

TÀI LIỆU THAM KHẢO NĂNG CAO

TOÁN 10 CHO GÀ CHỌI

Dành cho học sinh thi học sinh giỏi cấp tỉnh, cấp quốc gia và Olympic quốc tế

Olympiad Mathematics for Grade 10 — a bilingual guide

Đại số · Bất đẳng thức · Số học · Tổ hợp · Hình học phẳng

Định lý có chứng minh · Ví dụ có phân tích và lời giải

Bài tự luyện ba mức: tỉnh, quốc gia, quốc tế — lời giải đầy đủ

Song ngữ Việt – Anh · Vietnamese – English

Phiên bản 1.0 — Tháng 10 năm 2026

<https://globalmarket.vn>

M U C L U C

C O N T E N T S

Chương 1. Mệnh đề, tập hợp và các phương pháp chứng minh — Chapter 1. Logic, sets and methods of proof.....	7
1.1. Mệnh đề và lượng từ — <i>Statements and quantifiers</i>	7
1.2. Kéo theo, điều kiện cần và đủ, mệnh đề đảo và phản đảo — <i>Implication, necessary and sufficient conditions, converse and contrapositive</i>	9
1.3. Tập hợp, phép toán và lực lượng — <i>Sets, operations and cardinality</i>	11
1.4. Ánh xạ: đơn ánh, toàn ánh, song ánh — <i>Maps: injections, surjections, bijections</i>	15
1.5. Chứng minh trực tiếp, bằng phản đảo và bằng phản chứng — <i>Direct proof, contrapositive and contradiction</i>	17
1.6. Quy nạp và nguyên lý sắp thứ tự tốt — <i>Induction and the well-ordering principle</i> ...	21
1.7. Cách viết một chứng minh được chấm đủ điểm — <i>How to write a proof that earns full marks</i>	27
1.8. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	31
1.9. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	33
Chương 2. Các bất đẳng thức cổ điển — Chapter 2. Classical inequalities.....	39
2.1. Thứ tự trên $\mathbb{R}$, biến đổi tương đương và bình phương — <i>Order on $\mathbb{R}$, equivalent transformations and squares</i>	39
2.2. Bất đẳng thức AM–GM và kỹ thuật điểm rơi — <i>The AM–GM inequality and the equality-point technique</i>	44
2.3. Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz — <i>The Cauchy–Schwarz inequality</i>	49
2.4. Bất đẳng thức hoán vị và Chebyshev — <i>The rearrangement and Chebyshev inequalities</i>	54
2.5. Chuỗi trung bình và bất đẳng thức Bernoulli — <i>The chain of means and Bernoulli's inequality</i>	58
2.6. Trị tuyệt đối, bất đẳng thức tam giác và dạng căn Minkowski — <i>Absolute values, the triangle inequality and Minkowski's form</i>	61
2.7. Bất đẳng thức Nesbitt và bài toán cực trị có điều kiện — <i>Nesbitt's inequality and constrained extremum problems</i>	63
2.8. Kỹ thuật tách – ghép và các bổ đề nhỏ — <i>Splitting, pairing and small lemmas</i>	68
2.9. Bảng chiến lược chọn công cụ — <i>Strategy table: choosing the tool</i>	70
2.10. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	73
2.11. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	74
Chương 3. Kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức nâng cao — Chapter 3. Advanced techniques for inequalities	79
3.1. Thuần nhất hóa và chuẩn hóa — <i>Homogenisation and normalisation</i>	79
3.2. Bất đẳng thức Schur — <i>Schur's inequality</i>	82
3.3. Phương pháp SOS (tổng các bình phương) — <i>The SOS method (sums of squares)</i> ...	84
3.4. Phương pháp tiếp tuyến — <i>The tangent-line method</i>	86

3.5. Dồn biến về hai biến bằng nhau — <i>Mixing variables</i>	89
3.6. Đổi biến p, q, r — <i>The p, q, r substitution</i>	91
3.7. Đổi biến Ravi cho cạnh tam giác — <i>The Ravi substitution</i>	95
3.8. Hàm lồi và bất đẳng thức Jensen rời rạc — <i>Convex functions and discrete Jensen</i> ...	98
3.9. Bảng dấu hiệu và kỹ thuật — <i>Signs and techniques at a glance</i>	101
3.10. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	104
3.11. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	105

Chương 4. Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình — Chapter 4.

<i>Equations, inequations and systems</i>	112
4.1. Hàm số bậc hai và dấu của tam thức bậc hai — <i>The quadratic function and the sign of a quadratic trinomial</i>	112
4.2. Định lý Viète và so sánh nghiệm với một số α — <i>Viète's theorem and comparing roots with a number α</i>	115
4.3. Phương trình vô tỉ — <i>Irrational equations</i>	119
4.4. Phương trình bậc cao: đối xứng, hồi quy và đặt ẩn — <i>Higher-degree equations: symmetric, reciprocal and grouped substitution</i>	123
4.5. Hệ phương trình: đối xứng, đẳng cấp, bậc nhất ba ẩn — <i>Systems: symmetric, homogeneous, linear in three unknowns</i>	126
4.6. Hàm đơn điệu và phương trình $f(u) = f(v)$ — <i>Monotone functions and the equation $f(u) = f(v)$</i>	130
4.7. Bất phương trình vô tỉ — <i>Irrational inequations</i>	134
4.8. Bảng chiến lược — <i>Strategy table</i>	135
4.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	138
4.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	139

Chương 5. Phương trình hàm, đa thức và dãy số — Chapter 5. Functional equations, polynomials and sequences

5.1. Phương trình hàm và nguyên tắc hai pha — <i>Functional equations and the two-phase principle</i>	145
5.2. Hàm cộng tính và phương trình Cauchy — <i>Additive functions and Cauchy's equation</i>	148
5.3. Đơn ánh, toàn ánh và điểm bất động — <i>Injectivity, surjectivity and fixed points</i>	151
5.4. Đa thức: phép chia, định lý Bézout và nghiệm — <i>Polynomials: division, Bézout's theorem and roots</i>	155
5.5. Đa thức hệ số nguyên và nội suy Lagrange — <i>Integer polynomials and Lagrange interpolation</i>	160
5.6. Dãy số truy hồi tuyến tính — <i>Linear recurrence sequences</i>	163
5.7. Dãy tuần hoàn, tổng sai phân và dãy nguyên — <i>Periodic sequences, telescoping sums and integer sequences</i>	165
5.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>Strategy table and glossary</i>	169
5.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	172
5.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	173

Chương 6. Chia hết, ước chung lớn nhất và số nguyên tố — Chapter 6. Divisibility, gcd and primes.....	180
6.1. Chia hết và phép chia có dư — <i>Divisibility and division with remainder</i>	180
6.2. Ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất và thuật toán Euclid — <i>Greatest common divisor, least common multiple and the Euclidean algorithm</i>	182
6.3. Định lý Bézout và bổ đề Euclid — <i>Bézout's theorem and Euclid's lemma</i>	185
6.4. Số nguyên tố và định lý cơ bản của số học — <i>Primes and the fundamental theorem of arithmetic</i>	191
6.5. Số mũ p-adic và công thức Legendre — <i>The p-adic valuation and Legendre's formula</i>	194
6.6. Số ước, tổng ước và số hoàn hảo — <i>Number of divisors, sum of divisors and perfect numbers</i>	197
6.7. Số chính phương và phép thử bằng số dư — <i>Perfect squares and tests by remainders</i>	200
6.8. Hằng đẳng thức và tính chia hết của $a^n \pm b^n$ — <i>Identities and divisibility of $a^n \pm b^n$</i>	203
6.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	208
6.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	209
Chương 7. Đồng dư và các định lý Fermat, Euler, Wilson — Chapter 7. Congruences; Fermat, Euler and Wilson theorems.....	216
7.1. Đồng dư và các tính chất cơ bản — <i>Congruences and their basic properties</i>	216
7.2. Nghịch đảo modulo m và phương trình đồng dư bậc nhất — <i>Inverses modulo m and linear congruences</i>	218
7.3. Định lý số dư Trung Hoa — <i>The Chinese remainder theorem</i>	221
7.4. Hàm φ , các định lý Euler, Fermat và Wilson — <i>The function φ and the theorems of Euler, Fermat and Wilson</i>	224
7.5. Cấp của một số modulo n — <i>The order of a number modulo n</i>	231
7.6. Thặng dư bình phương sơ cấp và số nguyên tố dạng $4k + 1$ — <i>Elementary quadratic residues and primes of the form $4k + 1$</i>	234
7.7. Bổ đề nâng số mũ (LTE) — <i>The lifting-the-exponent lemma (LTE)</i>	236
7.8. Chữ số tận cùng, lũy thừa tầng và bảng chiến lược — <i>Last digits, tower powers and a strategy table</i>	238
7.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	243
7.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	244
Chương 8. Phương trình nghiệm nguyên và phần nguyên — Chapter 8. Diophantine equations and the floor function.....	249
8.1. Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ — <i>The linear equation $ax + by = c$</i>	249
8.2. Phân tích thành nhân tử — <i>Factorisation</i>	252
8.3. Đánh giá, kẹp giữa hai số chính phương liên tiếp — <i>Estimation: squeezing between consecutive squares</i>	254
8.4. Xét đồng dư để chứng minh vô nghiệm — <i>Residues as an obstruction</i>	257
8.5. Lùi vô hạn, bước nhảy Vieta và nguyên lý cực hạn — <i>Infinite descent, Vieta jumping and the extremal principle</i>	260

8.6. Bộ ba Pythagore — <i>Pythagorean triples</i>	262
8.7. Phương trình Pell — <i>The Pell equation</i>	266
8.8. Phần nguyên và phần lẻ — <i>The floor function and the fractional part</i>	270
8.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	278
8.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	280
Chương 9. Phép đếm nâng cao, nhị thức Newton và xác suất — Chapter 9. Advanced counting, binomial theorem and probability	287
9.1. Quy tắc cộng, quy tắc nhân và các cấu hình cơ bản — <i>The sum and product rules and the basic configurations</i>	287
9.2. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp và phương pháp sao – vạch — <i>Permutations with repetition, multisets and stars and bars</i>	290
9.3. Song ánh trong phép đếm — <i>Bijections in counting</i>	293
9.4. Bao hàm – loại trừ và hoán vị không điểm bất động — <i>Inclusion–exclusion and derangements</i>	294
9.5. Đếm bằng hai cách và các đẳng thức tổ hợp — <i>Double counting and combinatorial identities</i>	297
9.6. Nhị thức Newton — <i>The binomial theorem</i>	299
9.7. Hệ thức truy hồi, dãy Fibonacci và số Catalan — <i>Recurrences, Fibonacci numbers and Catalan numbers</i>	302
9.8. Xác suất cổ điển — <i>Classical probability</i>	306
9.9. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>Strategy table and glossary</i>	308
9.10. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	311
9.11. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	312
Chương 10. Nguyên lý Dirichlet, bất biến và cực hạn — Chapter 10. Pigeonhole principle, invariants and extremal principle	319
10.1. Nguyên lý Dirichlet cơ bản và tổng quát — <i>The pigeonhole principle: basic and general forms</i>	319
10.2. Nguyên lý Dirichlet trong hình học — <i>The pigeonhole principle in geometry</i>	323
10.3. Nguyên lý Dirichlet trong số học — <i>The pigeonhole principle in arithmetic</i>	327
10.4. Dãy con đơn điệu: định lý Erdős–Szekeres — <i>Monotone subsequences: the Erdős–Szekeres theorem</i>	330
10.5. Bất biến và đơn biến — <i>Invariants and monovariants</i>	333
10.6. Nguyên lý cực hạn — <i>The extremal principle</i>	337
10.7. Tô màu bàn cờ và phủ hình — <i>Colouring boards and tilings</i>	339
10.8. Bảng chiến lược — <i>Strategy table</i>	345
10.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	348
10.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	349
Chương 11. Đồ thị, tô màu và trò chơi — Chapter 11. Graphs, colourings and games	357
11.1. Đồ thị, bậc của đỉnh và bổ đề bắt tay — <i>Graphs, degrees and the handshake lemma</i>	357
11.2. Đường đi, chu trình, liên thông và cây — <i>Paths, cycles, connectivity and trees</i>	360
11.3. Tô màu đỉnh và đồ thị hai phía — <i>Vertex colouring and bipartite graphs</i>	366

11.4. Chu trình Euler — <i>Euler circuits</i>	369
11.5. Bài toán quen biết, Ramsey $R(3,3) = 6$ và định lý Mantel — <i>Acquaintance problems, Ramsey $R(3,3) = 6$ and Mantel's theorem</i>	372
11.6. Trò chơi hai người: vị trí thắng, vị trí thua — <i>Two-player games: winning and losing positions</i>	376
11.7. Trò chơi Nim và tổng XOR — <i>The game of Nim and the XOR sum</i>	382
11.8. Bài toán thuật toán: tồn tại cách làm và số bước tối thiểu — <i>Algorithmic problems: existence and the least number of steps</i>	386
11.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	392
11.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	394

Chương 12. Vector và hệ thức lượng trong tam giác — Chapter 12. Vectors and metric relations in triangles..... 401

12.1. Vector, tích vô hướng và định lý cos — <i>12.1. Vectors, the dot product and the cosine rule</i>	401
12.2. Tâm tỉ cự và hệ thức Leibniz — <i>12.2. Barycentres and Leibniz's relation</i>	403
12.3. Trục tâm, tâm ngoại tiếp và đường thẳng Euler — <i>12.3. Orthocentre, circumcentre and the Euler line</i>	406
12.4. Định lý sin, trung tuyến, phân giác và công thức Stewart — <i>12.4. Sine rule, medians, bisectors and Stewart's theorem</i>	409
12.5. Diện tích, bán kính nội tiếp, ngoại tiếp và hệ thức Euler — <i>12.5. Area, inradius, circumradius and Euler's relation</i>	415
12.6. Định lý Menelaus và định lý Ceva — <i>12.6. The theorems of Menelaus and Ceva</i>	422
12.7. Nhận dạng tam giác bằng hệ thức lượng — <i>12.7. Identifying a triangle from metric relations</i>	429
12.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>12.8. Strategy table and glossary</i>	431
12.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	433
12.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	434

Chương 13. Đường tròn: góc, phương tích, tứ giác nội tiếp — Chapter 13. Circles: angles, power of a point, cyclic quadrilaterals 441

13.1. Góc nội tiếp, góc giữa tiếp tuyến và dây, cung chứa góc — <i>Inscribed angles, the tangent–chord angle and the arc of a given angle</i>	441
13.2. Tứ giác nội tiếp và góc định hướng — <i>Cyclic quadrilaterals and directed angles</i>	446
13.3. Phương tích, trục đẳng phương và tâm đẳng phương — <i>Power of a point, radical axis and radical centre</i>	453
13.4. Định lý Ptolemy — <i>Ptolemy's theorem</i>	460
13.5. Đường thẳng Simson và đường tròn chín điểm — <i>The Simson line and the nine-point circle</i>	464
13.6. Định lý Miquel — <i>Miquel's theorem</i>	470
13.7. Đường tròn nội tiếp, bàng tiếp và bổ đề đỉnh ba — <i>Incircles, excircles and the incentre–excentre lemma</i>	473
13.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>Strategy table and glossary</i>	481
13.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	484
13.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	486

Chương 14. Phương pháp tọa độ, ba đường conic và cực trị hình học — Chapter 14.	
<i>Coordinate methods, conics and geometric extremes</i>	492
14.1. Đường thẳng, khoảng cách và diện tích trong tọa độ — <i>Lines, distances and areas in coordinates</i>	492
14.2. Đường tròn: tiếp tuyến và trục đẳng phương — <i>Circles: tangents and the radical axis</i>	495
14.3. Tọa độ hóa bài hình học — <i>Setting up coordinates for geometry problems</i>	497
14.4. Elip — <i>The ellipse</i>	501
14.5. Hyperbol — <i>The hyperbola</i>	506
14.6. Parabol — <i>The parabola</i>	509
14.7. Cực trị hình học — <i>Geometric extremum problems</i>	514
14.8. Các tính chất bổ sung của elip và hyperbol — <i>Further properties of the ellipse and the hyperbola</i>	520
14.9. Bảng tổng hợp ba conic — <i>Summary of the three conics</i>	523
14.10. Bảng chiến lược — <i>Strategy table</i>	523
14.11. Bảng thuật ngữ — <i>Glossary</i>	525
14.12. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	526
14.13. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	528
Phụ lục A. Ba đề luyện thi tự soạn — Appendix A. Three original practice papers	534
A.1. Đề số 1 — mức học sinh giỏi cấp tỉnh — <i>Paper 1 — provincial level</i>	534
A.2. Lời giải và thang điểm đề số 1 — <i>Solutions and marking scheme for Paper 1</i>	535
A.3. Đề số 2 — mức quốc gia — <i>Paper 2 — national level</i>	540
A.4. Lời giải và thang điểm đề số 2 — <i>Solutions and marking scheme for Paper 2</i>	542
A.5. Đề số 3 — mức quốc tế — <i>Paper 3 — international level</i>	550
A.6. Lời giải và thang điểm đề số 3 — <i>Solutions and marking scheme for Paper 3</i>	552
Phụ lục B. Tra cứu định lý và kết quả có tên — Appendix B. Index of named theorems and results	562
B.1. Bảng tra theo chương — <i>B.1. Index by chapter</i>	562
Phụ lục C. Thuật ngữ Việt – Anh — Appendix C. Vietnamese – English glossary	580
C.1. Bảng tra từ A đến Z — <i>C.1. A to Z index</i>	580
Phụ lục D. Tài liệu đọc thêm — Appendix D. Further reading	591
D.1. Sách tiếng Anh và sách giáo khoa — <i>D.1. Books in English and textbooks</i>	591

Chương 1. Mệnh đề, tập hợp và các phương pháp chứng minh

— Chapter 1. Logic, sets and methods of proof

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Lập phủ định chính xác của mệnh đề có lượng từ $\forall$, $\exists$ và phân biệt điều kiện cần với điều kiện đủ.
Negate statements with the quantifiers $\forall$ and $\exists$ exactly, and tell necessary conditions from sufficient ones.
- Đếm phần tử của hợp ba tập bằng bao hàm – loại trừ; nhận ra đơn ánh, toàn ánh, song ánh và dùng chúng để đếm.
Count the elements of a union of three sets by inclusion–exclusion; recognise injections, surjections and bijections and use them to count.
- Chọn đúng một trong năm cách chứng minh: trực tiếp, phản đảo, phản chứng, phản ví dụ, quy nạp.
Choose the right one of five methods of proof: direct, contrapositive, contradiction, counterexample, induction.
- Dùng quy nạp thường, quy nạp mạnh, quy nạp Cauchy và nguyên lý sắp thứ tự tốt, với bước cơ sở viết đủ.
Use ordinary, strong and Cauchy induction and the well-ordering principle, with the base cases written out in full.
- Viết lời giải theo cấu trúc mà giám khảo chấm đủ điểm: giả thiết, kế hoạch, từng bước có lý do, kết luận.
Write a solution in the structure that earns full marks: hypotheses, plan, each step with its reason, conclusion.

1.1. Mệnh đề và lượng từ — Statements and quantifiers

Bài chứng minh được chấm từng câu, nên mỗi câu trong lời giải phải là một khẳng định đúng hoặc sai rõ ràng.

A proof is marked sentence by sentence, so every sentence in a solution must be a claim that is definitely true or definitely false.

ĐỊNH NGHĨA 1.1 (Mệnh đề) / DEFINITION 1.1 (Statement) — Mệnh đề là một câu khẳng định có giá trị chân lý xác định: đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai. Câu chứa biến, như “ n là số chẵn”, chưa là mệnh đề; nó trở thành mệnh đề khi gán giá trị cho biến hoặc gán lượng từ. Phủ định của P ký hiệu $\neg P$: $\neg P$ đúng khi P sai và ngược lại. Hợp $P \vee Q$ đúng khi ít nhất một trong hai đúng; hội $P \wedge Q$ đúng khi cả hai đúng.

A statement is a declarative sentence with a definite truth value: true or false, never both. A sentence with a free variable, such as “ n is even”, is not yet a statement; it becomes one once the variable is given a value or bound by a quantifier. The negation $\neg P$ is true exactly when P is false. The disjunction $P \vee Q$ is true when at least one of the two is true; the conjunction $P \wedge Q$ is true when both are.

ĐỊNH NGHĨA 1.2 (Lượng từ) / DEFINITION 1.2 (Quantifier) — Lượng từ “với mọi” $\forall$ và “tồn tại” $\exists$. Mệnh đề $\forall x \in X: P(x)$ đúng khi $P(x)$ đúng với mọi phần tử x của X . Mệnh đề

$\exists x \in X: P(x)$ đúng khi có ít nhất một phần tử x của X làm $P(x)$ đúng.

The quantifiers “for all” $\forall$ and “there exists” $\exists$. The statement $\forall x \in X: P(x)$ is true when $P(x)$ holds for every element x of X . The statement $\exists x \in X: P(x)$ is true when at least one element x of X makes $P(x)$ true.

ĐỊNH LÝ 1.3 (Phủ định lượng từ) / THEOREM 1.3 (Negation of quantifiers) — Phủ

định đổi $\forall$ thành $\exists$, đổi $\exists$ thành $\forall$, rồi phủ định phần còn lại:

$\neg(\forall x \in X: P(x))$ là $\exists x \in X: \neg P(x)$; $\neg(\exists x \in X: P(x))$ là $\forall x \in X: \neg P(x)$.

Với hai mệnh đề: $\neg(P \vee Q)$ là $(\neg P) \wedge (\neg Q)$; $\neg(P \wedge Q)$ là $(\neg P) \vee (\neg Q)$.

Negation turns $\forall$ into $\exists$ and $\exists$ into $\forall$, then negates what remains:

$\neg(\forall x \in X: P(x))$ is $\exists x \in X: \neg P(x)$; $\neg(\exists x \in X: P(x))$ is $\forall x \in X: \neg P(x)$.

For two statements: $\neg(P \vee Q)$ is $(\neg P) \wedge (\neg Q)$; $\neg(P \wedge Q)$ is $(\neg P) \vee (\neg Q)$.

Chứng minh. / Proof.

Mệnh đề $\forall x: P(x)$ sai khi và chỉ khi không phải mọi x đều thỏa P , tức là có ít nhất một x không thỏa P . Đó chính là $\exists x: \neg P(x)$.

The statement $\forall x: P(x)$ is false exactly when not every x satisfies P , that is, when at least one x fails P . That is precisely $\exists x: \neg P(x)$.

Mệnh đề $\exists x: P(x)$ sai khi và chỉ khi không có x nào thỏa P , tức là mọi x đều không thỏa P : $\forall x: \neg P(x)$.

The statement $\exists x: P(x)$ is false exactly when no x satisfies P , that is, every x fails P : $\forall x: \neg P(x)$.

$P \vee Q$ sai khi và chỉ khi cả P lẫn Q cùng sai, tức $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ đúng. $P \wedge Q$ sai khi và chỉ khi ít nhất một trong hai sai, tức $(\neg P) \vee (\neg Q)$ đúng.

$P \vee Q$ is false exactly when both P and Q are false, that is, $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ is true. $P \wedge Q$ is false exactly when at least one of them is false, that is, $(\neg P) \vee (\neg Q)$ is true. ■

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Phủ định của “với mọi x , $P(x)$ ” là “tồn tại x , không $P(x)$ ”; để bác bỏ một khẳng định “với mọi” chỉ cần một phản ví dụ.

The negation of “for all x , $P(x)$ ” is “there is an x with not $P(x)$ ”; one counterexample is enough to refute a “for all” claim.

