2, +1 tấn G3.

Conclusion of Example 2.4: in October blend 20 t of G1, 30 t of G2, 40 t of G3; in November 25 t of G1, 30 t of G2, 35 t of G3. October check: maize $20 + 30 = 50$; soybean meal $40 + 90 + 40 = 170$; rice bran $20 + 60 + 80 = 160$. Meaning of A^{-1} : its first column is $(4; -3; 1)$, so one more quintal of maize (others unchanged) shifts the full-use plan by +4 t of G1, -3 t of G2, +1 t of G3.

Phương trình dạng $XA = B$ (ẩn là vector dòng hoặc ma trận đứng trước A) giải bằng $X = BA^{-1}$. Ví dụ: tìm $X = (x \ y)$ sao cho $X \cdot [2 \ 1; 5 \ 3] = (7 \ 4)$. $\det A = 6 - 5 = 1$, $A^{-1} = [3 \ -1; -5 \ 2]$. $X = (7 \ 4) \cdot A^{-1} = (21 - 20; -7 + 8) = (1 \ 1)$. Kiểm: $(1 \cdot 2 + 1 \cdot 5; 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3) = (7 \ 4)$.

An equation $XA = B$ (the unknown is a row vector or a matrix standing before A) is solved by $X = BA^{-1}$. Example: find $X = (x \ y)$ with $X \cdot [2 \ 1; 5 \ 3] = (7 \ 4)$. $\det A = 6 - 5 = 1$, $A^{-1} = [3 \ -1; -5 \ 2]$. $X = (7 \ 4) \cdot A^{-1} = (21 - 20; -7 + 8) = (1 \ 1)$. Check: $(1 \cdot 2 + 1 \cdot 5; 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3) = (7 \ 4)$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết $X = BA^{-1}$ cho phương trình $AX = B$. Phép nhân ma trận không giao hoán, nên $A^{-1}B \neq BA^{-1}$ nói chung; với B là cột $n \times 1$ thì BA^{-1} thậm chí không xác định. Mẹo: A^{-1} luôn đứng ở **cùng phía** với A trong phương trình gốc.

*Writing $X = BA^{-1}$ for $AX = B$. Matrix multiplication is not commutative, so $A^{-1}B \neq BA^{-1}$ in general; with B an $n \times 1$ column, BA^{-1} is not even defined. Tip: A^{-1} always goes **on the same side** as A in the original equation.*

2.4. Phương pháp khử Gauss — Gaussian elimination

Cramer và ma trận nghịch đảo chỉ dùng cho hệ vuông có $\det A \neq 0$. Phương pháp Gauss dùng cho **mọi hệ**: vuông hay không vuông, có nghiệm duy nhất, vô số nghiệm hay vô nghiệm. Ý tưởng: dùng các phép biến đổi không làm đổi tập nghiệm để đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang, sau đó giải từ dưới lên.

*Cramer's rule and the inverse apply only to square systems with $\det A \neq 0$. Gaussian elimination works for **every system**: square or not, with a unique solution, infinitely many or none. Idea: use operations that keep the solution set unchanged to bring the augmented matrix to echelon form, then solve from the bottom up.*

Phép biến đổi sơ cấp trên dòng <i>Elementary row operation</i>	Ký hiệu <i>Notation</i>	Tác động lên hệ <i>Effect on the system</i>
Đổi chỗ hai dòng <i>Swap two rows</i>	$d_i \leftrightarrow d_j$ $r_i \leftrightarrow r_j$	Đổi thứ tự hai phương trình <i>Reorders two equations</i>
Nhân một dòng với số $k \neq 0$ <i>Multiply a row by $k \neq 0$</i>	$d_i \rightarrow k \cdot d_i$ $r_i \rightarrow k \cdot r_i$	Nhân hai vế một phương trình với $k \neq 0$ <i>Multiplies both sides of an equation by $k \neq 0$</i>
Cộng vào một dòng k lần dòng khác <i>Add k times another row</i>	$d_i \rightarrow d_i + k \cdot d_j$ $r_i \rightarrow r_i + k \cdot r_j$	Cộng k lần phương trình j vào phương trình i <i>Adds k times equation j to equation i</i>

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Ma trận bậc thang (theo dòng): (1) các dòng toàn số 0, nếu có, nằm dưới cùng; (2) phần tử khác 0 đầu tiên của mỗi dòng (gọi là **phần tử trụ**) nằm ở cột lệch sang phải so với trụ của dòng trên. **Bậc thang rút gọn**: thêm điều kiện mọi trụ bằng 1 và là phần tử khác 0 duy nhất trong cột của nó.

Ba phép biến đổi sơ cấp trên dòng biến hệ thành **hệ tương đương**. Chỉ biến đổi **dòng**, không biến đổi **cột**; cột về phải luôn đi cùng dòng của nó.

Row echelon form: (1) zero rows, if any, are at the bottom; (2) the first non-zero entry of each row (the **pivot**) lies in a column to the right of the pivot of the row above. **Reduced row echelon form**: in addition every pivot equals 1 and is the only non-zero entry in its column.

*The three elementary row operations turn a system into an **equivalent system**. Operate on **rows** only, never on columns; the right-hand entry always travels with its row.*

Quy ước ký hiệu: trong các ma trận biến đổi, d_i là dòng thứ i ; mũi tên $\rightarrow$ nối hai ma trận tương đương; ghi bên phải ma trận là các phép vừa làm để ra ma trận kế tiếp.