VÍ DỤ 1.1 (Thứ tự lượng từ) / EXAMPLE 1.1 (Order of quantifiers) — Xét hai mệnh đề

P : “với mọi số thực $y \neq 0$ tồn tại số thực x sao cho $y^2 + xy + 1 = 0$ ” và Q : “tồn tại số thực x sao cho với mọi số thực $y \neq 0$ ta có $y^2 + xy + 1 = 0$ ”. Viết phủ định của P và của Q , rồi xác định giá trị đúng – sai của cả bốn mệnh đề.

Consider P : “for every real $y \neq 0$ there is a real x with $y^2 + xy + 1 = 0$ ” and Q : “there is a real x such that $y^2 + xy + 1 = 0$ for every real $y \neq 0$ ”. Write the negations of P and Q , then decide the truth value of all four statements.

Lời giải. / Solution.

Phủ định theo Định lý 1.3. $\neg P$: tồn tại $y \neq 0$ sao cho với mọi x , $y^2 + xy + 1 \neq 0$. $\neg Q$: với mọi x tồn tại $y \neq 0$ sao cho $y^2 + xy + 1 \neq 0$.

Negations by Theorem 1.3. $\neg P$: there is $y \neq 0$ such that $y^2 + xy + 1 \neq 0$ for every x . $\neg Q$: for every x there is $y \neq 0$ with $y^2 + xy + 1 \neq 0$.

P đúng: với $y \neq 0$ cho trước, chọn $x = -(y^2 + 1)/y$ thì $y^2 + xy + 1 = y^2 - (y^2 + 1) + 1 = 0$. Do đó $\neg P$ sai.

P is true: for a given $y \neq 0$ take $x = -(y^2 + 1)/y$; then $y^2 + xy + 1 = y^2 - (y^2 + 1) + 1 = 0$. Hence $\neg P$ is false.

Q sai: nếu một x thỏa mãn thì $y = 1$ cho $x = -2$, còn $y = 2$ cho $5 + 2x = 0$, tức $x = -5/2$; hai giá trị này khác nhau. Vậy không có x chung, Q sai và $\neg Q$ đúng.

Q is false: if one x worked, then $y = 1$ would force $x = -2$, while $y = 2$ gives $5 + 2x = 0$, so $x = -5/2$; the two values differ. So no common x exists, Q is false and $\neg Q$ is true.

Vậy P đúng, Q sai, $\neg P$ sai, $\neg Q$ đúng. Hai mệnh đề P và Q chỉ khác thứ tự lượng từ nhưng khác giá trị chân lý.

Hence P is true, Q is false, $\neg P$ is false, $\neg Q$ is true. P and Q differ only in the order of the quantifiers, yet have different truth values. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Đổi chỗ $\forall$ và $\exists$ làm đổi nghĩa mệnh đề. “ $\forall y \exists x$ ” cho phép x phụ thuộc y ; “ $\exists x \forall y$ ” đòi một x dùng chung cho mọi y . Khi x phụ thuộc y , hãy viết $x = x(y)$ để thấy rõ.

Swapping $\forall$ and $\exists$ changes the meaning. “ $\forall y \exists x$ ” lets x depend on y ; “ $\exists x \forall y$ ” demands one x serving every y . When x depends on y , write $x = x(y)$ to make this visible.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Phủ định “mọi học sinh trong đội đều giải được bài 1” thành “mọi học sinh trong đội đều không giải được bài 1”. Phủ định đúng là “có một học sinh không giải được bài 1”.

Negating “every member of the squad solved problem 1” as “every member failed problem 1”. The correct negation is “some member did not solve problem 1”.

1.2. Kéo theo, điều kiện cần và đủ, mệnh đề đảo và phản đảo — Implication, necessary and sufficient conditions, converse and contrapositive

ĐỊNH NGHĨA 1.4 (Kéo theo, đảo, phản đảo) / DEFINITION 1.4 (Implication, converse, contrapositive) — Mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ (“nếu P thì Q ”) sai duy nhất khi P đúng còn Q sai. Với $P \Rightarrow Q$ cho trước: mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$; mệnh đề phản đảo là $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$. $P \Leftrightarrow Q$ nghĩa là cả $P \Rightarrow Q$ lẫn $Q \Rightarrow P$ đúng. Khi $P \Rightarrow Q$ đúng, P là điều kiện đủ của Q và Q là điều kiện cần của P .

The implication $P \Rightarrow Q$ (“if P then Q ”) is false only when P is true and Q is false. For a given $P \Rightarrow Q$, the converse is $Q \Rightarrow P$ and the contrapositive is $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$. $P \Leftrightarrow Q$ means that both $P \Rightarrow Q$ and $Q \Rightarrow P$ hold. When $P \Rightarrow Q$ is true, P is a sufficient condition for Q and Q is a necessary condition for P .

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$ (đảo) $Q \Rightarrow P$ (converse)	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ (phản đảo) $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ (contrapositive)
Đ T	Đ T	Đ T	Đ T	Đ T
Đ T	S F	S F	Đ T	S F

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$ (đảo) $Q \Rightarrow P$ (converse)	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ (phản đảo) $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ (contrapositive)
S F	Đ T	Đ T	S F	Đ T
S F	S F	Đ T	Đ T	Đ T

ĐỊNH LÝ 1.5 (Phản đảo tương đương) / THEOREM 1.5 (Contrapositive equivalence)

— Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề phản đảo $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ luôn có cùng giá trị chân lý. Mệnh đề đảo $Q \Rightarrow P$ thì không bị ràng buộc bởi $P \Rightarrow Q$.

The statement $P \Rightarrow Q$ and its contrapositive $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ always have the same truth value. The converse $Q \Rightarrow P$ is not tied to $P \Rightarrow Q$.

Chứng minh. / Proof.

$P \Rightarrow Q$ sai khi và chỉ khi P đúng và Q sai. $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ sai khi và chỉ khi $\neg Q$ đúng và $\neg P$ sai, tức là Q sai và P đúng. Hai điều kiện giống nhau, nên hai mệnh đề cùng đúng hoặc cùng sai.

$P \Rightarrow Q$ is false exactly when P is true and Q is false. $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ is false exactly when $\neg Q$ is true and $\neg P$ is false, that is, Q is false and P is true. The two conditions coincide, so the two statements are true together or false together.

Với mệnh đề đảo: lấy P : “ $x = 2$ ”, Q : “ $x^2 = 4$ ”. $P \Rightarrow Q$ đúng nhưng $Q \Rightarrow P$ sai ($x = -2$).

For the converse: take P : “ $x = 2$ ” and Q : “ $x^2 = 4$ ”. Then $P \Rightarrow Q$ is true but $Q \Rightarrow P$ is false ($x = -2$). ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề hỏi “tìm điều kiện cần và đủ” thì phải làm đủ hai chiều.

Với số nguyên, chiều thuận thường dùng tính chất của số nguyên tố, chiều đảo thường là phép tính trực tiếp.

A problem asking for a “necessary and sufficient condition” needs both directions. For integers the forward direction usually uses a property of primes and the reverse is usually a direct computation.

VÍ DỤ 1.2 (Điều kiện cần và đủ) / EXAMPLE 1.2 (Necessary and sufficient condition) —

Cho số nguyên n . Chứng minh rằng 12 chia hết n^2 khi và chỉ khi 6 chia hết n . Từ đó cho biết “ $6 \mid n$ ” là điều kiện gì của “ $12 \mid n^2$ ”, và nêu mệnh đề đảo của “ $12 \mid n^2 \Rightarrow 12 \mid n$ ” có đúng không.

Let n be an integer. Prove that 12 divides n^2 if and only if 6 divides n . Hence say what kind of condition “ $6 \mid n$ ” is for “ $12 \mid n^2$ ”, and decide whether “ $12 \mid n^2 \Rightarrow 12 \mid n$ ” is true.

Lời giải. / Solution.

1. Chiều thuận. Giả sử $12 \mid n^2$. Vì $4 \mid n^2$: nếu n lẻ thì n^2 lẻ, vô lý; nên n chẵn. Vì $3 \mid n^2$ và 3 nguyên tố, theo bổ đề Euclid $3 \mid n$.

Forward direction. Suppose $12 \mid n^2$. Since $4 \mid n^2$: if n were odd then n^2 would be odd, absurd; so n is even. Since $3 \mid n^2$ and 3 is prime, Euclid’s lemma gives $3 \mid n$.

2. n chẵn và $3 \mid n$, mà 2 và 3 nguyên tố cùng nhau, nên $6 \mid n$.

n is even and $3 \mid n$, and 2 and 3 are coprime, so $6 \mid n$.

3. Chiều đảo. Nếu $n = 6m$ thì $n^2 = 36m^2 = 12 \cdot 3m^2$, chia hết cho 12.

Reverse direction. If $n = 6m$ then $n^2 = 36m^2 = 12 \cdot 3m^2$, which is divisible by 12.

Vậy $12 \mid n^2 \Leftrightarrow 6 \mid n$, nên $6 \mid n$ là điều kiện cần và đủ. Mệnh đề “ $12 \mid n^2 \Rightarrow 12 \mid n$ ” sai: $n = 6$ cho $n^2 = 36$ chia hết cho 12 nhưng $12 \nmid 6$.

Hence $12 \mid n^2 \Leftrightarrow 6 \mid n$, so $6 \mid n$ is a necessary and sufficient condition. The statement “ $12 \mid n^2 \Rightarrow 12 \mid n$ ” is false: $n = 6$ gives $n^2 = 36$, divisible by 12, but $12 \nmid 6$. ■

VÍ DỤ 1.3 (Phản ví dụ) / EXAMPLE 1.3 (Counterexample) — Bác bỏ ba khẳng định bằng phản ví dụ: (a) $n^2 + n + 17$ là số nguyên tố với mọi số tự nhiên n ; (b) nếu $6 \mid ab$ thì $6 \mid a$ hoặc $6 \mid b$; (c) nếu $a^2 > b^2$ thì $a > b$.

Refute each of the three claims with a counterexample: (a) $n^2 + n + 17$ is prime for every natural number n ; (b) if $6 \mid ab$ then $6 \mid a$ or $6 \mid b$; (c) if $a^2 > b^2$ then $a > b$.

Lời giải. / Solution.

1. (a) Với $n = 16$: $16^2 + 16 + 17 = 289 = 17^2$, hợp số. Các giá trị $n = 0, 1, \dots, 15$ đều cho số nguyên tố nên phản ví dụ nhỏ nhất là $n = 16$.

(a) For $n = 16$: $16^2 + 16 + 17 = 289 = 17^2$, composite. The values $n = 0, 1, \dots, 15$ all give primes, so the smallest counterexample is $n = 16$.

2. (b) Với $a = 2, b = 3$: $ab = 6$ chia hết cho 6, nhưng $6 \nmid 2$ và $6 \nmid 3$.

(b) With $a = 2, b = 3$: $ab = 6$ is divisible by 6, but $6 \nmid 2$ and $6 \nmid 3$.

3. (c) Với $a = -3, b = 1$: $a^2 = 9 > 1 = b^2$ nhưng $a < b$.

(c) With $a = -3, b = 1$: $a^2 = 9 > 1 = b^2$ but $a < b$.

Vậy cả ba khẳng định đều sai.

Hence all three claims are false. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Một chuỗi giá trị đầu đúng không chứng minh được gì: $n^2 + n + 17$ nguyên tố 16 lần liên tiếp rồi mới sập. Quy nạp không đầy đủ là nguồn của nhiều “định lý” sai.

A run of true initial values proves nothing: $n^2 + n + 17$ is prime sixteen times in a row and then fails. Incomplete induction is the source of many false “theorems”.

NHẬN XÉT / REMARK — Khi nghi ngờ một khẳng định “với mọi”, thử trước các giá trị biên và các giá trị suy biến (0, 1, số âm, hai biến bằng nhau, hai biến chênh lệch cực lớn).

When a “for all” claim looks doubtful, try the boundary and degenerate values first (0, 1, negatives, equal variables, wildly different variables).

1.3. Tập hợp, phép toán và lực lượng — Sets, operations and cardinality

ĐỊNH NGHĨA 1.6 (Phép toán tập hợp) / DEFINITION 1.6 (Set operations) — Với hai tập A, B : hợp $A \cup B$ gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B ; giao $A \cap B$ gồm các phần tử thuộc cả hai; hiệu $A \setminus B$ gồm các phần tử thuộc A mà không thuộc B ; $A \subset B$ nghĩa là mọi phần tử của A thuộc B . Trong tập nền X , phần bù của A là $A^c = X \setminus A$. Số phần tử của tập hữu hạn A (lực lượng) ký hiệu $|A|$. Hai tập bằng nhau khi mỗi tập là con của tập kia: để chứng minh $A = B$ ta chứng minh $x \in A \Rightarrow x \in B$ và $x \in B \Rightarrow x \in A$.

For sets A, B : the union $A \cup B$ consists of elements in A or in B ; the intersection $A \cap B$ of elements in

both; the difference $A \setminus B$ of elements in A but not in B ; $A \subset B$ means every element of A lies in B . Inside a universe X the complement of A is $A^c = X \setminus A$. The number of elements (cardinality) of a finite set A is written $|A|$. Two sets are equal when each is a subset of the other: to prove $A = B$ show $x \in A \Rightarrow x \in B$ and $x \in B \Rightarrow x \in A$.

ĐỊNH LÝ 1.7 (Công thức De Morgan) / THEOREM 1.7 (De Morgan's laws) — Với các tập A, B, C trong tập nền X : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ và $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Ngoài ra $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

For sets A, B, C in a universe X : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ and $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Also $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Chứng minh. / Proof.

Lấy $x \in X$. $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow$ không $(x \in A$ hoặc $x \in B) \Leftrightarrow x \notin A$ và $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$. Đây là phủ định của “hoặc” theo Định lý 1.3.

Take $x \in X$. $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow$ not $(x \in A$ or $x \in B) \Leftrightarrow x \notin A$ and $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$. This is the negation of “or” from Theorem 1.3.

Công thức thứ hai: $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow$ không $(x \in A$ và $x \in B) \Leftrightarrow x \notin A$ hoặc $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$.

Second law: $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow$ not $(x \in A$ and $x \in B) \Leftrightarrow x \notin A$ or $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$.

Phân phối: $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ và $(x \in B$ hoặc $x \in C) \Leftrightarrow (x \in A$ và $x \in B)$ hoặc $(x \in A$ và $x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Distributivity: $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ and $(x \in B$ or $x \in C) \Leftrightarrow (x \in A$ and $x \in B)$ or $(x \in A$ and $x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. ■

ĐỊNH LÝ 1.8 (Bao hàm – loại trừ hai tập) / THEOREM 1.8 (Inclusion–exclusion for two sets) — Với hai tập hữu hạn A, B : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

For finite sets A and B : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (1.1)$$

Chứng minh. / Proof.

Hợp $A \cup B$ là hợp rời của ba tập $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$. Do đó $|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$.

$A \cup B$ is the disjoint union of the three sets $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$. Hence $|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$.

Mặt khác $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$ và $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$. Cộng hai đẳng thức: $|A| + |B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + 2|A \cap B|$.

Also $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$ and $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$. Adding: $|A| + |B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + 2|A \cap B|$.

Trừ $|A \cap B|$ hai vế được $|A| + |B| - |A \cap B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| = |A \cup B|$.

Subtracting $|A \cap B|$ from both sides gives $|A| + |B| - |A \cap B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| = |A \cup B|$. ■

ĐỊNH LÝ 1.9 (Bao hàm – loại trừ ba tập) / THEOREM 1.9 (Inclusion–exclusion for three sets) — Với ba tập hữu hạn A, B, C :

For three finite sets A, B, C :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \quad (1.2)$$

Chứng minh. / Proof.

Áp dụng Định lý 1.8 cho hai tập $A \cup B$ và C :

Apply Theorem 1.8 to the two sets $A \cup B$ and C :

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

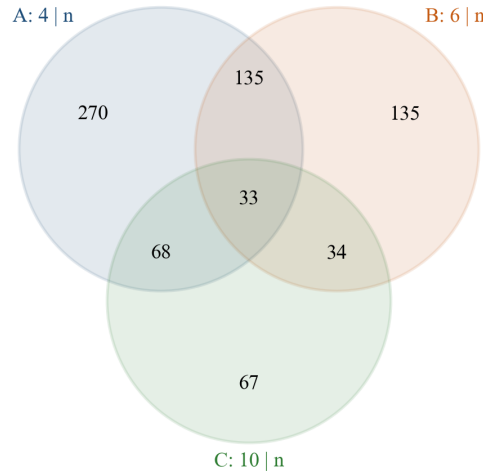
Theo Định lý 1.8, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Theo tính phân phối (Định lý 1.7), $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, nên áp dụng Định lý 1.8 lần nữa:

By Theorem 1.8, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. By distributivity (Theorem 1.7), $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, so Theorem 1.8 once more gives:

$$|(A \cup B) \cap C| = |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Giao của $A \cap C$ và $B \cap C$ là $A \cap B \cap C$. Thay hai kết quả vào dòng đầu được công thức (1.2).

The intersection of $A \cap C$ and $B \cap C$ is $A \cap B \cap C$. Substituting both results into the first line gives (1.2). ■



Hình 1.1. Số phần tử mỗi vùng khi A, B, C là các bội của 4, 6, 10 trong tập $\{1, \dots, 2024\}$; ngoài ba hình tròn có 1282 số.

Figure 1.1. Number of elements in each region when A, B, C are the multiples of 4, 6, 10 in $\{1, \dots, 2024\}$; outside the three discs lie 1282 numbers.

Hai sự kiện về bội dùng trong cả chương: trong $\{1, \dots, N\}$ có $\lfloor N/m \rfloor$ bội của m , và số vừa chia hết cho m vừa chia hết cho l là bội của $\text{lcm}(m, l)$.

Two facts about multiples are used throughout: $\{1, \dots, N\}$ contains $\lfloor N/m \rfloor$ multiples of m , and a number divisible by both m and l is a multiple of $\text{lcm}(m, l)$.

$$|\{n \leq N : m \mid n\}| = \lfloor N/m \rfloor, |\{n \leq N : m \mid n \text{ và } l \mid n\}| = \lfloor N/\text{BCNN}(m, l) \rfloor \quad (1.3)$$

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề hỏi “ít nhất một trong ba” nên nghĩ ngay tới hợp ba tập. Mỗi tập là tập các bội của một số, còn giao của các tập là tập bội của BCNN: $A \cap B$ là bội của 12, $A \cap C$ bội của 20, $B \cap C$ bội của 30, $A \cap B \cap C$ bội của 60. Mỗi lực lượng là một phần nguyên của phép chia.

“At least one of three” points straight to a union of three sets. Each set is the set of multiples of a number, and intersections are multiples of the lcm: $A \cap B$ are multiples of 12, $A \cap C$ of 20, $B \cap C$ of 30, $A \cap B \cap C$ of 60. Each cardinality is the integer part of a quotient.

VÍ DỤ 1.4 (Bao hàm – loại trừ) / EXAMPLE 1.4 (Inclusion–exclusion) — Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá 2024 chia hết cho ít nhất một trong các số 4, 6, 10? Có bao nhiêu số trong đó không chia hết cho số nào?

How many positive integers not exceeding 2024 are divisible by at least one of 4, 6, 10? How many are divisible by none of them?

Lời giải. / Solution.

Gọi A, B, C là tập các số trong $\{1, \dots, 2024\}$ chia hết cho 4, 6, 10. Số bội của m trong tập này là $\lfloor 2024/m \rfloor$.

Let A, B, C be the sets of numbers in $\{1, \dots, 2024\}$ divisible by 4, 6, 10. The number of multiples of m is $\lfloor 2024/m \rfloor$.

$$|A| = 506, |B| = 337, |C| = 202$$

$\text{BCNN}(4, 6) = 12, \text{BCNN}(4, 10) = 20, \text{BCNN}(6, 10) = 30, \text{BCNN}(4, 6, 10) = 60$ nên:
 $\text{lcm}(4, 6) = 12, \text{lcm}(4, 10) = 20, \text{lcm}(6, 10) = 30, \text{lcm}(4, 6, 10) = 60$, so:

$$|A \cap B| = 168, |A \cap C| = 101, |B \cap C| = 67, |A \cap B \cap C| = 33$$

Theo (1.2): $|A \cup B \cup C| = 506 + 337 + 202 - 168 - 101 - 67 + 33 = 742$.

By (1.2): $|A \cup B \cup C| = 506 + 337 + 202 - 168 - 101 - 67 + 33 = 742$.

Số không chia hết cho cả ba số là $2024 - 742 = 1282$.

The numbers divisible by none of them number $2024 - 742 = 1282$.

Vậy có 742 số chia hết cho ít nhất một trong ba số và 1282 số không chia hết cho số nào.

Hence 742 numbers are divisible by at least one of the three and 1282 by none. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Lỗi hay gặp khi áp dụng (1.2) là bỏ sót số hạng cuối $|A \cap B \cap C|$. Kiểm nhanh: nếu A, B, C đôi một rời nhau thì mọi giao bằng rỗng và (1.2) trở về tổng $|A| + |B| + |C|$.

A common slip with (1.2) is to drop the last term $|A \cap B \cap C|$. Quick check: if A, B, C are pairwise disjoint all intersections are empty and (1.2) reduces to the sum $|A| + |B| + |C|$.

NHẬN XÉT / REMARK — Dạng tổng quát cho n tập có dấu xen kẽ: tổng các $|A_i|$, trừ tổng các giao đôi, cộng tổng các giao ba, và cứ thế. Trường hợp $n = 3$ là đủ cho đa số bài ở mức tỉnh; mức quốc gia cần dạng tổng quát (chương Phép đếm nâng cao).

The general formula for n sets alternates signs: sum of the $|A_i|$, minus the sum of pairwise

intersections, plus the sum of triple intersections, and so on. The case $n = 3$ covers most provincial-level problems; national level needs the general form (chapter on advanced counting).

NHẬN XÉT / REMARK — Chứng minh hai tập bằng nhau luôn gồm hai chiều: lấy x tùy ý trong tập thứ nhất và chứng minh x thuộc tập thứ hai, rồi làm ngược lại. Chỉ chứng minh một chiều thì mới được $A \subset B$.

A proof that two sets are equal always has two directions: take an arbitrary x in the first set and show it lies in the second, then do the reverse. One direction only gives $A \subset B$.

1.4. Ánh xạ: đơn ánh, toàn ánh, song ánh — Maps: injections, surjections, bijections

ĐỊNH NGHĨA 1.10 (Đơn ánh, toàn ánh, song ánh) / DEFINITION 1.10 (Injection, surjection, bijection) — Ánh xạ f từ tập A vào tập B đặt mỗi $x \in A$ ứng với đúng một $f(x) \in B$. f là đơn ánh nếu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, tức $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. f là toàn ánh nếu mọi $y \in B$ đều có $x \in A$ với $f(x) = y$. f là song ánh nếu vừa đơn ánh vừa toàn ánh; khi đó với mỗi $y \in B$ có đúng một $x \in A$ sao cho $f(x) = y$, và ánh xạ ngược $y \mapsto x$ được ký hiệu f^{-1} .

A map f from a set A into a set B assigns to each $x \in A$ exactly one $f(x) \in B$. f is injective if $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, equivalently $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. f is surjective if every $y \in B$ has some $x \in A$ with $f(x) = y$. f is bijective if it is both; then each $y \in B$ has exactly one $x \in A$ with $f(x) = y$, and the inverse map $y \mapsto x$ is written f^{-1} .

ĐỊNH LÝ 1.11 (Đơn ánh – toàn ánh trên tập hữu hạn) / THEOREM 1.11 (Injective iff surjective on finite sets) — Cho A, B là hai tập hữu hạn có cùng số phần tử và f là ánh xạ từ A vào B . Ba điều sau tương đương: f là đơn ánh; f là toàn ánh; f là song ánh. Hệ quả: nếu có song ánh giữa hai tập hữu hạn thì chúng có cùng số phần tử.

Let A, B be finite sets with the same number of elements and f a map from A into B . The following are equivalent: f is injective; f is surjective; f is bijective. Consequently, if there is a bijection between two finite sets they have the same number of elements.

Chứng minh. / Proof.

Đặt $n = |A| = |B|$. Nếu f là đơn ánh, các giá trị $f(x)$ với $x \in A$ đôi một khác nhau nên ảnh $f(A)$ có đúng n phần tử, là tập con của B có n phần tử, nên $f(A) = B$: f là toàn ánh.

Let $n = |A| = |B|$. If f is injective, the values $f(x)$, $x \in A$, are pairwise distinct, so the image $f(A)$ has exactly n elements; it is a subset of B , which has n elements, hence $f(A) = B$ and f is surjective.

Ngược lại, giả sử f là toàn ánh. Nếu f không là đơn ánh, tồn tại $x_1 \neq x_2$ cùng ảnh, nên ảnh $f(A)$ có nhiều nhất $n - 1$ phần tử, nhỏ hơn $|B| = n$, mâu thuẫn với toàn ánh. Vậy f là đơn ánh.

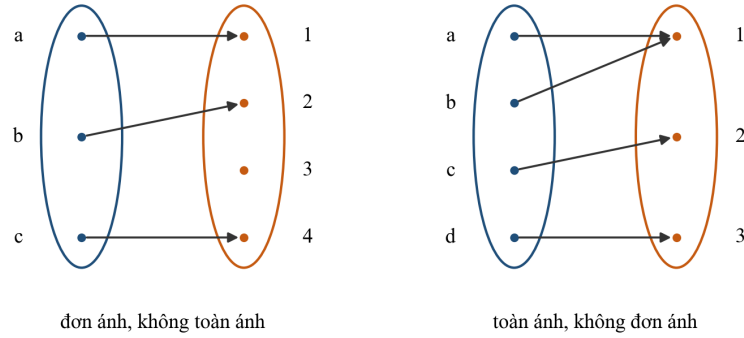
Conversely, let f be surjective. If f were not injective, some $x_1 \neq x_2$ would share an image, so $f(A)$ would have at most $n - 1$ elements, fewer than $|B| = n$, contradicting surjectivity. So f is injective.

Vậy ba tính chất tương đương. Phần hệ quả: song ánh g từ A lên B cho $n = |A| = |f(A)| = |B|$, vì g đơn ánh nên $|g(A)| = |A|$ và g toàn ánh nên $g(A) = B$.

So the three properties are equivalent. For the consequence: a bijection g from A onto B gives $|A| = |g(A)| = |B|$, since g is injective (so $|g(A)| = |A|$) and surjective (so $g(A) = B$). ■

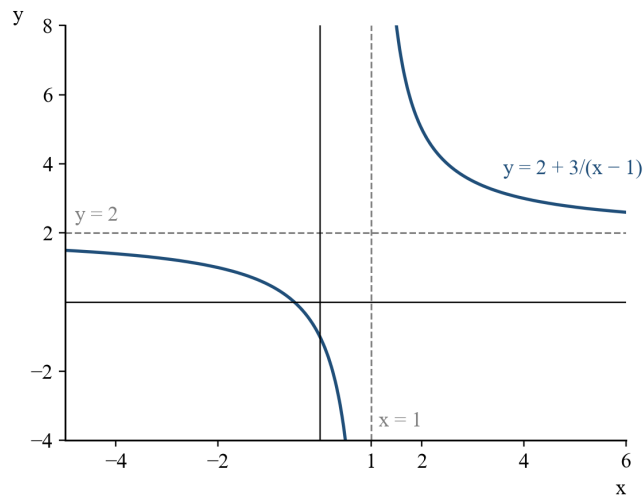
NHẬN XÉT / REMARK — Định lý 1.11 sai cho tập vô hạn: $n \mapsto n + 1$ trên $\mathbb{Z}^+$ là đơn ánh nhưng không toàn ánh (không nhận giá trị 1). Mọi lập luận “đơn ánh nên toàn ánh” phải ghi rõ tập hữu hạn và hai tập cùng cỡ.

Theorem 1.11 fails for infinite sets: $n \mapsto n + 1$ on $\mathbb{Z}^+$ is injective but not surjective (it never takes the value 1). Every argument “injective, hence surjective” must state that the sets are finite and of equal size.



Hình 1.2. Trái: ánh xạ đơn ánh nhưng không toàn ánh (phần tử 3 không được nhận). Phải: ánh xạ toàn ánh nhưng không đơn ánh (a và b cùng ảnh 1).

Figure 1.2. Left: an injective map that is not surjective (element 3 is never hit). Right: a surjective map that is not injective (a and b share the image 1).



Hình 1.3. Đồ thị $y = (2x + 1)/(x - 1) = 2 + 3/(x - 1)$: mỗi đường ngang $y = c$ với $c \neq 2$ cắt đồ thị đúng một điểm, đường $y = 2$ không cắt.

Figure 1.3. Graph of $y = (2x + 1)/(x - 1) = 2 + 3/(x - 1)$: each horizontal line $y = c$ with $c \neq 2$ meets the graph exactly once; the line $y = 2$ never does.

VÍ DỤ 1.5 (Chứng minh song ánh) / EXAMPLE 1.5 (Proving bijectivity) — Cho $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và $Y = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = (2x + 1)/(x - 1)$. Chứng minh f là song ánh từ X lên Y và tìm ánh xạ ngược.

Let $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $Y = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ and $f(x) = (2x + 1)/(x - 1)$. Prove that f is a bijection from X onto Y and find the inverse.

Lời giải. / Solution.

1. Giá trị thuộc Y : $f(x) = 2 + 3/(x - 1)$ và $3/(x - 1) \neq 0$ nên $f(x) \neq 2$.
Values lie in Y : $f(x) = 2 + 3/(x - 1)$ and $3/(x - 1) \neq 0$, so $f(x) \neq 2$.
2. Đơn ánh. Giả sử $f(a) = f(b)$ với $a, b \in X$. Khi đó $3/(a - 1) = 3/(b - 1)$, suy ra $a - 1 = b - 1$, tức $a = b$.
Injective. Suppose $f(a) = f(b)$ with $a, b \in X$. Then $3/(a - 1) = 3/(b - 1)$, so $a - 1 = b - 1$, that is $a = b$.
3. Toàn ánh. Lấy $y \in Y$. Đặt $x = (y + 1)/(y - 2)$, có nghĩa vì $y \neq 2$. Khi đó $x - 1 = 3/(y - 2) \neq 0$ nên $x \in X$, và $f(x) = 2 + 3/(x - 1) = 2 + (y - 2) = y$.
Surjective. Take $y \in Y$. Put $x = (y + 1)/(y - 2)$, defined since $y \neq 2$. Then $x - 1 = 3/(y - 2) \neq 0$, so $x \in X$, and $f(x) = 2 + 3/(x - 1) = 2 + (y - 2) = y$.

Vậy f là song ánh từ X lên Y , ánh xạ ngược $f^{-1}(y) = (y + 1)/(y - 2)$ với $y \neq 2$.

Hence f is a bijection from X onto Y with inverse $f^{-1}(y) = (y + 1)/(y - 2)$ for $y \neq 2$. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Chứng minh toàn ánh bằng cách giải phương trình $f(x) = y$ rồi không kiểm tra nghiệm x tìm được có thuộc tập xác định hay không. Ở Ví dụ 1.5, nếu bỏ qua $x \neq 1$ thì không biết $y = 2$ phải bị loại.

Proving surjectivity by solving $f(x) = y$ and not checking that the solution x lies in the domain. In Example 1.5, ignoring $x \neq 1$ hides why $y = 2$ must be excluded.

1.5. Chứng minh trực tiếp, bằng phản đảo và bằng phản chứng — Direct proof, contrapositive and contradiction

Chứng minh trực tiếp đi từ giả thiết tới kết luận bằng các suy luận liên tiếp; với số nguyên, kỹ thuật chính là xét số dư và phân tích thành nhân tử. Chứng minh bằng phản đảo thay $P \Rightarrow Q$ bằng $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$, hợp lệ theo Định lý 1.5. Chứng minh phản chứng giả sử điều cần chứng minh sai, rồi suy ra một điều vô lý; điều vô lý có thể là trái giả thiết, trái một sự thật đã biết, hoặc tự mâu thuẫn.

A direct proof runs from the hypotheses to the conclusion through successive deductions; for integers the main tools are residues and factorisation. A proof by contrapositive replaces $P \Rightarrow Q$ by $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$, which is legitimate by Theorem 1.5. A proof by contradiction assumes the claim is false and derives an absurdity: a clash with a hypothesis, with a known fact, or with itself.

VÍ DỤ 1.6 (Xét số dư) / EXAMPLE 1.6 (Case analysis by residues) — Cho các số nguyên a, b . Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì cả a và b đều chia hết cho 3.

Let a, b be integers. Prove that if $a^2 + b^2$ is divisible by 3 then both a and b are divisible by 3.

Lời giải. / Solution.

1. Bình phương của một số nguyên chia 3 dư 0 hoặc 1: $n = 3k$ cho $n^2 = 9k^2 \equiv 0$; $n = 3k \pm 1$ cho $n^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 \equiv 1 \pmod{3}$.
A square leaves remainder 0 or 1 on division by 3: $n = 3k$ gives $n^2 = 9k^2 \equiv 0$; $n = 3k \pm 1$ gives $n^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 \equiv 1 \pmod{3}$.

2. Xét tổng $a^2 + b^2$ theo các dư của hai bình phương: $0 + 0 \equiv 0, 0 + 1 \equiv 1, 1 + 0 \equiv 1, 1 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$. Chỉ trường hợp đầu cho tổng chia hết cho 3.

Add the residues of the two squares: $0 + 0 \equiv 0, 0 + 1 \equiv 1, 1 + 0 \equiv 1, 1 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$.

Only the first case gives a sum divisible by 3.

Vậy $a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod{3}$, tức $3 \mid a^2$ và $3 \mid b^2$, nên $3 \mid a$ và $3 \mid b$ (vì nếu n không chia hết cho 3 thì n^2 chia 3 dư 1).

Hence $a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod{3}$, so $3 \mid a^2$ and $3 \mid b^2$, and therefore $3 \mid a$ and $3 \mid b$ (a number not divisible by 3 has a square leaving remainder 1). ■

VÍ DỤ 1.7 (Phản đảo) / EXAMPLE 1.7 (Contrapositive) — Cho số nguyên dương n . Chứng minh rằng nếu $n^2 - 1$ không chia hết cho 8 thì n là số chẵn.

Let n be a positive integer. Prove that if $n^2 - 1$ is not divisible by 8 then n is even.

Lời giải. / Solution.

1. Chứng minh phản đảo: nếu n lẻ thì $8 \nmid n^2 - 1$. Cách này tiện vì giả thiết “ n lẻ” cho được dạng tường minh, còn giả thiết gốc “không chia hết” thì không.

Prove the contrapositive: if n is odd then $8 \nmid n^2 - 1$. This is convenient because “ n is odd” gives an explicit form, whereas the original hypothesis “not divisible” does not.

2. Nếu n lẻ, $n = 2k + 1$ với k nguyên, $k \geq 0$. Khi đó $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$.

If n is odd, $n = 2k + 1$ with k an integer, $k \geq 0$. Then $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$.

3. Trong hai số nguyên liên tiếp k và $k + 1$ có một số chẵn nên $k(k + 1)$ chia hết cho 2, suy ra $4k(k + 1)$ chia hết cho 8.

Of the consecutive integers k and $k + 1$ one is even, so $2 \mid k(k + 1)$, and hence $8 \mid 4k(k + 1)$.

Vậy phản đảo đúng, và theo Định lý 1.5 mệnh đề đã cho đúng.

So the contrapositive holds, and by Theorem 1.5 the given statement is true. ■

BỔ ĐỀ 1.12 (Ước nguyên tố, bổ đề Euclid) / LEMMA 1.12 (Prime divisor, Euclid’s lemma) — Mọi số nguyên $n > 1$ đều có ước nguyên tố. Hơn nữa, nếu p là số nguyên tố và $p \mid ab$ thì $p \mid a$ hoặc $p \mid b$ (bổ đề Euclid).

Every integer $n > 1$ has a prime divisor. Moreover, if p is a prime and $p \mid ab$ then $p \mid a$ or $p \mid b$ (Euclid’s lemma).

Chứng minh. / Proof.

Tập các ước lớn hơn 1 của n khác rỗng (chứa n), nên theo nguyên lý sắp thứ tự tốt (Mục 1.6) có phần tử nhỏ nhất d . Nếu d có ước e với $1 < e < d$ thì e cũng là ước của n nhỏ hơn d , vô lý. Vậy d nguyên tố.

The set of divisors of n exceeding 1 is non-empty (it contains n), so by the well-ordering principle (Section 1.6) it has a least element d . If d had a divisor e with $1 < e < d$ then e would be a smaller divisor of n , absurd. So d is prime.

Bổ đề Euclid: giả sử $p \mid ab$ và $p \nmid a$. Vì p nguyên tố nên ước chung lớn nhất của p và a bằng 1, theo định lý Bézout có các số nguyên u, v với $up + va = 1$. Nhân với b : $upb + vab = b$. Cả hai số hạng bên trái chia hết cho p , nên $p \mid b$. Định lý Bézout dùng ở đây được chứng minh trong chương về chia hết, ƯCLN và số nguyên tố.

Euclid's lemma: suppose $p \mid ab$ and $p \nmid a$. Since p is prime, $\gcd(p, a) = 1$, and by Bézout's theorem there are integers u, v with $up + va = 1$. Multiplying by b : $upb + vab = b$. Both terms on the left are divisible by p , so $p \mid b$. Bézout's theorem used here is proved in the chapter on divisibility, gcd and primes. ■

ĐỊNH LÝ 1.13 (Tính vô tỉ của $\sqrt{2}$) / THEOREM 1.13 (Irrationality of $\sqrt{2}$) — Số $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

The number $\sqrt{2}$ is irrational.

Chứng minh. / Proof.

Giả sử $\sqrt{2} = p/q$ với p, q nguyên dương và phân số p/q tối giản (ước chung lớn nhất của p và q bằng 1).

Suppose $\sqrt{2} = p/q$ with p, q positive integers and p/q in lowest terms ($\gcd(p, q) = 1$).

Bình phương: $p^2 = 2q^2$, nên p^2 chẵn. Nếu p lẻ thì p^2 lẻ, nên p chẵn: $p = 2r$.

Squaring: $p^2 = 2q^2$, so p^2 is even. If p were odd then p^2 would be odd, so p is even: $p = 2r$.

Thay vào: $4r^2 = 2q^2$, tức $q^2 = 2r^2$, nên q chẵn theo cùng lập luận. Khi đó 2 là ước chung của p và q , mâu thuẫn với $\gcd(p, q) = 1$. Vậy $\sqrt{2}$ vô tỉ.

Substituting: $4r^2 = 2q^2$, that is $q^2 = 2r^2$, so q is even by the same argument. Then 2 is a common divisor of p and q , contradicting $\gcd(p, q) = 1$. Hence $\sqrt{2}$ is irrational. ■

ĐỊNH LÝ 1.14 (Định lý Euclid về số nguyên tố) / THEOREM 1.14 (Euclid's theorem on primes) — Có vô hạn số nguyên tố.

There are infinitely many primes.

Chứng minh. / Proof.

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_k$. Đặt $N = p_1 p_2 \dots p_k + 1 > 1$.

Suppose there are only finitely many primes $p_1, p_2, \dots, p_k$. Put $N = p_1 p_2 \dots p_k + 1 > 1$.

Theo Bổ đề 1.12, N có ước nguyên tố q . Vì mọi số nguyên tố đều nằm trong danh sách, $q = p_i$ với một i nào đó.

By Lemma 1.12, N has a prime divisor q . Every prime is in the list, so $q = p_i$ for some i .

Khi đó q chia hết cả N lẫn tích $p_1 \dots p_k$, nên q chia hết hiệu của chúng là 1, vô lý vì $q \geq 2$. Vậy có vô hạn số nguyên tố.

Then q divides both N and the product $p_1 \dots p_k$, hence their difference 1, absurd since $q \geq 2$. So there are infinitely many primes. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Trực tiếp thì chỉ có một số hữu tỉ $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ để dùng. Giả sử r hữu tỉ rồi tìm một biểu thức hữu tỉ khác chứa riêng $\sqrt{3}$ hoặc riêng $\sqrt{2}$. Biểu thức liên hợp $1/r = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ là lối ra: r và $1/r$ cho hai phương trình bậc nhất với hai ẩn $\sqrt{2}, \sqrt{3}$.

Directly there is only the number $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ to work with. Assume r is rational and look for another rational expression that isolates $\sqrt{3}$ or $\sqrt{2}$. The conjugate $1/r = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ is the way out: r and $1/r$ give two linear equations in the two unknowns $\sqrt{2}, \sqrt{3}$.

VÍ DỤ 1.8 (Phản chứng với liên hợp) / EXAMPLE 1.8 (Contradiction with the conjugate) — Chứng minh $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Prove that $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ is irrational.

Lời giải. / Solution.

1. Trước hết $\sqrt{3}$ vô tỉ. Giả sử $\sqrt{3} = p/q$ tối giản, p, q nguyên dương. Khi đó $p^2 = 3q^2$, nên $3 \mid p^2$, theo bổ đề Euclid $3 \mid p$, $p = 3r$. Suy ra $9r^2 = 3q^2$, $q^2 = 3r^2$, nên $3 \mid q$. Hai số p, q cùng chia hết cho 3, mâu thuẫn tính tối giản.

First, $\sqrt{3}$ is irrational. Suppose $\sqrt{3} = p/q$ in lowest terms, p, q positive integers. Then $p^2 = 3q^2$, so $3 \mid p^2$, and by Euclid's lemma $3 \mid p$, $p = 3r$. It follows that $9r^2 = 3q^2$, $q^2 = 3r^2$, so $3 \mid q$. Both p and q are divisible by 3, contradicting lowest terms.

2. Giả sử $s = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số hữu tỉ; rõ ràng $s > 0$. Do $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$ nên $\sqrt{3} - \sqrt{2} = 1/s$ cũng hữu tỉ.

Suppose $s = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ is rational; clearly $s > 0$. Since $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$, the number $\sqrt{3} - \sqrt{2} = 1/s$ is also rational.

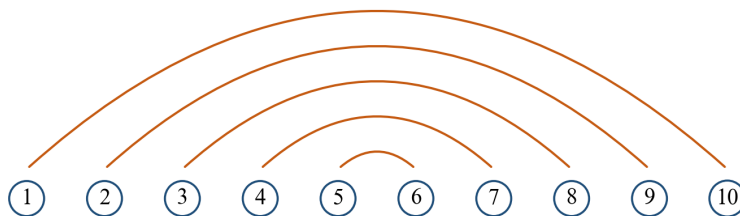
3. Cộng s và $1/s$: $s + 1/s = 2\sqrt{3}$, nên $\sqrt{3} = (s + 1/s)/2$ là số hữu tỉ, mâu thuẫn với bước 1.

Adding s and $1/s$: $s + 1/s = 2\sqrt{3}$, so $\sqrt{3} = (s + 1/s)/2$ would be rational, contradicting step 1.

Vậy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Hence $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ is irrational. ■

mỗi cung nối hai số có tổng 11



Hình 1.4. Năm cặp có tổng 11 chia tập $\{1, \dots, 10\}$; sáu số được chọn buộc có hai số trong cùng một cặp.

Figure 1.4. Five pairs with sum 11 split $\{1, \dots, 10\}$; six chosen numbers force two into the same pair.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Con số 11 xuất hiện vì $1 + 10 = 2 + 9 = \dots = 5 + 6$. Mười số chia thành năm cặp “bù nhau”. Chọn sáu số mà không có hai số nào cùng cặp thì cần ít nhất sáu cặp. Đây là phản chứng gắn với phép đếm: giả sử không có hai số nào có tổng 11 rồi đếm tối đa số phần tử chọn được.

The number 11 appears because $1 + 10 = 2 + 9 = \dots = 5 + 6$. The ten numbers split into five complementary pairs. Six chosen numbers with no two in one pair would need at least six pairs. This is contradiction tied to counting: assume no two numbers sum to 11 and count the largest possible selection.

VÍ DỤ 1.9 (Phản chứng và đếm) / EXAMPLE 1.9 (Contradiction and counting) — Chọn sáu số nguyên phân biệt từ tập $\{1, 2, \dots, 10\}$. Chứng minh rằng trong sáu số đó có hai số có

tổng bằng 11. Khẳng định còn đúng khi chỉ chọn năm số không?

Choose six distinct integers from $\{1, 2, \dots, 10\}$. Prove that two of them have sum 11. Does the claim remain true if only five numbers are chosen?

Lời giải. / Solution.

1. Chia tập thành năm cặp $P_i = \{i, 11 - i\}$, $i = 1, \dots, 5$: $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$. Mỗi số của tập thuộc đúng một cặp, và hai số trong cùng một cặp có tổng 11.
Split the set into five pairs $P_i = \{i, 11 - i\}$, $i = 1, \dots, 5$: $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$. Each element lies in exactly one pair, and the two numbers in one pair sum to 11.
2. Giả sử trong sáu số được chọn không có hai số nào tổng 11. Khi đó mỗi cặp chứa nhiều nhất một số được chọn, nên số số được chọn nhiều nhất là 5, mâu thuẫn với 6.
Suppose no two of the six chosen numbers sum to 11. Then each pair contains at most one chosen number, so at most 5 numbers are chosen, contradicting 6.
3. Với năm số: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ không có hai số nào tổng 11 (tổng lớn nhất là $4 + 5 = 9$), nên khẳng định sai.
With five numbers: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ has no two numbers with sum 11 (the largest sum is $4 + 5 = 9$), so the claim fails.

Vậy sáu số luôn có hai số tổng 11, và con số sáu là nhỏ nhất có tính chất này.

Hence any six numbers contain two with sum 11, and six is the least number with this property.

NHẬN XÉT / REMARK — Phản chứng chỉ dùng khi phủ định của kết luận cho thêm một dữ kiện có ích (như “tối giản”, “ N là tích của mọi số nguyên tố”). Nếu lập luận cuối chỉ là chứng minh trực tiếp nằm giữa hai câu “giả sử” và “mâu thuẫn”, hãy viết lại bằng chứng minh trực tiếp.

Use contradiction only when negating the conclusion hands you a useful extra fact (such as “lowest terms” or “ N is built from all the primes”). If the argument is just a direct proof sandwiched between “suppose” and “contradiction”, rewrite it as a direct proof.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Phản chứng $\sqrt{2}$ mà quên nêu giả thiết p/q tối giản: khi đó “ p và q cùng chẵn” không mâu thuẫn với điều gì.

Proving $\sqrt{2}$ irrational by contradiction without stating that p/q is in lowest terms: “ p and q are both even” then contradicts nothing.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Phủ định sai kết luận khi phản chứng. Phủ định của “tồn tại nghiệm nguyên dương” là “không có nghiệm nguyên dương nào”, không phải “mọi nghiệm đều âm”.

Negating the conclusion wrongly in a proof by contradiction. The negation of “a positive integer solution exists” is “no positive integer solution exists”, not “every solution is negative”.