Notation: in the matrix displays, d_i denotes row i (r_i in the English text); an arrow $\rightarrow$ links two equivalent matrices; the note to the right of a matrix lists the operations that produce the next one.

Các bước giải — Procedure

1. Lập ma trận bổ sung $\bar{A} = [A \mid B]$.
Form the augmented matrix $\bar{A} = [A \mid B]$.
2. Chọn trụ ở cột 1 (nên chọn dòng có hệ số 1 hoặc -1 , đổi lên đầu). Dùng phép $d_i \rightarrow d_i + k \cdot d_1$ để mọi phần tử dưới trụ thành 0.
*Choose a pivot in column 1 (preferably a row with coefficient 1 or -1 , moved to the top).
Use $r_i \rightarrow r_i + k \cdot r_1$ to make every entry below the pivot zero.*
3. Bỏ qua dòng 1, lặp lại với ma trận con còn lại cho tới khi được dạng bậc thang.
Set row 1 aside and repeat on the remaining submatrix until echelon form is reached.
4. Đọc kết quả: có dòng $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c]$ với $c \neq 0$ thì hệ vô nghiệm. Nếu không, ứng với cột có trụ là **ẩn cơ sở**, các ẩn còn lại là **ẩn tự do**.
*Read off: a row $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c]$ with $c \neq 0$ means no solution. Otherwise, unknowns in pivot columns are **basic variables**, the rest are **free variables**.*
5. Thế ngược: giải ẩn cơ sở từ dòng cuối lên dòng đầu, theo các ẩn tự do (nếu có).
Back substitution: solve for basic variables from the last row upwards, in terms of the free variables (if any).

Ví dụ 2.5. Hệ có nghiệm duy nhất — Example 2.5. A system with a unique solution

Giải hệ $x + 2y + z = 9$; $2x + 3y - z = 4$; $3x + y + 2z = 13$. Ma trận bổ sung:

Solve $x + 2y + z = 9$; $2x + 3y - z = 4$; $3x + y + 2z = 13$. Augmented matrix:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 13 \end{array} \right] \quad d_2 - 2d_1; \ d_3 - 3d_1$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -14 \\ 0 & -5 & -1 & -14 \end{array} \right] \quad d_3 - 5d_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 14 & 56 \end{array} \right]$$

Ma trận đã có dạng bậc thang, ba trụ ở ba cột, không có dòng mâu thuẫn. Thế ngược: $14z = 56 \Rightarrow z = 4$; $-y - 3 \cdot 4 = -14 \Rightarrow y = 2$; $x = 9 - 2 \cdot 2 - 4 = 1$. Nghiệm duy nhất $(1; 2; 4)$. Kiểm phương trình 2: $2 + 6 - 4 = 4$.

The matrix is in echelon form with three pivots in three columns and no contradictory row. Back substitution: $14z = 56 \Rightarrow z = 4$; $-y - 3 \cdot 4 = -14 \Rightarrow y = 2$; $x = 9 - 2 \cdot 2 - 4 = 1$. Unique solution (1; 2; 4). Check equation 2: $2 + 6 - 4 = 4$.

Đi tiếp đến dạng bậc thang rút gọn (phương pháp **Gauss–Jordan**) thì đọc nghiệm thẳng ở cột cuối, không cần thế ngược: chia d_3 cho 14, d_2 cho -1 , rồi khử ngược lên trên.

Continuing to reduced echelon form (the **Gauss–Jordan** method) lets you read the solution straight from the last column, without back substitution: divide r_3 by 14 and r_2 by -1 , then eliminate upwards.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow (x; y; z) = (1; 2; 4)$$

Ví dụ 2.6. Hệ có vô số nghiệm — Example 2.6. A system with infinitely many solutions

Giải hệ 3 phương trình, 4 ẩn: $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$; $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 10$; $3x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 13$.

Solve 3 equations in 4 unknowns: $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$; $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 10$; $3x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 13$.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 13 \end{array} \right] \quad d_2 - 2d_1; \quad d_3 - 3d_1$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \end{array} \right] \quad d_3 - d_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dòng cuối toàn 0 (phương trình $0 = 0$, luôn đúng). Còn hai trụ ở cột 1 và cột 2: x_1, x_2 là ẩn cơ sở; x_3, x_4 là ẩn tự do. Đặt $x_3 = s$, $x_4 = t$. Dòng 2: $x_2 = 4 - 3s + t$. Dòng 1: $x_1 = 3 - x_2 + s - 2t = -1 + 4s - 3t$.

The last row is all zero (the equation $0 = 0$, always true). Two pivots remain, in columns 1 and 2: x_1, x_2 are basic; x_3, x_4 are free. Put $x_3 = s$, $x_4 = t$. Row 2: $x_2 = 4 - 3s + t$. Row 1: $x_1 = 3 - x_2 + s - 2t = -1 + 4s - 3t$.

$$X = (-1 + 4s - 3t; 4 - 3s + t; s; t), \quad s, t \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

Mỗi cặp $(s; t)$ cho một nghiệm riêng, ví dụ $s = 1, t = 1$ cho $(0; 2; 1; 1)$. Kiểm phương trình 2: $0 + 6 + 1 + 3 = 10$.