1.6. Quy nạp và nguyên lý sắp thứ tự tốt — Induction and the well-ordering principle

ĐỊNH NGHĨA 1.15 (Nguyên lý sắp thứ tự tốt) / DEFINITION 1.15 (Well-ordering principle) — Nguyên lý sắp thứ tự tốt: mọi tập con khác rỗng của tập các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ đều có phần tử nhỏ nhất.

$1, 2, \dots\}$ đều có phần tử nhỏ nhất. Đây là tính chất cơ bản của số tự nhiên và được thừa nhận; mọi dạng quy nạp trong mục này được suy ra từ nó.

The well-ordering principle: every non-empty subset of the natural numbers $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ has a least element. It is a basic property of the natural numbers and is taken as given; every form of induction below follows from it.

Quy nạp giống một hàng quân cờ domino: bước cơ sở đẩy quân đầu tiên, bước quy nạp bảo đảm quân nào đổ thì quân kế tiếp đổ. Thiếu một trong hai thì hàng không đổ hết.

Induction works like a row of dominoes: the base case tips the first one, the inductive step guarantees that whenever one falls the next falls too. Without either, the row does not all fall.

ĐỊNH LÝ 1.16 (Nguyên lý quy nạp) / THEOREM 1.16 (Principle of induction) — Quy nạp thường. Cho $P(n)$ là một mệnh đề với n là số nguyên $n \geq n_0$. Nếu (i) $P(n_0)$ đúng (bước cơ sở) và (ii) với mọi $k \geq n_0$, $P(k)$ đúng kéo theo $P(k+1)$ đúng (bước quy nạp), thì $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Ordinary induction. Let $P(n)$ be a statement about an integer $n \geq n_0$. If (i) $P(n_0)$ is true (base case) and (ii) for every $k \geq n_0$, $P(k)$ true implies $P(k+1)$ true (inductive step), then $P(n)$ is true for all $n \geq n_0$.

Chứng minh. / Proof.

Giả sử kết luận sai. Tập S các số $n \geq n_0$ mà $P(n)$ sai khác rỗng, nên theo Định nghĩa 1.15 có phần tử nhỏ nhất m .

Suppose the conclusion fails. The set S of integers $n \geq n_0$ for which $P(n)$ is false is non-empty, so by Definition 1.15 it has a least element m .

Theo (i), $m \neq n_0$, nên $m-1 \geq n_0$. Do m nhỏ nhất trong S nên $P(m-1)$ đúng. Theo (ii) với $k = m-1$, $P(m)$ đúng, mâu thuẫn với $m \in S$. Vậy S rỗng.

By (i), $m \neq n_0$, so $m-1 \geq n_0$. As m is least in S , $P(m-1)$ is true. By (ii) with $k = m-1$, $P(m)$ is true, contradicting $m \in S$. So S is empty. ■

ĐỊNH LÝ 1.17 (Quy nạp mạnh) / THEOREM 1.17 (Strong induction) — Quy nạp mạnh (nhiều cơ sở). Cho $r \geq 1$. Nếu $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n_0+r-1)$ đều đúng (r bước cơ sở), và với mọi $k \geq n_0+r$, từ giả thiết $P(m)$ đúng với mọi m có $n_0 \leq m < k$ suy ra $P(k)$ đúng, thì $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Strong induction (several base cases). Let $r \geq 1$. If $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n_0+r-1)$ are all true (r base cases), and for every $k \geq n_0+r$, the truth of $P(m)$ for all m with $n_0 \leq m < k$ implies $P(k)$, then $P(n)$ is true for all $n \geq n_0$.

Chứng minh. / Proof.

Đặt $Q(n)$: “ $P(m)$ đúng với mọi m có $n_0 \leq m \leq n$ ”. Ta chứng minh $Q(n)$ đúng với $n \geq n_0+r-1$ bằng quy nạp thường (Định lý 1.16).

Let $Q(n)$ be: “ $P(m)$ is true for all m with $n_0 \leq m \leq n$ ”. We prove $Q(n)$ for $n \geq n_0+r-1$ by ordinary induction (Theorem 1.16).

Cơ sở: $Q(n_0+r-1)$ đúng vì đó chính là r bước cơ sở. Bước quy nạp: nếu $Q(k-1)$ đúng với $k \geq n_0+r$ thì $P(m)$ đúng với mọi $n_0 \leq m < k$, nên theo giả thiết $P(k)$ đúng, suy ra $Q(k)$ đúng.

Base: $Q(n_0 + r - 1)$ holds, being exactly the r base cases. Step: if $Q(k - 1)$ holds for some $k \geq n_0 + r$ then $P(m)$ holds for every $n_0 \leq m < k$, so $P(k)$ holds by hypothesis and $Q(k)$ follows.

Mọi $P(n)$ với $n \geq n_0$ nằm trong một $Q(n)$ nên đúng.

Every $P(n)$ with $n \geq n_0$ sits inside some $Q(n)$, so it is true. ■

ĐỊNH LÝ 1.18 (Quy nạp Cauchy) / THEOREM 1.18 (Cauchy induction) — Quy nạp Cauchy (tiến – lùi). Cho $P(n)$ là mệnh đề với số nguyên $n \geq 2$. Nếu (i) $P(2)$ đúng; (ii) với mọi $n \geq 2$, $P(n)$ đúng kéo theo $P(2n)$ đúng; (iii) với mọi $n \geq 3$, $P(n)$ đúng kéo theo $P(n - 1)$ đúng; thì $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 2$.

Cauchy induction (forward–backward). Let $P(n)$ be a statement about integers $n \geq 2$. If (i) $P(2)$ is true; (ii) for every $n \geq 2$, $P(n)$ implies $P(2n)$; (iii) for every $n \geq 3$, $P(n)$ implies $P(n - 1)$; then $P(n)$ is true for all $n \geq 2$.

Chứng minh. / Proof.

Từ (i) và (ii), bằng quy nạp thường theo k : $P(2^k)$ đúng với mọi $k \geq 1$ ($P(2^k)$ kéo theo $P(2^{k+1})$).

From (i) and (ii), by ordinary induction on k : $P(2^k)$ is true for all $k \geq 1$ ($P(2^k)$ implies $P(2^{k+1})$).

Với $n \geq 2$ bất kỳ, chọn k sao cho $2^k \geq n$. $P(2^k)$ đúng; áp dụng (iii) liên tiếp với $2^k, 2^k - 1, \dots, n + 1$ (đều ≥ 3) ta nhận $P(2^k - 1), \dots, P(n)$ đúng.

For any $n \geq 2$ choose k with $2^k \geq n$. $P(2^k)$ is true; applying (iii) successively at $2^k, 2^k - 1, \dots, n + 1$ (all ≥ 3) yields $P(2^k - 1), \dots, P(n)$. ■

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Lời giải quy nạp gồm bốn phần viết riêng: phát biểu $P(n)$; bước cơ sở (với mọi giá trị đầu cần thiết); giả thiết quy nạp; chứng minh bước quy nạp có dùng giả thiết; kết luận.

An induction write-up has separate parts: state $P(n)$; the base case (every starting value needed); the inductive hypothesis; the inductive step, visibly using the hypothesis; the conclusion.

VÍ DỤ 1.10 (Quy nạp thường) / EXAMPLE 1.10 (Ordinary induction) — Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n : $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

Prove that for every positive integer n : $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

Lời giải. / Solution.

1. Gọi $P(n)$ là đẳng thức đã cho. Cơ sở $n = 1$: vế trái bằng $1 \cdot 2 = 2$, vế phải bằng $0 \cdot 4 + 2 = 2$. $P(1)$ đúng.

Let $P(n)$ be the stated identity. Base $n = 1$: the left side is $1 \cdot 2 = 2$, the right side is $0 \cdot 4 + 2 = 2$. $P(1)$ holds.

2. Giả thiết $P(k)$ đúng với một $k \geq 1$: $1 \cdot 2^1 + \dots + k \cdot 2^k = (k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2$.

Hypothesis: $P(k)$ holds for some $k \geq 1$: $1 \cdot 2^1 + \dots + k \cdot 2^k = (k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2$.

3. Cộng $(k + 1) \cdot 2^{k+1}$ vào hai vế: vế phải trở thành $(k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2 + (k + 1) \cdot 2^{k+1} = 2k \cdot 2^{k+1} + 2 = k \cdot 2^{k+2} + 2$.

Add $(k + 1) \cdot 2^{k+1}$ to both sides: the right side becomes $(k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2 + (k + 1) \cdot 2^{k+1} = 2k \cdot 2^{k+1} + 2 = k \cdot 2^{k+2} + 2$.

Đó chính là vế phải của $P(k+1)$, vì $((k+1)-1) \cdot 2^{(k+1)+1} + 2 = k \cdot 2^{k+2} + 2$. Theo nguyên lý quy nạp, đẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$.

That is exactly the right side of $P(k+1)$, because $((k+1)-1) \cdot 2^{(k+1)+1} + 2 = k \cdot 2^{k+2} + 2$. By induction the identity holds for all $n \geq 1$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hệ thức truy hồi nối a_{n+2} với hai số hạng trước, nên bước quy nạp cần cả $P(n)$ lẫn $P(n+1)$. Vì thế bước cơ sở phải kiểm hai giá trị $n=1$ và $n=2$. Kiểm một giá trị là thiếu, và là lỗi mất điểm kinh điển.

The recurrence ties a_{n+2} to the two previous terms, so the inductive step needs both $P(n)$ and $P(n+1)$. The base case must therefore check two values, $n=1$ and $n=2$. Checking one is not enough, and it is the classic way to lose marks.

VÍ DỤ 1.11 (Quy nạp hai bước) / EXAMPLE 1.11 (Two-step induction) — Cho dãy $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ với $n \geq 1$. Chứng minh $a_n = 3^n - 2^n$ với mọi số nguyên dương n .
The sequence satisfies $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ for $n \geq 1$. Prove that $a_n = 3^n - 2^n$ for every positive integer n .

Lời giải. / Solution.

1. Cơ sở: $a_1 = 1 = 3 - 2$ và $a_2 = 5 = 9 - 4$. Hai giá trị đầu đúng.

Base: $a_1 = 1 = 3 - 2$ and $a_2 = 5 = 9 - 4$. The first two values hold.

2. Giả thiết: $a_k = 3^k - 2^k$ và $a_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+1}$ với một $k \geq 1$.

Hypothesis: $a_k = 3^k - 2^k$ and $a_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+1}$ for some $k \geq 1$.

3. Khi đó $a_{k+2} = 5(3^{k+1} - 2^{k+1}) - 6(3^k - 2^k) = 3^k(15 - 6) - 2^k(10 - 6) = 9 \cdot 3^k - 4 \cdot 2^k = 3^{k+2} - 2^{k+2}$.

Then $a_{k+2} = 5(3^{k+1} - 2^{k+1}) - 6(3^k - 2^k) = 3^k(15 - 6) - 2^k(10 - 6) = 9 \cdot 3^k - 4 \cdot 2^k = 3^{k+2} - 2^{k+2}$.

Vậy công thức đúng cho $n = k+2$ khi đúng cho k và $k+1$; kết hợp hai giá trị đầu, theo quy nạp mạnh (Định lý 1.17 với $r=2$) $a_n = 3^n - 2^n$ với mọi $n \geq 1$.

So the formula holds for $k+2$ whenever it holds for k and $k+1$; with the first two values, strong induction (Theorem 1.17 with $r=2$) gives $a_n = 3^n - 2^n$ for all $n \geq 1$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Thử các số nhỏ: $4a+7b$ có thể là 0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, ... và bỏ qua 17. Sau 17 dường như không còn lỗ hổng. Nếu 18, 19, 20, 21 đều biểu diễn được thì thêm 4 cho ta bốn số kế tiếp, và cứ thế bốn số một lần phủ kín mọi số lớn hơn. Số cơ sở bằng 4 vì bước nhảy là 4.

Try small values: $4a+7b$ can be 0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, ... and it skips 17. After 17 there seem to be no more gaps. If 18, 19, 20, 21 are all representable, adding 4 gives the next four numbers, and four at a time covers everything above. There are 4 base cases because the step size is 4.

VÍ DỤ 1.12 (Quy nạp nhiều cơ sở) / EXAMPLE 1.12 (Induction with several base cases) — Chứng minh rằng mọi số nguyên $n \geq 18$ đều viết được dưới dạng $n = 4a + 7b$ với a, b là số nguyên không âm, và 17 không viết được dưới dạng đó.

Prove that every integer $n \geq 18$ can be written as $n = 4a + 7b$ with non-negative integers a, b , and that 17 cannot.

Lời giải. / Solution.

1. Cơ sở (bốn giá trị): $18 = 4 \cdot 1 + 7 \cdot 2$, $19 = 4 \cdot 3 + 7 \cdot 1$, $20 = 4 \cdot 5 + 7 \cdot 0$, $21 = 4 \cdot 0 + 7 \cdot 3$.
Base (four values): $18 = 4 \cdot 1 + 7 \cdot 2$, $19 = 4 \cdot 3 + 7 \cdot 1$, $20 = 4 \cdot 5 + 7 \cdot 0$, $21 = 4 \cdot 0 + 7 \cdot 3$.
2. Bước quy nạp mạnh: với $n \geq 22$, số $n - 4 \geq 18$ nên theo giả thiết $n - 4 = 4a + 7b$. Khi đó $n = 4(a + 1) + 7b$.
Strong step: for $n \geq 22$, the number $n - 4 \geq 18$, so by hypothesis $n - 4 = 4a + 7b$. Then $n = 4(a + 1) + 7b$.
3. Với 17: nếu $17 = 4a + 7b$ thì $b \in \{0, 1, 2\}$ vì $7b \leq 17$. Khi đó $17 - 7b$ bằng 17, 10, 3, không số nào chia hết cho 4.
For 17: if $17 = 4a + 7b$ then $b \in \{0, 1, 2\}$ since $7b \leq 17$. Then $17 - 7b$ equals 17, 10, 3, none divisible by 4.

Vậy mọi $n \geq 18$ biểu diễn được theo Định lý 1.17 ($r = 4$), còn 17 thì không.

Hence every $n \geq 18$ is representable by Theorem 1.17 ($r = 4$), while 17 is not. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Quy nạp từ n lên $n + 1$ khó vì phải thêm một số mà vẫn kiểm soát được tổng. Lùi từ n xuống $n - 1$ dễ hơn: thêm vào $n - 1$ số một số bằng trung bình của chúng thì cả hai vế đổi theo cách tính được. Trường hợp hai số là hằng đẳng thức $(x - y)^2 \geq 0$, và ghép hai nhóm cho bước nhân đôi. Cặp “nhân đôi, lùi một” của Định lý 1.18 phù hợp.
Induction from n to $n + 1$ is hard because a new number must be added while the sum stays under control. Going down from n to $n - 1$ is easier: append to the $n - 1$ numbers one equal to their mean and both sides change in a computable way. Two numbers give the identity $(x - y)^2 \geq 0$, and joining two groups gives the doubling step. The “double, step back” pair of Theorem 1.18 fits.

VÍ DỤ 1.13 (Quy nạp Cauchy) / EXAMPLE 1.13 (Cauchy induction) — Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$ và mọi số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$: $n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$.
Prove that for every integer $n \geq 2$ and all real numbers $x_1, x_2, \dots, x_n$: $n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$.

Lời giải. / Solution.

1. Gọi $P(n)$ là bất đẳng thức. $P(2)$: $2(x^2 + y^2) - (x + y)^2 = (x - y)^2 \geq 0$.
Let $P(n)$ be the inequality. $P(2)$: $2(x^2 + y^2) - (x + y)^2 = (x - y)^2 \geq 0$.
2. $P(n) \Rightarrow P(2n)$. Chia $2n$ số thành hai nhóm n số có tổng S_1, S_2 và tổng bình phương Q_1, Q_2 . Theo $P(n)$: $nQ_1 \geq S_1^2$, $nQ_2 \geq S_2^2$. Theo $P(2)$ cho hai số S_1, S_2 : $2(S_1^2 + S_2^2) \geq (S_1 + S_2)^2$. Vậy $2n(Q_1 + Q_2) \geq 2(S_1^2 + S_2^2) \geq (S_1 + S_2)^2$, tức $P(2n)$.
 $P(n) \Rightarrow P(2n)$. Split the $2n$ numbers into two groups of n with sums S_1, S_2 and sums of squares Q_1, Q_2 . By $P(n)$: $nQ_1 \geq S_1^2$, $nQ_2 \geq S_2^2$. By $P(2)$ for the two numbers S_1, S_2 : $2(S_1^2 + S_2^2) \geq (S_1 + S_2)^2$. Hence $2n(Q_1 + Q_2) \geq 2(S_1^2 + S_2^2) \geq (S_1 + S_2)^2$, which is $P(2n)$.
3. $P(n) \Rightarrow P(n - 1)$ với $n \geq 3$. Cho $x_1, \dots, x_{n-1}$ có tổng S và $Q = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$. Đặt $m = S/(n - 1)$ và $x_n = m$. Theo $P(n)$: $n(Q + m^2) \geq (S + m)^2 = (nm)^2$. Chia cho n : $Q + m^2 \geq nm^2$, tức $Q \geq (n - 1)m^2$. Nhân với $n - 1$: $(n - 1)Q \geq (n - 1)^2 m^2 = S^2$, tức $P(n - 1)$.
 $P(n) \Rightarrow P(n - 1)$ for $n \geq 3$. Take $x_1, \dots, x_{n-1}$ with sum S and $Q = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$. Put $m = S/(n - 1)$ and $x_n = m$. By $P(n)$: $n(Q + m^2) \geq (S + m)^2 = (nm)^2$. Divide by n : $Q + m^2 \geq nm^2$, that is $Q \geq (n - 1)m^2$. Multiply by $n - 1$: $(n - 1)Q \geq (n - 1)^2 m^2 = S^2$, which is $P(n - 1)$.

Ba điều kiện của Định lý 1.18 thỏa mãn, nên bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 2$.

All three conditions of Theorem 1.18 hold, so the inequality is true for every $n \geq 2$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Dấu bằng trong ví dụ 1.13 xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Bất đẳng thức này là hệ quả của bất đẳng thức Cauchy–Schwarz (chương Các bất đẳng thức cổ điển) với bộ $(1, \dots, 1)$; cách chứng minh ở đây chỉ dùng phép toán đại số lớp 8 và dùng kỹ thuật tiến – lùi.

Equality in Example 1.13 holds exactly when $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. The inequality also follows from the Cauchy–Schwarz inequality (chapter on classical inequalities) with the tuple $(1, \dots, 1)$; the proof here uses only school algebra and uses the forward–backward technique.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Các hệ số 1, 2, 4 làm tính chẵn lẻ lan ra: x phải chẵn, rồi y chẵn, rồi z chẵn, và chia cả ba số cho 2 thì ra đúng phương trình cũ. Một nghiệm khác 0 sinh ra nghiệm khác 0 nhỏ hơn, mãi mãi. Nguyên lý sắp thứ tự tốt chặn quá trình này: lấy nghiệm có $|x| + |y| + |z|$ nhỏ nhất.

The coefficients 1, 2, 4 make parity spread: x must be even, then y , then z , and halving all three returns the same equation. One non-zero solution produces a smaller non-zero solution, for ever. The well-ordering principle stops this: take the solution with $|x| + |y| + |z|$ least.

VÍ DỤ 1.14 (Lùi vô hạn) / EXAMPLE 1.14 (Infinite descent) — Tìm tất cả các bộ số nguyên (x, y, z) thỏa mãn $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Find all integer triples (x, y, z) satisfying $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Lời giải. / Solution.

1. Bộ $(0, 0, 0)$ là nghiệm. Giả sử có nghiệm khác $(0, 0, 0)$. Tập các giá trị $|x| + |y| + |z|$ của các nghiệm khác $(0, 0, 0)$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{Z}^+$, nên có phần tử nhỏ nhất; lấy nghiệm (x, y, z) đạt giá trị nhỏ nhất đó.
The triple $(0, 0, 0)$ is a solution. Suppose there is a solution other than $(0, 0, 0)$. The values $|x| + |y| + |z|$ over such solutions form a non-empty subset of $\mathbb{Z}^+$, so there is a least one; take a solution (x, y, z) attaining it.
2. $x^3 = 4z^3 - 2y^3$ chẵn nên x chẵn: $x = 2u$. Thay vào: $8u^3 + 2y^3 = 4z^3$, suy ra $y^3 = 2z^3 - 4u^3$ chẵn, nên y chẵn: $y = 2v$.
 $x^3 = 4z^3 - 2y^3$ is even, so x is even: $x = 2u$. Substituting: $8u^3 + 2y^3 = 4z^3$, hence $y^3 = 2z^3 - 4u^3$ is even, so y is even: $y = 2v$.
3. Thay $y = 2v$: $8u^3 + 16v^3 = 4z^3$, suy ra $z^3 = 2u^3 + 4v^3$ chẵn, nên z chẵn: $z = 2w$.
Substituting $y = 2v$: $8u^3 + 16v^3 = 4z^3$, hence $z^3 = 2u^3 + 4v^3$ is even, so z is even: $z = 2w$.
4. Thay $x = 2u, y = 2v, z = 2w$ và chia cho 8: $u^3 + 2v^3 = 4w^3$. Vậy (u, v, w) cũng là nghiệm, khác $(0, 0, 0)$, với $|u| + |v| + |w| = (|x| + |y| + |z|)/2$, nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất. Mâu thuẫn.
Substituting $x = 2u, y = 2v, z = 2w$ and dividing by 8: $u^3 + 2v^3 = 4w^3$. So (u, v, w) is also a solution, different from $(0, 0, 0)$, with $|u| + |v| + |w| = (|x| + |y| + |z|)/2$, smaller than the least value. Contradiction.

Vậy phương trình chỉ có nghiệm nguyên $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Hence the only integer solution is $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Cách lùi vô hạn cũng viết được như quy nạp: chứng minh bằng quy nạp mạnh theo $N = |x| + |y| + |z|$ rằng không có nghiệm khác $(0, 0, 0)$ với tổng bằng N . Hai cách tương đương; chọn cách nào thì viết trọn vẹn cách đó.

Infinite descent can be written as induction too: prove by strong induction on $N = |x| + |y| + |z|$ that no solution other than $(0, 0, 0)$ has total N . The two are equivalent; whichever is chosen, write it out in full.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quy nạp thiếu bước cơ sở: chứng minh “ $2^n > n^2$ với $n \geq 1$ ” bằng bước quy nạp rồi kết luận, trong khi bất đẳng thức sai ở $n = 2, 3, 4$ (với $n = 2, 3, 4$ về trái là 4, 8, 16 còn về phải là 4, 9, 16). Bước cơ sở đúng là $n = 5$.

Induction without a base case: proving “ $2^n > n^2$ for $n \geq 1$ ” by the inductive step alone and concluding, although the inequality fails at $n = 2, 3, 4$ (for $n = 2, 3, 4$ the left side is 4, 8, 16 and the right side 4, 9, 16). The right base case is $n = 5$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Bước quy nạp có dùng giả thiết $P(k)$ nhưng ở bước cuối viết “tương tự” hoặc “hiển nhiên” cho đúng phép biến đổi khó nhất. Giám khảo trừ điểm chính chỗ đó.

An inductive step that quotes $P(k)$ but writes “similarly” or “clearly” for exactly the hardest manipulation. The marker deducts at that very place.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quy nạp “chứng minh” rằng mọi con ngựa cùng màu: bước từ n lên $n + 1$ dùng hai nhóm n con ngựa có chung phần tử, nhưng với $n = 1$ hai nhóm không có phần tử chung. Bước quy nạp phải đúng với mọi k kể cả giá trị nhỏ nhất, chứ không riêng các k lớn.

The “proof” by induction that all horses have the same colour: the step from n to $n + 1$ uses two overlapping groups of n horses, but for $n = 1$ the groups do not overlap. The inductive step must hold for every k including the smallest, not only for large k .

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Quy nạp mạnh: số cơ sở bằng số bước lùi của hệ thức. Hệ thức dùng $P(n - 1)$, $P(n - 2)$ thì cần hai cơ sở; hệ thức nhảy bước 4 thì cần bốn cơ sở.

Strong induction: the number of base cases equals the number of steps back used by the argument. A relation using $P(n - 1)$ and $P(n - 2)$ needs two bases; a step of size 4 needs four.

1.7. Cách viết một chứng minh được chấm đủ điểm — *How to write a proof that earns full marks*

Thang điểm cho từng ý riêng, nên lời giải đúng nhưng thiếu một ý của thang vẫn mất điểm. Ví dụ sau viết cùng một kết quả theo hai cách.

The marking scheme awards marks for individual ideas, so a correct solution that omits one scheme item still loses marks. The example below writes the same result in two ways.

Bài toán: chứng minh với mọi số nguyên dương n , số $n^3 + 5n$ chia hết cho 6.

Problem: prove that for every positive integer n , the number $n^3 + 5n$ is divisible by 6.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Bản viết hỏng: “Với $n = 1$ được 6, $n = 2$ được 18, $n = 3$ được 42, đều chia hết cho 6, nên đúng với mọi n .” Ba giá trị đúng không chứng minh được khẳng định về mọi n (xem Ví dụ 1.3).

A failing write-up: “ $n = 1$ gives 6, $n = 2$ gives 18, $n = 3$ gives 42, all divisible by 6, so it holds for all n .” Three true values do not prove a claim about every n (see Example 1.3).

Chứng minh. / Proof.

Tách $n^3 + 5n = (n^3 - n) + 6n = (n - 1)n(n + 1) + 6n$.

Split $n^3 + 5n = (n^3 - n) + 6n = (n - 1)n(n + 1) + 6n$.

Trong ba số nguyên liên tiếp $n - 1, n, n + 1$ có một số chia hết cho 3 và có ít nhất một số chẵn, nên tích chia hết cho 2 và cho 3. Vì 2 và 3 nguyên tố cùng nhau, tích chia hết cho 6.

Among the three consecutive integers $n - 1, n, n + 1$ one is divisible by 3 and at least one is even, so the product is divisible by 2 and by 3. Since 2 and 3 are coprime, the product is divisible by 6.

Số hạng $6n$ chia hết cho 6, nên tổng $(n - 1)n(n + 1) + 6n$ chia hết cho 6. Vậy $n^3 + 5n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên dương n .

The term $6n$ is divisible by 6, so the sum $(n - 1)n(n + 1) + 6n$ is divisible by 6. Hence $n^3 + 5n$ is divisible by 6 for every positive integer n . ■

Năm việc làm trước khi nộp bài chứng minh:

Five checks before handing in a proof:

- Nêu rõ cái được phép dùng (giả thiết) và cái cần chứng minh; với bài có lượng từ, viết lại bằng ký hiệu $\forall, \exists$ để không đổi nghĩa.

State what may be used (hypotheses) and what is to be proved; for quantified claims, rewrite with $\forall, \exists$ so the meaning does not drift.

- Khai báo phương pháp ngay từ đầu: “Chứng minh bằng phản chứng”, “Quy nạp theo n ”. Giám khảo đọc nhanh hơn và biết tìm bước cơ sở ở đâu.

Announce the method at the start: “Proof by contradiction”, “Induction on n ”. The marker reads faster and knows where to look for the base case.

- Mỗi dòng suy ra từ dòng trước hoặc từ giả thiết; ghi lý do cạnh dòng nếu lý do không hiển nhiên (bổ đề Euclid, bình phương không âm, tính phân phối).

Each line follows from an earlier line or a hypothesis; write the reason beside the line when it is not obvious (Euclid’s lemma, squares are non-negative, distributivity).

- Kiểm các điểm kỳ dị: chia cho biểu thức có thể bằng 0, căn của số âm, lấy ngược bất đẳng thức khi nhân với số âm, các trường hợp bị bỏ sót.

Check the singular points: division by an expression that may vanish, roots of negative numbers, reversing an inequality when multiplying by a negative, missed cases.

- Kết thúc bằng câu kết luận trả lời đúng câu hỏi của đề: “Vậy mọi nghiệm là ...”, “Vậy giá trị nhỏ nhất bằng ...”.

End with a conclusion that answers the question actually asked: “Hence all solutions are ...”, “Hence the minimum equals ...”.

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Phương pháp nên thử <i>Method to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Công thức, đẳng thức hay bất đẳng thức chứa n , đúng với mọi $n \geq n_0$ <i>Formula, identity or inequality containing n, for all $n \geq n_0$</i>	Quy nạp thường <i>Ordinary induction</i>	1.10
Hệ thức truy hồi nối nhiều số hạng, hoặc bước nhảy k <i>Recurrence over several terms, or a jump of size k</i>	Quy nạp mạnh, k cơ sở <i>Strong induction, k base cases</i>	1.11, 1.12
Bất đẳng thức cho n số, dễ làm với 2 số <i>Inequality for n numbers, easy for 2 numbers</i>	Quy nạp Cauchy tiến – lùi <i>Cauchy forward–backward induction</i>	1.13
“Chứng minh không tồn tại”, “vô tỉ”, “vô hạn” <i>“Prove there is no ...”, “irrational”, “infinitely many”</i>	Phản chứng <i>Contradiction</i>	1.8, 1.9
Giả thiết dạng phủ định (“không chia hết”), kết luận dạng tường minh (“ n lẻ”) <i>Negative hypothesis (“not divisible”), explicit conclusion (“n odd”)</i>	Phản đảo <i>Contrapositive</i>	1.7
Phải bác bỏ khẳng định “với mọi” <i>A “for all” claim must be refuted</i>	Phản ví dụ <i>Counterexample</i>	1.3
Số nguyên và bình phương, lập phương, chia hết cho 3, 4, 8 <i>Integers with squares, cubes, divisibility by 3, 4, 8</i>	Xét số dư <i>Residues</i>	1.6
“Ít nhất một trong ba điều kiện”, đếm theo điều kiện chia hết <i>“At least one of three conditions”, counting by divisibility</i>	Bao hàm – loại trừ <i>Inclusion–exclusion</i>	1.4
Phương trình nghiệm nguyên, chẵn lẻ lặp lại sau khi chia 2 hoặc 3 <i>Integer equation whose parity or divisibility repeats after halving or thirding</i>	Lùi vô hạn, sắp thứ tự tốt <i>Infinite descent, well-ordering</i>	1.14

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Phương pháp nên thử <i>Method to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Chứng minh hai tập bằng nhau hoặc cùng số phần tử <i>Two sets equal, or of the same size</i>	Hai chiều $\subset$, hoặc song ánh <i>Two inclusions, or a bijection</i>	1.5, 1.9

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Mệnh đề	Statement (proposition)	Câu khẳng định đúng hoặc sai <i>A sentence that is true or false</i>
Lượng từ	Quantifier	$\forall$ (với mọi) và $\exists$ (tồn tại) <i>$\forall$ (for all) and $\exists$ (there exists)</i>
Phủ định	Negation	Mệnh đề đúng khi mệnh đề đã cho sai <i>True exactly when the given statement is false</i>
Kéo theo	Implication	$P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai <i>$P \Rightarrow Q$ is false only when P is true and Q false</i>
Điều kiện cần	Necessary condition	Q cần cho P khi $P \Rightarrow Q$ <i>Q is necessary for P when $P \Rightarrow Q$</i>
Điều kiện đủ	Sufficient condition	P đủ cho Q khi $P \Rightarrow Q$ <i>P is sufficient for Q when $P \Rightarrow Q$</i>
Mệnh đề đảo	Converse	$Q \Rightarrow P$ so với $P \Rightarrow Q$ <i>$Q \Rightarrow P$ compared with $P \Rightarrow Q$</i>
Mệnh đề phản đảo	Contrapositive	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$, tương đương $P \Rightarrow Q$ <i>$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$, equivalent to $P \Rightarrow Q$</i>
Phản ví dụ	Counterexample	Một trường hợp làm sai khẳng định “với mọi” <i>One case that breaks a “for all” claim</i>
Hợp, giao, hiệu	Union, intersection, difference	$A \cup B, A \cap B, A \setminus B$
Phần bù	Complement	Phần tử của tập nền không thuộc A <i>Elements of the universe not in A</i>
Lực lượng	Cardinality	Số phần tử của tập hữu hạn <i>Number of elements of a finite set</i>
Bao hàm – loại trừ	Inclusion–exclusion	Công thức đếm phần tử của hợp các tập <i>Formula for the size of a union</i>
Ánh xạ	Map (function)	Quy tắc đặt mỗi phần tử ứng với một ảnh <i>A rule giving each element one image</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Đơn ánh	Injection	Hai phần tử khác nhau có ảnh khác nhau <i>Distinct elements have distinct images</i>
Toàn ánh	Surjection	Mọi phần tử đích đều là ảnh <i>Every target element is an image</i>
Song ánh	Bijection	Vừa đơn ánh vừa toàn ánh <i>Both injective and surjective</i>
Chứng minh phản chứng	Proof by contradiction	Giả sử sai rồi suy ra vô lý <i>Assume false and derive an absurdity</i>
Quy nạp	Induction	Cơ sở cộng bước quy nạp <i>Base case plus inductive step</i>
Quy nạp mạnh	Strong induction	Dùng mọi giá trị trước đó <i>Uses all earlier values</i>
Sắp thứ tự tốt	Well-ordering	Tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ có phần tử nhỏ nhất <i>Every non-empty subset of $\mathbb{N}$ has a least element</i>
Lùi vô hạn	Infinite descent	Từ nghiệm sinh nghiệm nhỏ hơn mãi mãi <i>A solution producing ever smaller solutions</i>
Bước cơ sở	Base case	Giá trị đầu tiên cần kiểm tra trực tiếp <i>The starting values checked directly</i>

1.8. Bài tập luyện — Practice problems

Mức 1 — Học sinh giỏi cấp tỉnh — Level 1 — Provincial olympiad

Bài 1.1 / Problem 1.1 — Cho P: “với mọi số thực x tồn tại số thực y sao cho $x + y = xy$ ” và Q: “tồn tại số thực y sao cho với mọi số thực x ta có $x + y = xy$ ”. Viết phủ định của P, của Q và xác định đúng – sai của P, Q.

Let P: “for every real x there is a real y with $x + y = xy$ ” and Q: “there is a real y such that $x + y = xy$ for every real x ”. Write the negations of P and Q and decide whether P, Q are true.

Bài 1.2 / Problem 1.2 — Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá 300 mà không chia hết cho 3, không chia hết cho 5 và không chia hết cho 7?

How many positive integers not exceeding 300 are divisible by none of 3, 5, 7?

Bài 1.3 / Problem 1.3 — Chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi số nguyên dương n , số $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ chia hết cho 8.

Prove by induction that for every positive integer n , the number $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ is divisible by 8.

Bài 1.4 / Problem 1.4 — Cho $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ xác định bởi $f(n) = n + 1$ nếu n chẵn và $f(n) = n - 1$ nếu n lẻ. Chứng minh f là song ánh, tìm ánh xạ ngược và chứng minh f không có điểm bất động (không có n để $f(n) = n$).

Let $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ be given by $f(n) = n + 1$ for even n and $f(n) = n - 1$ for odd n . Prove that f is a bijection, find its inverse, and prove that f has no fixed point (no n with $f(n) = n$).

Mức 2 — Học sinh giỏi quốc gia — Level 2 — National olympiad

Bài 1.5 / Problem 1.5 — Gọi a_n là số tập con (kể cả tập rỗng) của $\{1, 2, \dots, n\}$ không chứa hai số nguyên liên tiếp. Chứng minh $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geq 3$. Tính a_{10} .

Let a_n be the number of subsets (the empty set included) of $\{1, 2, \dots, n\}$ containing no two consecutive integers. Prove $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ and $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ for $n \geq 3$. Compute a_{10} .

Bài 1.6 / Problem 1.6 — Chứng minh $n^4 + 4$ là hợp số với mọi số nguyên $n > 1$. Từ đó tìm tất cả số nguyên dương n để $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

Prove that $n^4 + 4$ is composite for every integer $n > 1$. Hence find all positive integers n for which $n^4 + 4$ is prime.

Bài 1.7 / Problem 1.7 — Tìm tất cả bộ số nguyên (a, b, c) thỏa mãn $a^2 + b^2 = 3c^2$.

Find all integer triples (a, b, c) with $a^2 + b^2 = 3c^2$.

Bài 1.8 / Problem 1.8 — Cho tập X có 100 phần tử và $A, B, C \subset X$ với $|A| = 60$, $|B| = 70$, $|C| = 80$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|A \cap B \cap C|$.

Let X be a set of 100 elements and $A, B, C \subset X$ with $|A| = 60$, $|B| = 70$, $|C| = 80$. Find the least and the greatest value of $|A \cap B \cap C|$.

Mức 3 — Olympic quốc tế — Level 3 — International olympiad

Bài 1.9 / Problem 1.9 — Với mỗi số nguyên dương n , xét 2^n số có đúng n chữ số mà mọi chữ số đều bằng 1 hoặc 2. Chứng minh rằng trong các số đó có đúng một số chia hết cho 2^n .

For each positive integer n consider the 2^n numbers with exactly n digits, every digit being 1 or 2.

Prove that exactly one of them is divisible by 2^n .

Bài 1.10 / Problem 1.10 — Gọi $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ (dãy Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...). Chứng minh rằng mọi số nguyên dương n đều viết được thành tổng của một số hữu hạn các số F_k với $k \geq 2$, các chỉ số k đôi một khác nhau và không có hai chỉ số nào liên tiếp.

Let $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ (the Fibonacci sequence 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...). Prove that every positive integer n is a sum of finitely many numbers F_k with $k \geq 2$, the indices being pairwise distinct and no two of them consecutive.

Bài 1.11 / Problem 1.11 — Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n : $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2 < 5/3$.

Prove that for every positive integer n : $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2 < 5/3$.

Bài 1.12 / Problem 1.12 — Tính số ánh xạ từ tập $\{1, 2, \dots, n\}$ lên tập $\{1, 2, 3\}$ (toàn ánh) theo n bằng bao hàm – loại trừ, rồi chứng minh số đó chia hết cho 6 với mọi $n \geq 1$. Tính giá trị khi $n = 8$.

Count the surjective maps from $\{1, 2, \dots, n\}$ onto $\{1, 2, 3\}$ in terms of n by inclusion–exclusion, then prove the count is divisible by 6 for every $n \geq 1$. Evaluate for $n = 8$.

1.9. Lời giải bài tự luyện — *Solutions to practice problems*Bài 1.1 — *Problem 1.1*

1. $\neg P$: tồn tại số thực x sao cho với mọi số thực y , $x + y \neq xy$. $\neg Q$: với mọi số thực y tồn tại số thực x sao cho $x + y \neq xy$.
 $\neg P$: there is a real x such that $x + y \neq xy$ for every real y . $\neg Q$: for every real y there is a real x with $x + y \neq xy$.
2. P sai. Với $x = 1$: $x + y = 1 + y$ và $xy = y$, nên $x + y - xy = 1 \neq 0$ với mọi y . Vậy $\neg P$ đúng.
 P is false. For $x = 1$: $x + y = 1 + y$ and $xy = y$, so $x + y - xy = 1 \neq 0$ for every y . Hence $\neg P$ is true.
3. Q sai. Nếu có y thỏa mãn với mọi x thì $x = 0$ cho $y = 0$; khi đó $x = 1$ cho $1 + 0 = 0$, vô lý. Vậy $\neg Q$ đúng.
 Q is false. If some y worked for every x then $x = 0$ would force $y = 0$; then $x = 1$ would give $1 + 0 = 0$, absurd. Hence $\neg Q$ is true.

Vậy P và Q đều sai.

Hence P and Q are both false. ■

Bài 1.2 — *Problem 1.2*

1. Gọi A, B, C là tập các số trong $\{1, \dots, 300\}$ chia hết cho 3, 5, 7. $|A| = 100$, $|B| = 60$, $|C| = 42$.
Let A, B, C be the sets of numbers in $\{1, \dots, 300\}$ divisible by 3, 5, 7. $|A| = 100$, $|B| = 60$, $|C| = 42$.
2. Các số 3, 5, 7 đôi một nguyên tố cùng nhau nên giao tương ứng là bội của 15, 21, 35, 105: $|A \cap B| = 20$, $|A \cap C| = 14$, $|B \cap C| = 8$, $|A \cap B \cap C| = 2$.
The numbers 3, 5, 7 are pairwise coprime, so the intersections are multiples of 15, 21, 35, 105: $|A \cap B| = 20$, $|A \cap C| = 14$, $|B \cap C| = 8$, $|A \cap B \cap C| = 2$.
3. Theo (1.2): $|A \cup B \cup C| = 100 + 60 + 42 - 20 - 14 - 8 + 2 = 162$.
By (1.2): $|A \cup B \cup C| = 100 + 60 + 42 - 20 - 14 - 8 + 2 = 162$.

Vậy có $300 - 162 = 138$ số thỏa mãn.

Hence $300 - 162 = 138$ numbers qualify. ■

Bài 1.3 — *Problem 1.3*

1. Đặt $u_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$. Cơ sở: $u_1 = 5 + 2 + 1 = 8$ chia hết cho 8.
Put $u_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$. Base: $u_1 = 5 + 2 + 1 = 8$, divisible by 8.
2. Giả thiết $8 \mid u_k$. Ta có $5u_k = 5^{k+1} + 10 \cdot 3^{k-1} + 5$ và $u_{k+1} = 5^{k+1} + 6 \cdot 3^{k-1} + 1$.
Hypothesis $8 \mid u_k$. We have $5u_k = 5^{k+1} + 10 \cdot 3^{k-1} + 5$ and $u_{k+1} = 5^{k+1} + 6 \cdot 3^{k-1} + 1$.

$$u_{k+1} = 5u_k - 4(3^{k-1} + 1)$$
3. 3^{k-1} lẻ nên $3^{k-1} + 1$ chẵn, do đó $4(3^{k-1} + 1)$ chia hết cho 8. Cả hai số hạng của hiệu đều chia hết cho 8 nên $8 \mid u_{k+1}$.
 3^{k-1} is odd, so $3^{k-1} + 1$ is even and $4(3^{k-1} + 1)$ is divisible by 8. Both terms of the difference are divisible by 8, so $8 \mid u_{k+1}$.

Vậy $8 \mid u_n$ với mọi $n \geq 1$ theo nguyên lý quy nạp.

Hence $8 \mid u_n$ for all $n \geq 1$ by induction. ■

Bài 1.4 — Problem 1.4

1. Nếu n chẵn thì $f(n) = n + 1$ lẻ, nên $f(f(n)) = (n + 1) - 1 = n$. Nếu n lẻ thì $f(n) = n - 1$ chẵn, nên $f(f(n)) = (n - 1) + 1 = n$. Vậy $f(f(n)) = n$ với mọi n .
If n is even then $f(n) = n + 1$ is odd, so $f(f(n)) = (n + 1) - 1 = n$. If n is odd then $f(n) = n - 1$ is even, so $f(f(n)) = (n - 1) + 1 = n$. Hence $f(f(n)) = n$ for all n .
2. Đơn ánh: $f(a) = f(b)$ suy ra $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$. Toàn ánh: với mọi $m \in \mathbb{Z}$, $m = f(f(m))$ nên m là ảnh của $f(m)$. Vậy f là song ánh và $f^{-1} = f$.
Injective: $f(a) = f(b)$ gives $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$. Surjective: for every $m \in \mathbb{Z}$, $m = f(f(m))$ so m is the image of $f(m)$. So f is bijective and $f^{-1} = f$.
3. Điểm bất động: $f(n)$ luôn khác n về tính chẵn lẻ ($n + 1$ và $n - 1$ khác tính chẵn lẻ với n), nên $f(n) \neq n$.
Fixed points: $f(n)$ always has the opposite parity to n ($n + 1$ and $n - 1$ differ in parity from n), so $f(n) \neq n$.

Vậy f là song ánh, $f^{-1} = f$, và f không có điểm bất động.

Hence f is a bijection, $f^{-1} = f$, and f has no fixed point. ■

Bài 1.5 — Problem 1.5

1. $n = 1$: các tập con là $\emptyset$ và $\{1\}$, nên $a_1 = 2$. $n = 2$: $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ (tập $\{1, 2\}$ bị loại), nên $a_2 = 3$.
 $n = 1$: the subsets are $\emptyset$ and $\{1\}$, so $a_1 = 2$. $n = 2$: $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ (the set $\{1, 2\}$ is excluded), so $a_2 = 3$.
2. Với $n \geq 3$, chia các tập con hợp lệ của $\{1, \dots, n\}$ thành hai nhóm. Nhóm 1: không chứa n ; đó chính là các tập con hợp lệ của $\{1, \dots, n - 1\}$, có a_{n-1} tập.
For $n \geq 3$, split the valid subsets of $\{1, \dots, n\}$ into two groups. Group 1: not containing n ; these are exactly the valid subsets of $\{1, \dots, n - 1\}$, so there are a_{n-1} .
3. Nhóm 2: chứa n . Khi đó không chứa $n - 1$, và phần còn lại là một tập con hợp lệ bất kỳ của $\{1, \dots, n - 2\}$. Phép đặt tương ứng (bỏ n) là song ánh từ nhóm 2 lên tập các tập con hợp lệ của $\{1, \dots, n - 2\}$, nên nhóm 2 có a_{n-2} tập.
Group 2: containing n . Then $n - 1$ is absent, and the rest is an arbitrary valid subset of $\{1, \dots, n - 2\}$. Deleting n is a bijection from group 2 onto the valid subsets of $\{1, \dots, n - 2\}$, so group 2 has a_{n-2} sets.
4. Do đó $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Tính tiếp: $a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 13, a_6 = 21, a_7 = 34, a_8 = 55, a_9 = 89, a_{10} = 144$.
Hence $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Continuing: $a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 13, a_6 = 21, a_7 = 34, a_8 = 55, a_9 = 89, a_{10} = 144$.

Vậy $a_{10} = 144$.

Hence $a_{10} = 144$. ■

Bài 1.6 — Problem 1.6

1. Phân tích: $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$.
Factorise: $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$.
2. Nhân tử thứ hai bằng $(n - 1)^2 + 1 \geq 2$ khi $n \geq 2$. Nhân tử thứ nhất bằng $(n + 1)^2 + 1 > 2$. Cả hai nhân tử lớn hơn 1 nên tích là hợp số.
The second factor equals $(n - 1)^2 + 1 \geq 2$ for $n \geq 2$. The first equals $(n + 1)^2 + 1 > 2$. Both factors exceed 1, so the product is composite.
3. Còn $n = 1$: $1 + 4 = 5$ là số nguyên tố.
Remaining case $n = 1$: $1 + 4 = 5$ is prime.

Vậy $n^4 + 4$ là số nguyên tố khi và chỉ khi $n = 1$.

Hence $n^4 + 4$ is prime if and only if $n = 1$. ■

Bài 1.7 — Problem 1.7

1. Bộ $(0, 0, 0)$ là nghiệm. Giả sử có nghiệm khác $(0, 0, 0)$; lấy nghiệm có $|a| + |b| + |c|$ nhỏ nhất (tồn tại theo nguyên lý sắp thứ tự tốt).
The triple $(0, 0, 0)$ is a solution. Suppose another solution exists; take one with $|a| + |b| + |c|$ least (it exists by the well-ordering principle).
2. Vì $3 \mid a^2 + b^2$, theo Ví dụ 1.6 cả a và b chia hết cho 3: $a = 3a_1, b = 3b_1$.
Since $3 \mid a^2 + b^2$, Example 1.6 shows that a and b are divisible by 3: $a = 3a_1, b = 3b_1$.
3. Khi đó $9a_1^2 + 9b_1^2 = 3c^2$, tức $c^2 = 3(a_1^2 + b_1^2)$, nên $3 \mid c^2$ và $3 \mid c$: $c = 3c_1$.
Then $9a_1^2 + 9b_1^2 = 3c^2$, that is $c^2 = 3(a_1^2 + b_1^2)$, so $3 \mid c^2$ and $3 \mid c$: $c = 3c_1$.
4. Thay vào và chia cho 9: $a_1^2 + b_1^2 = 3c_1^2$. Bộ (a_1, b_1, c_1) là nghiệm khác $(0, 0, 0)$ với tổng giá trị tuyệt đối bằng một phần ba tổng ban đầu, nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất, mâu thuẫn.
Substituting and dividing by 9: $a_1^2 + b_1^2 = 3c_1^2$. The triple (a_1, b_1, c_1) is a solution different from $(0, 0, 0)$ whose sum of absolute values is a third of the original, below the least value: a contradiction.

Vậy nghiệm duy nhất là $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Hence the only solution is $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. ■

Bài 1.8 — Problem 1.8

1. Giá trị nhỏ nhất. Theo công thức De Morgan, $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$, với $|A^c| = 40, |B^c| = 30, |C^c| = 20$. Số phần tử của hợp không vượt quá tổng $40 + 30 + 20 = 90$, nên $|A \cap B \cap C| \geq 100 - 90 = 10$.
Least value. By De Morgan's law, $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$, with $|A^c| = 40, |B^c| = 30, |C^c| = 20$. The union has at most $40 + 30 + 20 = 90$ elements, so $|A \cap B \cap C| \geq 100 - 90 = 10$.
2. Đạt được: lấy $X = \{1, \dots, 100\}, A^c = \{1, \dots, 40\}, B^c = \{41, \dots, 70\}, C^c = \{71, \dots, 90\}$. Ba phần bù đôi một rời nhau nên $A \cap B \cap C = \{91, \dots, 100\}$ có 10 phần tử.
Attained: take $X = \{1, \dots, 100\}, A^c = \{1, \dots, 40\}, B^c = \{41, \dots, 70\}, C^c = \{71, \dots, 90\}$. The three complements are pairwise disjoint, so $A \cap B \cap C = \{91, \dots, 100\}$ has 10 elements.

3. Giá trị lớn nhất. $A \cap B \cap C \subset A$ nên $|A \cap B \cap C| \leq 60$. Đạt được khi $A = \{1, \dots, 60\} \subset B = \{1, \dots, 70\} \subset C = \{1, \dots, 80\}$, khi đó $A \cap B \cap C = A$ có 60 phần tử.

Greatest value. $A \cap B \cap C \subset A$ gives $|A \cap B \cap C| \leq 60$. It is attained for $A = \{1, \dots, 60\} \subset B = \{1, \dots, 70\} \subset C = \{1, \dots, 80\}$, where $A \cap B \cap C = A$ has 60 elements.

Vậy giá trị nhỏ nhất là 10 và giá trị lớn nhất là 60.

Hence the least value is 10 and the greatest is 60. ■

Bài 1.9 — Problem 1.9

1. Mỗi số có dạng $N(e) = \sum (1 + e_i) \cdot 10^i$ với i chạy từ 0 đến $n - 1$ và $e_i \in \{0, 1\}$; có 2^n dãy $e = (e_0, \dots, e_{n-1})$, ứng với 2^n số khác nhau.

Each such number has the form $N(e) = \sum (1 + e_i) \cdot 10^i$, i running from 0 to $n - 1$ with $e_i \in \{0, 1\}$; there are 2^n sequences $e = (e_0, \dots, e_{n-1})$, giving 2^n different numbers.

2. Lấy hai dãy khác nhau $e \neq e'$ và gọi j là chỉ số nhỏ nhất mà $e_j \neq e'_j$. Khi đó $N(e) - N(e') = \pm 10^j + \sum_{i>j} (e_i - e'_i) \cdot 10^i$. Mọi số hạng trong tổng này chia hết cho 2^{j+1} (vì $10^i = 2^i \cdot 5^i$ với $i \geq j + 1$).

Take two different sequences $e \neq e'$ and let j be the least index with $e_j \neq e'_j$. Then $N(e) - N(e') = \pm 10^j + \sum_{i>j} (e_i - e'_i) \cdot 10^i$. Every term of the sum is divisible by 2^{j+1} (since $10^i = 2^i \cdot 5^i$ with $i \geq j + 1$).

3. Còn $10^j = 2^j \cdot 5^j$ với 5^j lẻ, nên 10^j chia hết cho 2^j nhưng không chia hết cho 2^{j+1} . Suy ra hiệu $N(e) - N(e')$ không chia hết cho 2^{j+1} , mà $j + 1 \leq n$ nên cũng không chia hết cho 2^n .

And $10^j = 2^j \cdot 5^j$ with 5^j odd, so 10^j is divisible by 2^j but not by 2^{j+1} . Hence $N(e) - N(e')$ is not divisible by 2^{j+1} , and since $j + 1 \leq n$ it is not divisible by 2^n either.

4. Vậy 2^n số trên có 2^n số dư khác nhau khi chia cho 2^n . Ánh xạ từ tập 2^n số vào tập 2^n số dư $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ là đơn ánh nên theo Định lý 1.11 là song ánh: mỗi số dư, kể cả 0, xuất hiện đúng một lần.

So the 2^n numbers leave 2^n different remainders on division by 2^n . The map from the set of 2^n numbers into the set of 2^n remainders $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ is injective, hence bijective by Theorem 1.11: each remainder, 0 included, occurs exactly once.

Vậy có đúng một số trong 2^n số chia hết cho 2^n .

Hence exactly one of the 2^n numbers is divisible by 2^n . ■

Bài 1.10 — Problem 1.10

1. Dãy $F_2 = 1 < F_3 = 2 < F_4 = 3 < \dots$ tăng ngặt (vì $F_{k+1} = F_k + F_{k-1} > F_k$). Ta quy nạp mạnh theo n . Cơ sở: $1 = F_2$.

The sequence $F_2 = 1 < F_3 = 2 < F_4 = 3 < \dots$ is strictly increasing (since $F_{k+1} = F_k + F_{k-1} > F_k$). Use strong induction on n . Base: $1 = F_2$.

2. Cho $n \geq 2$ và giả sử khẳng định đúng với mọi số nguyên dương nhỏ hơn n . Vì $F_3 = 2 \leq n$ và dãy tăng không giới hạn, tồn tại $k \geq 3$ lớn nhất sao cho $F_k \leq n$; khi đó $F_k \leq n < F_{k+1}$.

Let $n \geq 2$ and assume the claim for all smaller positive integers. Since $F_3 = 2 \leq n$ and the sequence is unbounded, there is a largest $k \geq 3$ with $F_k \leq n$; then $F_k \leq n < F_{k+1}$.

3. Nếu $n = F_k$ thì xong. Nếu không, đặt $m = n - F_k$; khi đó $1 \leq m < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$, và $m < n$. Theo giả thiết quy nạp, m là tổng các số Fibonacci có chỉ số đôi một cách nhau ít nhất 2. Gọi F_j là số hạng có chỉ số lớn nhất trong tổng đó.

If $n = F_k$ we are done. Otherwise put $m = n - F_k$; then $1 \leq m < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$, and $m < n$. By the hypothesis m is a sum of Fibonacci numbers whose indices are pairwise at least 2 apart. Let F_j be the term with the largest index in that sum.

4. Do $F_j \leq m < F_{k-1}$ và dãy tăng ngặt từ chỉ số 2 (mà $k - 1 \geq 2$), ta có $j < k - 1$, tức $j \leq k - 2$. Thêm F_k vào tổng của m : chỉ số k cách chỉ số lớn nhất j ít nhất 2, các chỉ số còn lại vẫn cách nhau ít nhất 2.

Since $F_j \leq m < F_{k-1}$ and the sequence is strictly increasing from index 2 (with $k - 1 \geq 2$), we get $j < k - 1$, that is $j \leq k - 2$. Add F_k to the sum for m : the index k is at least 2 above the largest index j , and the other indices remain at least 2 apart.

Vậy $n = F_k + m$ có biểu diễn cần tìm, và theo quy nạp mạnh khẳng định đúng với mọi $n \geq 1$.

Hence $n = F_k + m$ has the required representation, and by strong induction the claim holds for every $n \geq 1$. ■

Bài 1.11 — Problem 1.11

1. Đặt $S_n = 1 + 1/2^2 + \dots + 1/n^2$. Quy nạp trực tiếp với $S_n < 5/3$ không đi được: từ $S_k < 5/3$ không suy ra $S_k + 1/(k+1)^2 < 5/3$. Cần tăng cường: chứng minh với mọi $n \geq 1$
- Put $S_n = 1 + 1/2^2 + \dots + 1/n^2$. Direct induction on $S_n < 5/3$ fails: $S_k < 5/3$ does not give $S_k + 1/(k+1)^2 < 5/3$. Strengthen the claim: prove for every $n \geq 1$*

$$S_n \leq 5/3 - 2/(2n+1) \quad (1.4)$$

2. Cơ sở $n = 1$: $S_1 = 1$ và $5/3 - 2/3 = 1$, đẳng thức đúng.
Base $n = 1$: $S_1 = 1$ and $5/3 - 2/3 = 1$, so (1.4) holds with equality.
3. Giả thiết (1.4) đúng với k . Khi đó $S_{k+1} \leq 5/3 - 2/(2k+1) + 1/(k+1)^2$. Ta cần số này không vượt quá $5/3 - 2/(2k+3)$, tức là $1/(k+1)^2 \leq 2/(2k+1) - 2/(2k+3) = 4/((2k+1)(2k+3))$.
Assume (1.4) for k . Then $S_{k+1} \leq 5/3 - 2/(2k+1) + 1/(k+1)^2$. We need this not to exceed $5/3 - 2/(2k+3)$, that is, $1/(k+1)^2 \leq 2/(2k+1) - 2/(2k+3) = 4/((2k+1)(2k+3))$.
4. Bất đẳng thức đó tương đương $(2k+1)(2k+3) \leq 4(k+1)^2$, hay $4k^2 + 8k + 3 \leq 4k^2 + 8k + 4$, đúng. Vậy (1.4) đúng với $k+1$.
That inequality is equivalent to $(2k+1)(2k+3) \leq 4(k+1)^2$, that is $4k^2 + 8k + 3 \leq 4k^2 + 8k + 4$, which is true. So (1.4) holds for $k+1$.

Vậy với mọi $n \geq 1$: $S_n \leq 5/3 - 2/(2n+1) < 5/3$.

Hence for every $n \geq 1$: $S_n \leq 5/3 - 2/(2n+1) < 5/3$. ■

Bài 1.12 — Problem 1.12

1. Có 3^n ánh xạ từ $\{1, \dots, n\}$ vào $\{1, 2, 3\}$. Gọi A_i là tập các ánh xạ không nhận giá trị i ($i = 1, 2, 3$). Ánh xạ không toàn ánh khi và chỉ khi thuộc $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

There are 3^n maps from $\{1, \dots, n\}$ into $\{1, 2, 3\}$. Let A_i be the set of maps never taking the value i ($i = 1, 2, 3$). A map fails to be surjective exactly when it lies in $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

2. $|A_i| = 2^n$ (mỗi phần tử có 2 giá trị cho phép); $A_i \cap A_j$ ($i \neq j$) chỉ gồm ánh xạ hằng bằng giá trị còn lại, nên $|A_i \cap A_j| = 1$; $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ vì $n \geq 1$ và ánh phải là một giá trị nào đó.
 $|A_i| = 2^n$ (each element has 2 allowed values); $A_i \cap A_j$ ($i \neq j$) consists only of the constant map onto the remaining value, so $|A_i \cap A_j| = 1$; $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ since $n \geq 1$ and an element must map somewhere.
3. Theo (1.2): $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 1 + 0$. Do đó số toàn ánh bằng $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.
By (1.2): $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 1 + 0$. Hence the number of surjections is $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.
4. Chia hết cho 2: 3^n lẻ, $3 \cdot 2^n$ chẵn, 3 lẻ nên lẻ – chẵn + lẻ là số chẵn. Chia hết cho 3: với $n \geq 1$, $3 \mid 3^n$, $3 \mid 3 \cdot 2^n$ và $3 \mid 3$. Vì 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên số đó chia hết cho 6.
Divisible by 2: 3^n is odd, $3 \cdot 2^n$ is even, 3 is odd, so odd – even + odd is even. Divisible by 3: for $n \geq 1$, $3 \mid 3^n$, $3 \mid 3 \cdot 2^n$ and $3 \mid 3$. As 2 and 3 are coprime the count is divisible by 6.
5. Với $n = 8$: $3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 = 6561 - 768 + 3 = 5796 = 6 \cdot 966$.
For $n = 8$: $3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 = 6561 - 768 + 3 = 5796 = 6 \cdot 966$.

Vậy số toàn ánh bằng $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$, chia hết cho 6, và bằng 5796 khi $n = 8$.

Hence the number of surjections is $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$, divisible by 6, and equals 5796 for $n = 8$. ■

Chương 2. Các bất đẳng thức cổ điển — Chapter 2. Classical inequalities

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Biến đổi tương đương và dùng bình phương để chứng minh một bất đẳng thức, kể cả khi phải thêm bớt hạng tử.
Prove an inequality by equivalent transformations and by completing squares, including when terms must be added and subtracted.
- Chứng minh và dùng AM–GM cho 2, 3 và n số, chọn điểm rơi đúng trước khi tách hạng tử.
Prove and use AM–GM for 2, 3 and n numbers, choosing the equality point before splitting terms.
- Dùng Cauchy–Schwarz (dạng tổng và dạng Engel), bất đẳng thức hoán vị và Chebyshev.
Use Cauchy–Schwarz (the sum form and the Engel form), the rearrangement inequality and Chebyshev's inequality.
- Nắm chuỗi trung bình $HM \leq GM \leq AM \leq QM$, bất đẳng thức Bernoulli, trị tuyệt đối, bất đẳng thức tam giác và Nesbitt.
Know the chain $HM \leq GM \leq AM \leq QM$, Bernoulli's inequality, absolute values, the triangle inequality and Nesbitt's inequality.
- Giải bài tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất có điều kiện và chứng minh giá trị đó thật sự đạt được.
Solve constrained maximum and minimum problems and prove that the extreme value is actually attained.

2.1. Thứ tự trên $\mathbb{R}$, biến đổi tương đương và bình phương — Order on $\mathbb{R}$, equivalent transformations and squares

Chứng minh một bất đẳng thức quy về một nhận xét: hiệu hai vế có dấu xác định. Ta bắt đầu từ định nghĩa thứ tự và các phép biến đổi giữ nguyên chiều bất đẳng thức.

Proving an inequality comes down to one observation: the difference of the two sides has a definite sign. We start from the definition of the order and the operations that keep the direction of an inequality.

ĐỊNH NGHĨA 2.1 (Thứ tự trên $\mathbb{R}$) / DEFINITION 2.1 (Order on $\mathbb{R}$) — Với hai số thực a, b , ta viết $a \geq b$ nếu $a - b \geq 0$, và viết $a > b$ nếu $a - b > 0$. Chứng minh $a \geq b$ nghĩa là chứng minh hiệu $a - b$ không âm.

For real numbers a, b we write $a \geq b$ if $a - b \geq 0$, and $a > b$ if $a - b > 0$. To prove $a \geq b$ means to prove that the difference $a - b$ is non-negative.

TÍNH CHẤT 2.2 (Các phép biến đổi bảo toàn bất đẳng thức) / PROPERTY 2.2 (Operations that preserve an inequality) — Với a, b, c, d là các số thực:

- (i) Nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$. Nếu $a \geq b$ và $c \geq d$ thì $a + c \geq b + d$.
- (ii) Nếu $a \geq b$ và $c > 0$ thì $ac \geq bc$; nếu $a \geq b$ và $c < 0$ thì $ac \leq bc$.

- (iii) Nếu $a \geq b \geq 0$ và $c \geq d \geq 0$ thì $ac \geq bd$.
 (iv) Nếu $a \geq b > 0$ thì $1/a \leq 1/b$.
 (v) Với $a, b \geq 0$ và $n \in \mathbb{Z}^+$: $a \geq b$ khi và chỉ khi $a^n \geq b^n$.

For real numbers a, b, c, d :

- (i) If $a \geq b$ then $a + c \geq b + c$. If $a \geq b$ and $c \geq d$ then $a + c \geq b + d$.
 (ii) If $a \geq b$ and $c > 0$ then $ac \geq bc$; if $a \geq b$ and $c < 0$ then $ac \leq bc$.
 (iii) If $a \geq b \geq 0$ and $c \geq d \geq 0$ then $ac \geq bd$.
 (iv) If $a \geq b > 0$ then $1/a \leq 1/b$.
 (v) For $a, b \geq 0$ and $n \in \mathbb{Z}^+$: $a \geq b$ if and only if $a^n \geq b^n$.

Chứng minh. / Proof.

(i) Hiệu $(a + c) - (b + c)$ bằng $a - b \geq 0$. Với bất đẳng thức thứ hai, $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$, tổng hai số không âm.

(i) The difference $(a + c) - (b + c)$ equals $a - b \geq 0$. For the second inequality, $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$, a sum of two non-negative numbers.

(ii) $ac - bc = c(a - b)$; dấu của tích là dấu của c khi $a - b > 0$, và bằng 0 khi $a = b$.

(ii) $ac - bc = c(a - b)$; this has the sign of c when $a - b > 0$, and equals 0 when $a = b$.

(iii) $ac - bd = c(a - b) + b(c - d)$. Vì $c \geq 0, b \geq 0$ nên cả hai số hạng không âm.

(iii) $ac - bd = c(a - b) + b(c - d)$. Since $c \geq 0$ and $b \geq 0$, both terms are non-negative.

(iv) $1/b - 1/a = (a - b)/(ab) \geq 0$ vì $a - b \geq 0$ và $ab > 0$.

(iv) $1/b - 1/a = (a - b)/(ab) \geq 0$ because $a - b \geq 0$ and $ab > 0$.

(v) Chiều thuận: áp dụng (iii) $n - 1$ lần. Chiều đảo: nếu $a < b$ thì $b > 0$, và $a^n < b^n$ (với $a = 0$ hiển nhiên, với $a > 0$ nhân n bất đẳng thức chặt giữa các số dương), trái với $a^n \geq b^n$. Vậy $a \geq b$.

(v) Forward direction: apply (iii) $n - 1$ times. Converse: if $a < b$ then $b > 0$ and $a^n < b^n$ (trivial for $a = 0$; for $a > 0$ multiply n strict inequalities between positive numbers), contradicting $a^n \geq b^n$. Hence $a \geq b$. ■

TÍNH CHẤT 2.3 (Ba đồng nhất thức hay dùng) / PROPERTY 2.3 (Three frequently used identities) — Với mọi số thực a, b, c , đặt $p = a + b + c$ và $q = ab + bc + ca$:

(a) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2q$;

(b) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$;

(c) $(a + b)(b + c)(c + a) = p \cdot q - abc$.

For all real a, b, c , put $p = a + b + c$ and $q = ab + bc + ca$:

(a) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2q$;

(b) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$;

(c) $(a + b)(b + c)(c + a) = p \cdot q - abc$.

Chứng minh. / Proof.

(a) Khai triển trực tiếp ba bình phương và ba tích đôi. (b) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

(a) Expand the three squares and the three cross terms directly. (b) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

(c) Vì $a + b = p - c$, $b + c = p - a$, $c + a = p - b$, nên tích bằng $(p - a)(p - b)(p - c) = p^3 - p^2 \cdot (a + b + c) + p \cdot q - abc = p \cdot q - abc$.

(c) Since $a + b = p - c$, $b + c = p - a$, $c + a = p - b$, the product equals $(p - a)(p - b)(p - c) = p^3 - p^2 \cdot (a + b + c) + p \cdot q - abc = p \cdot q - abc$. ■

TÍNH CHẤT 2.4 (So sánh phân số) / PROPERTY 2.4 (Comparing fractions) — Với $b, d > 0$: (i) $a/b \geq c/d$ khi và chỉ khi $ad \geq bc$; (ii) nếu $a/b \geq c/d$ thì $a/b \geq (a + c)/(b + d) \geq c/d$.
For $b, d > 0$: (i) $a/b \geq c/d$ if and only if $ad \geq bc$; (ii) if $a/b \geq c/d$ then $a/b \geq (a + c)/(b + d) \geq c/d$.

Chứng minh. / Proof.

(i) Nhân hai vế với $bd > 0$ (Tính chất 2.2(ii), hai chiều vì nhân với số dương và chia cho số dương đều giữ chiều).

(i) Multiply both sides by $bd > 0$ (Property 2.2(ii); it works both ways since multiplying and dividing by a positive number keep the direction).

(ii) Theo (i), $ad \geq bc$. Vì $b + d > 0$: $a/b - (a + c)/(b + d) = (a(b + d) - b(a + c))/(b(b + d)) = (ad - bc)/(b(b + d)) \geq 0$, và $(a + c)/(b + d) - c/d = (d(a + c) - c(b + d))/(d(b + d)) = (ad - bc)/(d(b + d)) \geq 0$.

(ii) By (i), $ad \geq bc$. Since $b + d > 0$: $a/b - (a + c)/(b + d) = (a(b + d) - b(a + c))/(b(b + d)) = (ad - bc)/(b(b + d)) \geq 0$, and $(a + c)/(b + d) - c/d = (d(a + c) - c(b + d))/(d(b + d)) = (ad - bc)/(d(b + d)) \geq 0$. ■

Bình phương của số thực không âm là nguồn gốc của hầu hết bất đẳng thức sơ cấp. Ba bất đẳng thức sau xử lý được nhiều bài ở mức tỉnh.

The square of a real number is non-negative, and this is the source of most elementary inequalities. The next three inequalities handle many provincial-level problems.

BỔ ĐỀ 2.5 (Bình phương không âm) / LEMMA 2.5 (Squares are non-negative) — Với mọi số thực x, y, z :

(a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$, dấu bằng khi và chỉ khi $x = y$;

(b) $(x + y)^2 \geq 4xy$, dấu bằng khi và chỉ khi $x = y$;

(c) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, dấu bằng khi và chỉ khi $x = y = z$.

For all real x, y, z :

(a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$, with equality if and only if $x = y$;

(b) $(x + y)^2 \geq 4xy$, with equality if and only if $x = y$;

(c) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, with equality if and only if $x = y = z$.

Chứng minh. / Proof.

(a) $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$. (b) $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 \geq 0$. (c) Ta có đồng nhất thức
(a) $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$. (b) $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 \geq 0$. (c) We have the identity

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (1/2) \cdot [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \quad (2.1)$$

Vế phải không âm. Nó bằng 0 khi và chỉ khi $x - y = y - z = z - x = 0$, tức $x = y = z$.

The right-hand side is non-negative. It equals 0 if and only if $x - y = y - z = z - x = 0$, that is $x = y = z$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho x, y, z cùng với hạng tử $2z^2$ và tích $z(x + y)$: hai tích xz, yz xuất hiện cạnh x^2, y^2, z^2 . Ghép mỗi tích với một bình phương: z^2 đứng cạnh x^2 và xz , z^2 đứng cạnh y^2 và yz . Mỗi nhóm có dạng $a^2 + b^2 - 2ab$.

The statement contains x, y, z with the term $2z^2$ and the product $z(x + y)$: the products xz and yz appear next to x^2, y^2 and z^2 . Pair each product with a square: one z^2 sits with x^2 and xz , the other z^2 with y^2 and yz . Each group has the shape $a^2 + b^2 - 2ab$.

VÍ DỤ 2.1 (Nhóm thành bình phương) / EXAMPLE 2.1 (Grouping into squares) —

Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z : $x^2 + y^2 + 2z^2 \geq 2z(x + y)$. Tìm các bộ (x, y, z) để dấu bằng xảy ra.

Prove that for all real x, y, z : $x^2 + y^2 + 2z^2 \geq 2z(x + y)$. Find all triples (x, y, z) for which equality holds.

Lời giải. / Solution.

Tách $2z^2 = z^2 + z^2$ và nhóm lại:

Split $2z^2 = z^2 + z^2$ and regroup:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2zx - 2zy = (x^2 - 2zx + z^2) + (y^2 - 2zy + z^2) = (x - z)^2 + (y - z)^2$$

Tổng hai bình phương không âm nên bất đẳng thức đúng.

A sum of two squares is non-negative, so the inequality holds.

Dấu bằng khi và chỉ khi $x - z = 0$ và $y - z = 0$, tức $x = y = z$.

Equality holds if and only if $x - z = 0$ and $y - z = 0$, that is $x = y = z$.

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi x, y, z và dấu bằng đạt khi $x = y = z$.

Hence the inequality holds for all x, y, z , with equality exactly when $x = y = z$. ■

VÍ DỤ 2.2 (Dùng bổ đề hai lần) / EXAMPLE 2.2 (Using a lemma twice) — Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c : $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

Prove that for all real a, b, c : $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

Lời giải. / Solution.

Áp dụng Bổ đề 2.5(c) hai lần. Lần thứ nhất với bộ ba $(x, y, z) = (a^2, b^2, c^2)$:

Apply Lemma 2.5(c) twice. First with the triple $(x, y, z) = (a^2, b^2, c^2)$:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

Lần thứ hai với bộ ba $(x, y, z) = (ab, bc, ca)$, chú ý $xy + yz + zx = ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab = abc(b + c + a)$:

Then with the triple $(x, y, z) = (ab, bc, ca)$, noting $xy + yz + zx = ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab = abc(b + c + a)$:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab = abc(a + b + c)$$

Nói hai bất đẳng thức ta được điều phải chứng minh. Dấu bằng khi $a^2 = b^2 = c^2$ và $ab = bc = ca$, chẳng hạn $a = b = c$.

Chaining the two inequalities gives the claim. Equality needs $a^2 = b^2 = c^2$ and $ab = bc = ca$, for instance $a = b = c$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Với x, y, z không âm, Bổ đề 2.5(c) còn viết được dưới dạng $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$. Dạng này tiện khi biết tổng $x + y + z$ và cần chặn trên tổng các tích đôi một.

For non-negative x, y, z , Lemma 2.5(c) can be written as $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$. This form is convenient when the sum $x + y + z$ is known and the sum of pairwise products must be bounded above.

NHẬN XÉT / REMARK — Cân bằng hệ số trước khi dùng $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Với $\alpha > 0$, áp dụng cho $\sqrt{\alpha} \cdot x$ và $y/\sqrt{\alpha}$: $\alpha x^2 + y^2/\alpha \geq 2xy$. Ví dụ $3x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot xy$ với mọi x, y thực: lấy $\alpha = \sqrt{(3/2)}$; dấu bằng khi $3x^2 = 2y^2$. Hệ số α được chọn để hai bình phương bằng nhau tại điểm rơi. Balance the coefficients before using $x^2 + y^2 \geq 2xy$. For $\alpha > 0$, apply it to $\sqrt{\alpha} \cdot x$ and $y/\sqrt{\alpha}$: $\alpha x^2 + y^2/\alpha \geq 2xy$. For example $3x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot xy$ for all real x, y : take $\alpha = \sqrt{(3/2)}$; equality when $3x^2 = 2y^2$. The coefficient α is chosen so that the two squares are equal at the equality point.

ĐỊNH LÝ 2.6 (Dấu tam thức bậc hai) / THEOREM 2.6 (Sign of a quadratic trinomial)

— Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$. Khi đó $f(x) \geq 0$ với mọi số thực x khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$.

Let $f(x) = ax^2 + bx + c$ with $a > 0$. Then $f(x) \geq 0$ for every real x if and only if $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$.

Chứng minh. / Proof.

Hoàn thành bình phương: $f(x) = a \cdot [(x + b/(2a))^2 - \Delta/(4a^2)]$. Nếu $\Delta \leq 0$ thì ngoặc bằng $(x + b/(2a))^2 + (-\Delta)/(4a^2)$, tổng hai số không âm, nên $f(x) \geq 0$. Nếu $\Delta > 0$, tại $x = -b/(2a)$ giá trị $f = -\Delta/(4a) < 0$.

Complete the square: $f(x) = a \cdot [(x + b/(2a))^2 - \Delta/(4a^2)]$. If $\Delta \leq 0$ the bracket equals $(x + b/(2a))^2 + (-\Delta)/(4a^2)$, a sum of two non-negative numbers, and $f(x) \geq 0$. If $\Delta > 0$, at $x = -b/(2a)$ the value is $f = -\Delta/(4a) < 0$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Dùng Định lý 2.6 như một công cụ chứng minh: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ với mọi x, y thực. Xem về hiệu như tam thức theo x : $x^2 - (y + 1)x + (y^2 - y + 1)$, hệ số cao nhất $1 > 0$, $\Delta = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y + 1) = -3y^2 + 6y - 3 = -3(y - 1)^2 \leq 0$. Vậy hiệu không âm, và dấu bằng cần $y = 1$ rồi $x = (y + 1)/2 = 1$.

Using Theorem 2.6 as a proof tool: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ for all real x, y . View the difference as a trinomial in x : $x^2 - (y + 1)x + (y^2 - y + 1)$, leading coefficient $1 > 0$, $\Delta = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y + 1) = -3y^2 + 6y - 3 = -3(y - 1)^2 \leq 0$. So the difference is non-negative, and equality needs $y = 1$ and then $x = (y + 1)/2 = 1$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Bình phương hai vế khi một vế có thể âm. Từ $a > b$ không suy ra $a^2 > b^2$: $a = 1, b = -2$ cho $1 < 4$. Chỉ được bình phương khi cả hai vế không âm (tính chất (v) ở trên).

Squaring both sides when one side may be negative. From $a > b$ one cannot deduce $a^2 > b^2$: $a = 1, b = -2$ gives $1 < 4$. Squaring is allowed only when both sides are non-negative (property (v) above).

2.2. Bất đẳng thức AM–GM và kỹ thuật điểm rơi — *The AM–GM inequality and the equality-point technique*

ĐỊNH LÝ 2.7 (AM–GM hai số) / THEOREM 2.7 (Two-term AM–GM) — Với mọi $a, b \geq 0$: $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$. Dấu bằng khi và chỉ khi $a = b$.
For all $a, b \geq 0$: $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$, with equality if and only if $a = b$.

Chứng minh. / *Proof.*

Đặt $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$. Theo Bổ đề 2.5(a): $a + b = x^2 + y^2 \geq 2xy = 2\sqrt{ab}$, dấu bằng khi $x = y$, tức $a = b$.

Put $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$. By Lemma 2.5(a): $a + b = x^2 + y^2 \geq 2xy = 2\sqrt{ab}$, with equality when $x = y$, that is $a = b$. ■

ĐỊNH LÝ 2.8 (AM–GM ba số) / THEOREM 2.8 (Three-term AM–GM) — Với mọi $a, b, c \geq 0$: $(a + b + c)/3 \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng khi và chỉ khi $a = b = c$.
For all $a, b, c \geq 0$: $(a + b + c)/3 \geq \sqrt[3]{abc}$, with equality if and only if $a = b = c$.

Chứng minh. / *Proof.*

Đặt $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$, các số không âm. Ta dùng đồng nhất thức (kiểm tra bằng khai triển):

Put $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$, all non-negative. We use the identity (check by expanding):

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \quad (2.2)$$

Thừa số thứ nhất không âm; thừa số thứ hai không âm theo (2.1). Vậy $a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \geq 0$.

The first factor is non-negative; the second is non-negative by (2.1). Hence $a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \geq 0$.

Dấu bằng khi $x + y + z = 0$ (suy ra $x = y = z = 0$) hoặc $x = y = z$. Cả hai trường hợp cho $a = b = c$.

Equality needs $x + y + z = 0$ (which forces $x = y = z = 0$) or $x = y = z$. Both cases give $a = b = c$. ■

ĐỊNH LÝ 2.9 (AM–GM n số) / THEOREM 2.9 (n-term AM–GM) — Với n số không âm $a_1, \dots, a_n$: $(a_1 + \dots + a_n)/n \geq (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{1/n}$. Dấu bằng khi và chỉ khi $a_1 = \dots = a_n$.
For n non-negative numbers $a_1, \dots, a_n$: $(a_1 + \dots + a_n)/n \geq (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{1/n}$, with equality if and only if $a_1 = \dots = a_n$.

Chứng minh. / *Proof.*

Nếu một số bằng 0 thì vế phải bằng 0, bất đẳng thức hiển nhiên, và dấu bằng chỉ xảy ra khi mọi số bằng 0. Xét các số dương. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "bất đẳng thức và điều kiện dấu bằng đúng với n số dương". Ta dùng quy nạp Cauchy (quy nạp lên và lùi xuống).

If some number is 0 the right-hand side is 0, the inequality is clear, and equality forces all numbers to be 0. Consider positive numbers. Let $P(n)$ be the statement "the inequality and its

equality condition hold for n positive numbers". We use Cauchy's induction (go up, then step down).

1. $P(2)$ đúng theo Định lý 2.7.

$P(2)$ holds by Theorem 2.7.

2. $P(n) \Rightarrow P(2n)$. Chia $2n$ số thành hai nhóm n số, có trung bình cộng A_1, A_2 và trung bình nhân G_1, G_2 . Theo $P(n)$, $A_1 \geq G_1, A_2 \geq G_2$. Theo $P(2)$: trung bình cộng của $2n$ số bằng $(A_1 + A_2)/2 \geq (G_1 + G_2)/2 \geq \sqrt{(G_1 G_2)}$, mà $\sqrt{(G_1 G_2)}$ chính là trung bình nhân của $2n$ số. Dấu bằng buộc $A_1 = G_1, A_2 = G_2$ và $G_1 = G_2$; theo $P(n)$ mỗi nhóm gồm các số bằng nhau, và hai nhóm có cùng trung bình nhân nên mọi số bằng nhau.

$P(n) \Rightarrow P(2n)$. Split the $2n$ numbers into two groups of n , with arithmetic means A_1, A_2 and geometric means G_1, G_2 . By $P(n)$, $A_1 \geq G_1$ and $A_2 \geq G_2$. By $P(2)$: the arithmetic mean of the $2n$ numbers is $(A_1 + A_2)/2 \geq (G_1 + G_2)/2 \geq \sqrt{(G_1 G_2)}$, and $\sqrt{(G_1 G_2)}$ is exactly the geometric mean of the $2n$ numbers. Equality forces $A_1 = G_1, A_2 = G_2$ and $G_1 = G_2$; by $P(n)$ each group consists of equal numbers, and the two groups share the same geometric mean, so all numbers are equal.

3. $P(n) \Rightarrow P(n-1)$ với $n \geq 3$. Cho $n-1$ số dương $x_1, \dots, x_{n-1}$ có trung bình cộng m . Áp dụng $P(n)$ cho n số $x_1, \dots, x_{n-1}, m$: trung bình cộng của chúng vẫn bằng m , nên $m \geq (x_1 \cdots x_{n-1} \cdot m)^{1/n}$. Lũy thừa n hai vế (cả hai dương): $m^n \geq x_1 \cdots x_{n-1} \cdot m$, tức $m^{n-1} \geq x_1 \cdots x_{n-1}$. Dấu bằng khi đó là dấu bằng của $P(n)$, buộc $x_1 = \dots = x_{n-1} = m$.

$P(n) \Rightarrow P(n-1)$ for $n \geq 3$. Take $n-1$ positive numbers $x_1, \dots, x_{n-1}$ with arithmetic mean m . Apply $P(n)$ to the n numbers $x_1, \dots, x_{n-1}, m$: their arithmetic mean is still m , so $m \geq (x_1 \cdots x_{n-1} \cdot m)^{1/n}$. Raise both (positive) sides to the power n : $m^n \geq x_1 \cdots x_{n-1} \cdot m$, that is $m^{n-1} \geq x_1 \cdots x_{n-1}$. Equality here is equality in $P(n)$, which forces $x_1 = \dots = x_{n-1} = m$.

Từ $P(2)$, bước 2 cho $P(4), P(8), P(16), \dots$, tức $P(2^k)$ với mọi k ; với n bất kỳ chọn $2^k \geq n$ rồi lùi bằng bước 3 từng đơn vị xuống n . Vậy $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 2$.

From $P(2)$, step 2 gives $P(4), P(8), P(16), \dots$, that is $P(2^k)$ for every k ; for any n pick $2^k \geq n$ and step down one unit at a time with step 3. Hence $P(n)$ holds for all $n \geq 2$. ■

HỆ QUẢ 2.10 / COROLLARY 2.10 — Nếu $x_1, \dots, x_n > 0$ và $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$ thì $x_1 + \dots + x_n \geq n$, dấu bằng khi và chỉ khi mọi $x_i = 1$.

If $x_1, \dots, x_n > 0$ and $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$ then $x_1 + \dots + x_n \geq n$, with equality if and only if every $x_i = 1$.

Chứng minh. / Proof.

Theo Định lý 2.9: $(x_1 + \dots + x_n)/n \geq 1^{1/n} = 1$, dấu bằng khi các số bằng nhau; khi đó mỗi số bằng 1 vì tích bằng 1.

By Theorem 2.9: $(x_1 + \dots + x_n)/n \geq 1^{1/n} = 1$, with equality when the numbers are equal; then each equals 1 because the product is 1. ■

ĐỊNH NGHĨA 2.11 (Điểm rơi) / DEFINITION 2.11 (Equality point) — Cho biểu thức f cần tìm giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) trên một miền. Điểm rơi là bộ giá trị của các biến tại đó giá trị ấy đạt được. Khi dùng AM–GM, điểm rơi phải làm các số trong cùng một trung bình bằng nhau.

Let f be an expression whose minimum (maximum) is sought on a region. The equality point is the set

of values of the variables at which this value is attained. When AM–GM is used, the equality point must make all numbers inside one mean equal.

Quy trình dùng điểm rơi gồm ba việc, theo thứ tự: dự đoán điểm rơi (thường nơi các biến đối xứng, hoặc nơi một biến chạm biên); chọn hệ số tách để các số trong AM–GM bằng nhau tại điểm đó; áp dụng AM–GM rồi kiểm tra điểm rơi có thuộc miền xác định không.

The equality-point procedure has three steps, in this order: guess the equality point (usually where the variables are symmetric, or where one variable meets the boundary); choose the split coefficients so that the numbers inside AM–GM are equal at that point; apply AM–GM and check that the equality point lies in the domain.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Cần chặn dưới $x + 4/x^2$ với $x > 0$. Tích hai hạng tử x và $4/x^2$ vẫn còn x , nên AM–GM hai số không khử được biến. Muốn tích là hằng số ta cần tổng $x/2 + x/2 + 4/x^2$: tích là $(x/2) \cdot (x/2) \cdot (4/x^2) = 1$. Việc tách x thành hai nửa bằng nhau thể hiện điều ta muốn: ba số bằng nhau tại điểm rơi, tức $x/2 = 4/x^2$, suy ra $x^3 = 8$.

We need a lower bound for $x + 4/x^2$ with $x > 0$. The product of the two terms x and $4/x^2$ still contains x , so two-term AM–GM cannot remove the variable. To make the product a constant we want the sum $x/2 + x/2 + 4/x^2$: its product is $(x/2) \cdot (x/2) \cdot (4/x^2) = 1$. Splitting x into two equal halves expresses what we want: the three numbers are equal at the equality point, $x/2 = 4/x^2$, so $x^3 = 8$.

VÍ DỤ 2.3 (Điểm rơi, tách hạng tử) / EXAMPLE 2.3 (Equality point, splitting) — Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + 4/x^2$ với $x > 0$.

Find the minimum of $x + 4/x^2$ for $x > 0$.

Lời giải. / Solution.

Viết $x + 4/x^2 = x/2 + x/2 + 4/x^2$ rồi áp dụng Định lý 2.8 cho ba số dương:

Write $x + 4/x^2 = x/2 + x/2 + 4/x^2$ and apply Theorem 2.8 to the three positive numbers:

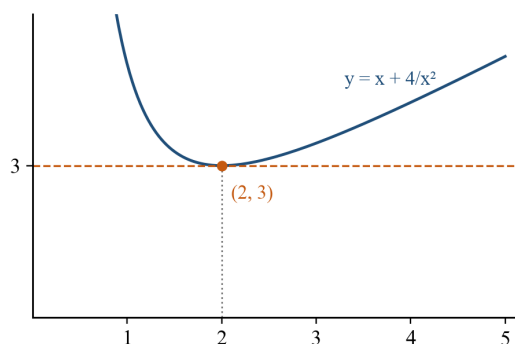
$$x/2 + x/2 + 4/x^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{(x/2) \cdot (x/2) \cdot (4/x^2)} = 3 \cdot \sqrt[3]{1} = 3$$

Dấu bằng khi $x/2 = 4/x^2$, tức $x^3 = 8$, $x = 2$ (thuộc miền $x > 0$). Kiểm tra: $2 + 4/4 = 3$.

Equality holds when $x/2 = 4/x^2$, that is $x^3 = 8$, $x = 2$ (which lies in $x > 0$). Check: $2 + 4/4 = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 3, đạt tại $x = 2$.

Hence the minimum is 3, attained at $x = 2$. ■



Hình 2.1. Đồ thị $y = x + 4/x^2$: cực tiểu 3 tại $x = 2$

Figure 2.1. Graph of $y = x + 4/x^2$: minimum 3 at $x = 2$

VÍ DỤ 2.4 (Nhân ba bất đẳng thức) / EXAMPLE 2.4 (Multiplying three inequalities) —

Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$: $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Prove that for all $a, b, c > 0$: $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Lời giải. / Solution.

Theo Định lý 2.7 áp dụng cho từng cặp: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, $c + a \geq 2\sqrt{ca}$.

By Theorem 2.7 applied to each pair: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, $c + a \geq 2\sqrt{ca}$.

Cả ba vế đều dương nên nhân được theo vế (Tính chất 2.2(iii)):

All three sides are positive, so we may multiply them (Property 2.2(iii)):

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8 \cdot \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} = 8 \cdot \sqrt{a^2 b^2 c^2} = 8abc$$

Dấu bằng khi $a = b$, $b = c$, $c = a$, tức $a = b = c$.

Equality holds when $a = b$, $b = c$, $c = a$, that is $a = b = c$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Theo Tính chất 2.3(c), $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ tương đương $p \cdot q - abc \geq 8abc$, tức $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc$. Chia cho $abc > 0$ ta được $(a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) \geq 9$, bất đẳng thức tổng nghịch đảo cho $n = 3$.

By Property 2.3(c), $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ is equivalent to $p \cdot q - abc \geq 8abc$, that is $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc$. Dividing by $abc > 0$ we get $(a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) \geq 9$, the reciprocal-sum inequality for $n = 3$.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Cần chặn trên x^2y khi biết tổng $x + y = 6$. Tích $x \cdot x \cdot y$ có ba thừa số, nên dùng AM–GM ba số cho ba số mà tổng của chúng là hằng số. Tổng $x + x + y$ không là hằng số, nhưng $x/2 + x/2 + y = x + y = 6$ thì có. Vậy dùng ba số $x/2$, $x/2$, y . Điểm rơi là $x/2 = y$.

We need an upper bound for x^2y given $x + y = 6$. The product $x \cdot x \cdot y$ has three factors, so we use three-term AM–GM on three numbers whose sum is a constant. The sum $x + x + y$ is not constant, but $x/2 + x/2 + y = x + y = 6$ is. So we use the three numbers $x/2$, $x/2$, y . The equality point is $x/2 = y$.

VÍ DỤ 2.5 (Tổng không đổi, chia trọng số) / EXAMPLE 2.5 (Fixed sum, weighting) —

Cho $x, y > 0$ với $x + y = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của x^2y .

Let $x, y > 0$ with $x + y = 6$. Find the maximum of x^2y .

Lời giải. / Solution.

Theo Định lý 2.8 cho ba số dương $x/2$, $x/2$, y :

By Theorem 2.8 for the three positive numbers $x/2$, $x/2$, y :

$$(x/2) \cdot (x/2) \cdot y \leq ((x/2 + x/2 + y)/3)^3 = (6/3)^3 = 8$$

Do đó $x^2y = 4 \cdot (x/2) \cdot (x/2) \cdot y \leq 32$.

Hence $x^2y = 4 \cdot (x/2) \cdot (x/2) \cdot y \leq 32$.

Dấu bằng khi $x/2 = y$ và $x + y = 6$, tức $x = 4$, $y = 2$. Kiểm tra: $4^2 \cdot 2 = 32$.

Equality holds when $x/2 = y$ and $x + y = 6$, that is $x = 4$, $y = 2$. Check: $4^2 \cdot 2 = 32$.

Vậy giá trị lớn nhất của x^2y bằng 32, đạt tại $(x, y) = (4, 2)$.

Hence the maximum of x^2y is 32, attained at $(x, y) = (4, 2)$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Tích $1 \cdot 2 \cdots n$ thuộc về trung bình nhân của n số $1, 2, \dots, n$, còn trung bình cộng của chúng tính được ngay bằng công thức tổng cấp số cộng: $(n+1)/2$. Đề đòi bất đẳng thức chặt, nên cần chỉ ra các số không bằng nhau.

The product $1 \cdot 2 \cdots n$ is the geometric mean (to the power n) of the n numbers $1, 2, \dots, n$, and their arithmetic mean follows at once from the sum of an arithmetic progression: $(n+1)/2$. The statement asks for a strict inequality, so we must point out that the numbers are not all equal.

VÍ DỤ 2.6 (AM–GM cho dãy số nguyên) / EXAMPLE 2.6 (AM–GM on a run of integers) — Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$: $n! < ((n+1)/2)^n$.

Prove that for every integer $n \geq 2$: $n! < ((n+1)/2)^n$.

Lời giải. / Solution.

Áp dụng Định lý 2.9 cho n số dương $1, 2, \dots, n$. Trung bình cộng của chúng là $(1 + 2 + \dots + n)/n = (n+1)/2$.

Apply Theorem 2.9 to the n positive numbers $1, 2, \dots, n$. Their arithmetic mean is $(1 + 2 + \dots + n)/n = (n+1)/2$.

$$(n+1)/2 \geq (1 \cdot 2 \cdots n)^{1/n} = (n!)^{1/n}$$

Với $n \geq 2$ các số $1, 2, \dots, n$ không bằng nhau (chẳng hạn $1 \neq 2$) nên dấu bằng không xảy ra, bất đẳng thức là chặt.

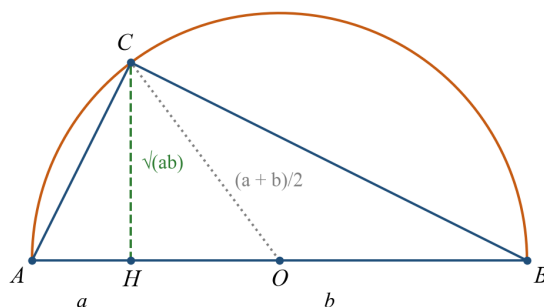
For $n \geq 2$ the numbers $1, 2, \dots, n$ are not all equal (for instance $1 \neq 2$), so equality cannot occur and the inequality is strict.

Lũy thừa n hai vế dương: $n! < ((n+1)/2)^n$.

Raising both positive sides to the power n : $n! < ((n+1)/2)^n$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Hình học của AM–GM hai số: trên đường kính $AB = a + b$ của nửa đường tròn, lấy H sao cho $AH = a$, $HB = b$; đường vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn ở C . Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ACB , $CH^2 = AH \cdot HB = ab$, nên $CH = \sqrt{ab}$; còn bán kính $OC = (a+b)/2$ không nhỏ hơn đường cao CH . Dấu bằng khi H trùng O .

The geometry of two-term AM–GM: on the diameter $AB = a + b$ of a semicircle take H with $AH = a$, $HB = b$; the perpendicular to AB at H meets the semicircle at C . By the metric relation in the right triangle ACB , $CH^2 = AH \cdot HB = ab$, so $CH = \sqrt{ab}$, while the radius $OC = (a+b)/2$ is at least the altitude CH . Equality when H coincides with O .



Hình 2.2. AM–GM hai số trên nửa đường tròn: $CH = \sqrt{ab} \leq OC = (a + b)/2$

Figure 2.2. Two-term AM–GM on a semicircle: $CH = \sqrt{ab} \leq OC = (a + b)/2$

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Áp dụng AM–GM mà điểm rơi nằm ngoài miền. Với $x \geq 2$, từ $x + 1/x \geq 2$ không được kết luận giá trị nhỏ nhất là 2: dấu bằng cần $x = 1$, không thuộc miền. Giá trị nhỏ nhất thật là $5/2$, đạt tại $x = 2$. Mọi dấu bằng trong chuỗi phải xảy ra đồng thời tại một điểm của miền.

Applying AM–GM when the equality point lies outside the domain. For $x \geq 2$, from $x + 1/x \geq 2$ one may not conclude that the minimum is 2: equality needs $x = 1$, which is not in the domain. The true minimum is $5/2$, attained at $x = 2$. Every equality in a chain must hold simultaneously at one point of the domain.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng AM–GM cho số có thể âm. Với $a, b < 0$ thì $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$ vô nghĩa. Kiểm tra $a, b \geq 0$ trước khi áp dụng, và với $x + 4/x^2$ chỉ xét $x > 0$.

Using AM–GM on numbers that may be negative. For $a, b < 0$ the statement $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$ makes no sense. Check $a, b \geq 0$ first, and for $x + 4/x^2$ consider only $x > 0$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — AM–GM: $(a_1 + \dots + a_n)/n \geq (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$ với $a_i \geq 0$, dấu bằng khi và chỉ khi mọi a_i bằng nhau. Dạng ba số: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

AM–GM: $(a_1 + \dots + a_n)/n \geq (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$ for $a_i \geq 0$, with equality if and only if all a_i are equal. Three-term form: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

2.3. Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz — The Cauchy–Schwarz inequality

ĐỊNH LÝ 2.12 (Cauchy–Schwarz (Bunyakovsky)) / THEOREM 2.12 (Cauchy–Schwarz (Bunyakovsky)) — Với mọi số thực $a_1, \dots, a_n$ và $b_1, \dots, b_n$: $(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$. Dấu bằng khi và chỉ khi $a_ib_j = a_jb_i$ với mọi i, j (hai bộ số tỉ lệ với nhau).
For all real $a_1, \dots, a_n$ and $b_1, \dots, b_n$: $(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$. Equality holds if and only if $a_ib_j = a_jb_i$ for all i, j (the two lists are proportional).

Chứng minh. / Proof.

Dùng đồng nhất thức Lagrange, gồm tổng trên mọi cặp chỉ số $i < j$:

We use Lagrange's identity, where the sum runs over all pairs of indices $i < j$:

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) - (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 = \sum (a_ib_j - a_jb_i)^2 \quad (2.3)$$

Đồng nhất thức đúng vì khai triển vế trái cho tổng $\sum_{i,j} a_i^2 b_j^2$ trừ đi $\sum_{i,j} a_i b_i a_j b_j$; các số hạng $i = j$ triệt tiêu, mỗi cặp $i < j$ còn $a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_j b_j = (a_i b_j - a_j b_i)^2$.

The identity holds because expanding the left side gives $\sum_{i,j} a_i^2 b_j^2$ minus $\sum_{i,j} a_i b_i a_j b_j$; the terms with $i = j$ cancel, and each pair $i < j$ leaves $a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_j b_j = (a_i b_j - a_j b_i)^2$.

Vế phải là tổng các bình phương nên không âm, từ đó có bất đẳng thức. Nó bằng 0 khi và chỉ khi mọi hiệu $a_i b_j - a_j b_i$ bằng 0.

The right side is a sum of squares and so is non-negative, which gives the inequality. It is 0 if and only if every difference $a_i b_j - a_j b_i$ is 0. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Chứng minh thứ hai của Định lý 2.12 bằng tam thức bậc hai.

Xét $f(t) = \sum (a_i t - b_i)^2 = A \cdot t^2 - 2B \cdot t + C$ với $A = \sum a_i^2$, $B = \sum a_i b_i$, $C = \sum b_i^2$. Vì $f(t) \geq 0$ với mọi t , và nếu $A > 0$ thì tam thức bậc hai không có hai nghiệm phân biệt, nên biệt thức rút gọn $B^2 - AC \leq 0$, tức $B^2 \leq AC$. Nếu $A = 0$ thì mọi $a_i = 0$ và hai vế đều bằng 0.

A second proof of Theorem 2.12 through a quadratic trinomial. Consider $f(t) = \sum (a_i t - b_i)^2 = A \cdot t^2 - 2B \cdot t + C$ with $A = \sum a_i^2$, $B = \sum a_i b_i$, $C = \sum b_i^2$. Since $f(t) \geq 0$ for every t , and if $A > 0$ the trinomial cannot have two distinct roots, the reduced discriminant satisfies $B^2 - AC \leq 0$, that is $B^2 \leq AC$. If $A = 0$ then every $a_i = 0$ and both sides are 0.

HỆ QUẢ 2.13 (Dạng Engel (Titu)) / COROLLARY 2.13 (Engel form (Titu's lemma)) —

Với $a_1, \dots, a_n$ thực và $b_1, \dots, b_n > 0$: $a_1^2/b_1 + \dots + a_n^2/b_n \geq (a_1 + \dots + a_n)^2/(b_1 + \dots + b_n)$. Dấu bằng khi và chỉ khi $a_1/b_1 = \dots = a_n/b_n$.

For real $a_1, \dots, a_n$ and $b_1, \dots, b_n > 0$: $a_1^2/b_1 + \dots + a_n^2/b_n \geq (a_1 + \dots + a_n)^2/(b_1 + \dots + b_n)$. Equality holds if and only if $a_1/b_1 = \dots = a_n/b_n$.

Chứng minh. / Proof.

Áp dụng Định lý 2.12 cho hai bộ số $x_i = a_i/\sqrt{b_i}$ và $y_i = \sqrt{b_i}$:

Apply Theorem 2.12 to the two lists $x_i = a_i/\sqrt{b_i}$ and $y_i = \sqrt{b_i}$:

$$(\sum a_i)^2 = (\sum x_i y_i)^2 \leq (\sum x_i^2)(\sum y_i^2) = (\sum a_i^2/b_i) \cdot (\sum b_i)$$

Chia hai vế cho $\sum b_i > 0$. Dấu bằng khi $x_i/y_i = a_i/b_i$ không đổi theo i .

Divide both sides by $\sum b_i > 0$. Equality holds when $x_i/y_i = a_i/b_i$ does not depend on i . ■

HỆ QUẢ 2.14 (Cauchy–Schwarz dạng căn) / COROLLARY 2.14 (Radical form of Cauchy–Schwarz) —

Với $a_1, \dots, a_n \geq 0$ và $b_1, \dots, b_n \geq 0$: $\sqrt{a_1 b_1} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}$. Dấu bằng khi hai bộ tỉ lệ nhau.

For $a_1, \dots, a_n \geq 0$ and $b_1, \dots, b_n \geq 0$: $\sqrt{a_1 b_1} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}$. Equality when the two lists are proportional.

Chứng minh. / Proof.

Áp dụng Định lý 2.12 cho hai bộ $\sqrt{a_i}$ và $\sqrt{b_i}$ (các số thực không âm): $(\sum \sqrt{a_i} \cdot \sqrt{b_i})^2 \leq (\sum a_i)(\sum b_i)$. Lấy căn bậc hai không âm hai vế.

Apply Theorem 2.12 to the lists $\sqrt{a_i}$ and $\sqrt{b_i}$ (non-negative reals): $(\sum \sqrt{a_i} \cdot \sqrt{b_i})^2 \leq (\sum a_i)(\sum b_i)$. Take non-negative square roots of both sides. ■

$$a^2/x + b^2/y + c^2/z \geq (a + b + c)^2/(x + y + z) \quad (2.4)$$

ĐỊNH LÝ 2.15 (Hölder ba bộ ba số) / THEOREM 2.15 (Hölder for three triples) — Với mọi số không âm a_i, x_i, u_i ($i = 1, 2, 3$): $(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) \geq (a_1x_1u_1 + a_2x_2u_2 + a_3x_3u_3)^3$.

For all non-negative a_i, x_i, u_i ($i = 1, 2, 3$): $(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) \geq (a_1x_1u_1 + a_2x_2u_2 + a_3x_3u_3)^3$.

Chứng minh. / Proof.

Đặt $A = \sum a_i^3$, $X = \sum x_i^3$, $U = \sum u_i^3$. Nếu một trong ba số này bằng 0 thì bộ tương ứng toàn số 0 và hai vế đều bằng 0. Xét $A, X, U > 0$. Với mỗi i , theo Định lý 2.8:

Put $A = \sum a_i^3$, $X = \sum x_i^3$, $U = \sum u_i^3$. If one of them is 0 the corresponding triple is all zeros and both sides are 0. Take $A, X, U > 0$. For each i , by Theorem 2.8:

$$a_i^3/A + x_i^3/X + u_i^3/U \geq 3 \cdot a_i x_i u_i / (AXU)^{1/3}$$

Cộng ba bất đẳng thức ($i = 1, 2, 3$): vế trái bằng $1 + 1 + 1 = 3$, nên $3 \geq 3 \cdot \sum a_i x_i u_i / (AXU)^{1/3}$, tức $(AXU)^{1/3} \geq \sum a_i x_i u_i$. Lập phương hai vế không âm.

Add the three inequalities ($i = 1, 2, 3$): the left side is $1 + 1 + 1 = 3$, so $3 \geq 3 \cdot \sum a_i x_i u_i / (AXU)^{1/3}$, that is $(AXU)^{1/3} \geq \sum a_i x_i u_i$. Cube both non-negative sides. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Lấy $x_i = u_i = 1$ trong Định lý 2.15 được $9 \cdot \sum a_i^3 \geq (\sum a_i)^3$, tức $a^3 + b^3 + c^3 \geq (a + b + c)^3/9$. Kết quả này cũng suy ra từ Chebyshev; cách này không cần sắp thứ tự.

Taking $x_i = u_i = 1$ in Theorem 2.15 gives $9 \cdot \sum a_i^3 \geq (\sum a_i)^3$, that is $a^3 + b^3 + c^3 \geq (a + b + c)^3/9$. The same result follows from Chebyshev; this route needs no ordering of the numbers.

Dạng Engel là công cụ chính để chặn dưới một tổng phân thức: tử số là bình phương, mẫu số là các số dương. Khi tử không sẵn bình phương, nhân cả tử và mẫu với cùng một số để tạo ra bình phương.

The Engel form is the main tool for bounding a sum of fractions from below: the numerators are squares and the denominators are positive. When a numerator is not already a square, multiply numerator and denominator by the same number to create one.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho điều kiện $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ và hỏi giá trị lớn nhất của tổng $x + y + z$, một biểu thức bậc nhất. Cauchy–Schwarz nối một tổng bậc nhất với tổng các bình phương. Ta cần viết $x + y + z = \sum a_i b_i$ sao cho $\sum b_i^2$ chính là $x^2 + 2y^2 + 3z^2$: chọn $b = (x, \sqrt{2} \cdot y, \sqrt{3} \cdot z)$ và $a = (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$.

The statement gives the condition $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ and asks for the maximum of the sum $x + y + z$, a linear expression. Cauchy–Schwarz links a linear sum with a sum of squares. We need $x + y + z = \sum a_i b_i$ with $\sum b_i^2$ equal to $x^2 + 2y^2 + 3z^2$: take $b = (x, \sqrt{2} \cdot y, \sqrt{3} \cdot z)$ and $a = (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$.

VÍ DỤ 2.7 (Cauchy–Schwarz có trọng số) / EXAMPLE 2.7 (Weighted Cauchy–Schwarz)

— Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của $x + y + z$.

Let x, y, z be real numbers with $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$. Find the maximum of $x + y + z$.

Lời giải. / Solution.

Viết $x + y + z = 1 \cdot x + (1/\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} \cdot y) + (1/\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} \cdot z)$ và áp dụng Định lý 2.12:

Write $x + y + z = 1 \cdot x + (1/\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} \cdot y) + (1/\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} \cdot z)$ and apply Theorem 2.12:

$$(x + y + z)^2 \leq (1 + 1/2 + 1/3) \cdot (x^2 + 2y^2 + 3z^2) = (11/6) \cdot 6 = 11$$

Suy ra $x + y + z \leq \sqrt{11}$.

Hence $x + y + z \leq \sqrt{11}$.

Dấu bằng khi $(x, \sqrt{2} \cdot y, \sqrt{3} \cdot z)$ tỉ lệ với $(1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$, tức $x = k, y = k/2, z = k/3$ với $k > 0$. Thế vào điều kiện: $k^2(1 + 2/4 + 3/9) = (11/6)k^2 = 6$, nên $k = 6/\sqrt{11}$. Khi đó $x + y + z = (11/6) \cdot k = \sqrt{11}$.

Equality holds when $(x, \sqrt{2} \cdot y, \sqrt{3} \cdot z)$ is proportional to $(1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$, that is $x = k, y = k/2, z = k/3$ with $k > 0$. Substituting into the condition: $k^2(1 + 2/4 + 3/9) = (11/6)k^2 = 6$, so $k = 6/\sqrt{11}$. Then $x + y + z = (11/6) \cdot k = \sqrt{11}$.

Vậy giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{11}$.

Hence the maximum is $\sqrt{11}$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Mẫu số $a + 2b, b + 2c, c + 2a$ cộng lại cho $3(a + b + c) = 9$, một hằng số, còn tử số đều bằng $1 = 1^2$. Đó là đúng hình dáng của dạng Engel: tử là bình phương, tổng mẫu là hằng số.

The denominators $a + 2b, b + 2c, c + 2a$ add up to $3(a + b + c) = 9$, a constant, and the numerators are all $1 = 1^2$. This is exactly the shape of the Engel form: square numerators and a constant sum of denominators.

VÍ DỤ 2.8 (Dạng Engel với tử bằng 1) / EXAMPLE 2.8 (Engel form with numerator 1)

— Cho $a, b, c > 0$ với $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $1/(a + 2b) + 1/(b + 2c) + 1/(c + 2a) \geq 1$.

Let $a, b, c > 0$ with $a + b + c = 3$. Prove that $1/(a + 2b) + 1/(b + 2c) + 1/(c + 2a) \geq 1$.

Lời giải. / Solution.

Viết mỗi số hạng dưới dạng $1^2/(\text{mẫu})$ và áp dụng Hệ quả 2.13:

Write each term as $1^2/(\text{denominator})$ and apply Corollary 2.13:

$$1/(a + 2b) + 1/(b + 2c) + 1/(c + 2a) \geq (1 + 1 + 1)^2 / [(a + 2b) + (b + 2c) + (c + 2a)] = 9 / (3(a + b + c)) = 9/9 = 1$$

Dấu bằng khi $a + 2b = b + 2c = c + 2a$. Từ hai đẳng thức này: $a + b = 2c$ và $b + c = 2a$. Trừ vế theo vế: $a - c = 2c - 2a$, suy ra $a = c$, rồi $b = 2a - c = a$. Với $a + b + c = 3$ ta được $a = b = c = 1$; kiểm tra: ba phân số bằng $1/3$, tổng bằng 1.

Equality needs $a + 2b = b + 2c = c + 2a$. These give $a + b = 2c$ and $b + c = 2a$. Subtracting: $a - c = 2c - 2a$, so $a = c$, and then $b = 2a - c = a$. With $a + b + c = 3$ we get $a = b = c = 1$; check: three fractions equal to $1/3$, sum 1.

Vậy bất đẳng thức đúng, dấu bằng tại $a = b = c = 1$.

Hence the inequality holds, with equality at $a = b = c = 1$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Cách khác cho Ví dụ 2.8: theo Định lý 2.8, tổng ba số dương không nhỏ hơn $3 \cdot \sqrt[3]{\text{tích}}$. Ở đây tích các nghịch đảo bằng $1/[(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)]$, còn theo AM–GM các mẫu có tích nhỏ hơn hoặc bằng $((9)/3)^3 = 27$, nên tổng $\geq 3 \cdot \sqrt[3]{(1/27)} = 1$. Hai

cách cho cùng dấu bằng $a = b = c = 1$.

Another route for Example 2.8: by Theorem 2.8 the sum of three positive numbers is at least $3 \cdot \sqrt[3]{\text{product}}$. Here the product of the reciprocals is $1/[(a+2b)(b+2c)(c+2a)]$, and by AM–GM the denominators have product at most $(9/3)^3 = 27$, so the sum is at least $3 \cdot \sqrt[3]{1/27} = 1$. Both routes give the same equality case $a = b = c = 1$.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Tổng $a/b + b/c + c/a$ có mẫu khác nhau và tử không phải bình phương. Viết $a/b = a^2/(ab)$: tử thành bình phương, mẫu là các tích đôi một ab, bc, ca . Tổng mẫu là $ab + bc + ca$, mà tổng tử trước khi bình phương là $a + b + c$, vậy dạng Engel cho $(a + b + c)^2/(ab + bc + ca)$.

The sum $a/b + b/c + c/a$ has different denominators and the numerators are not squares. Write $a/b = a^2/(ab)$: the numerator becomes a square and the denominators are the pairwise products ab, bc, ca . Their sum is $ab + bc + ca$ and the numerators sum to $a + b + c$ before squaring, so the Engel form gives $(a + b + c)^2/(ab + bc + ca)$.

VÍ DỤ 2.9 (Tạo bình phương ở tử) / EXAMPLE 2.9 (Creating squares in the numerators) — Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$: $a/b + b/c + c/a \geq (a + b + c)^2/(ab + bc + ca) \geq 3$.

Prove that for all $a, b, c > 0$: $a/b + b/c + c/a \geq (a + b + c)^2/(ab + bc + ca) \geq 3$.

Lời giải. / Solution.

Viết $a/b = a^2/(ab)$, $b/c = b^2/(bc)$, $c/a = c^2/(ca)$ rồi dùng Hệ quả 2.13 với các mẫu dương ab, bc, ca :

Write $a/b = a^2/(ab)$, $b/c = b^2/(bc)$, $c/a = c^2/(ca)$ and use Corollary 2.13 with the positive denominators ab, bc, ca :

$$a/b + b/c + c/a \geq (a + b + c)^2/(ab + bc + ca)$$

Bất đẳng thức thứ hai tương đương $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ (nhân hai vế với $ab + bc + ca > 0$), tức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, đúng theo Bổ đề 2.5(c).

The second inequality is equivalent to $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ (multiply by $ab + bc + ca > 0$), that is $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, which holds by Lemma 2.5(c).

Dấu bằng ở cả hai bước khi $a/(ab) = b/(bc) = c/(ca)$, tức $1/b = 1/c = 1/a$, và $a = b = c$. Vậy dấu bằng khi $a = b = c$.

Equality in both steps needs $a/(ab) = b/(bc) = c/(ca)$, that is $1/b = 1/c = 1/a$, together with $a = b = c$. Hence equality holds when $a = b = c$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Hai bộ số trong Định lý 2.12 có thể chọn tùy ý. Chọn sao cho một trong hai tổng bình phương là hằng số (hoặc là điều kiện đề cho) thì vế phải trở thành một số biết trước. Dấu bằng cho ta điểm rơi: hai bộ tỉ lệ nhau.

The two lists in Theorem 2.12 can be chosen freely. Choose them so that one of the two sums of squares is a constant (or the given condition); the right-hand side then becomes a known number. The equality case gives the equality point: the two lists are proportional.

NHẬN XÉT / REMARK — Ý nghĩa hình học của Định lý 2.12 với $n = 2$: $u = (a, b)$ và $v = (c, d)$ có tích vô hướng $u \cdot v = ac + bd = |u| \cdot |v| \cdot \cos \varphi$, nên $(ac + bd)^2 \leq |u|^2 \cdot |v|^2 = (a^2 + b^2)(c^2 +$

d^2) vì $\cos^2 \varphi \leq 1$. Dấu bằng khi $\varphi = 0$ hoặc $\varphi = 180$ độ, tức hai vectơ song song, đúng điều kiện $ad = bc$.

Geometric meaning of Theorem 2.12 for $n = 2$: $u = (a, b)$ and $v = (c, d)$ have dot product $u \cdot v = ac + bd = |u| \cdot |v| \cdot \cos \varphi$, so $(ac + bd)^2 \leq |u|^2 \cdot |v|^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ because $\cos^2 \varphi \leq 1$. Equality when $\varphi = 0$ or $\varphi = 180$ degrees, that is when the two vectors are parallel, exactly the condition $ad = bc$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng dạng Engel khi một mẫu có thể âm hoặc bằng 0. Phải ghi rõ $b_i > 0$ trong lời giải.

Using the Engel form when a denominator may be negative or zero. State $b_i > 0$ explicitly in the solution.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết dấu bằng của Cauchy–Schwarz là $a_i = b_i$. Điều kiện đúng là hai bộ tỉ lệ ($a_i = \lambda \cdot b_i$), và hệ số tỉ lệ λ phải khớp với điều kiện của đề.

Writing the equality case of Cauchy–Schwarz as $a_i = b_i$. The correct condition is that the lists are proportional ($a_i = \lambda \cdot b_i$), and λ must be compatible with the constraint of the problem.

2.4. Bất đẳng thức hoán vị và Chebyshev — The rearrangement and Chebyshev inequalities

ĐỊNH LÝ 2.16 (Bất đẳng thức hoán vị) / THEOREM 2.16 (Rearrangement inequality)

— Cho $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Với mọi hoán vị σ của $\{1, \dots, n\}$:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_{\sigma(1)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)} \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Let $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ and $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. For every permutation σ of $\{1, \dots, n\}$:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_{\sigma(1)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)} \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Chứng minh. / Proof.

Tổng cùng thứ tự là lớn nhất. Giả sử σ không phải hoán vị đồng nhất. Khi đó tồn tại chỉ số i với $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ (nếu $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots$ thì σ là đồng nhất). Đổi chỗ hai giá trị $\sigma(i)$ và $\sigma(i+1)$ cho nhau. Tổng thay đổi một lượng:

The similarly ordered sum is the largest. Suppose σ is not the identity. Then some index i has $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ (if $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots$ then σ is the identity). Swap the two values $\sigma(i)$ and $\sigma(i+1)$. The sum changes by:

$$a_i b_{\sigma(i+1)} + a_{i+1} b_{\sigma(i)} - a_i b_{\sigma(i)} - a_{i+1} b_{\sigma(i+1)} = (a_{i+1} - a_i)(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(i+1)}) \geq 0$$

vì $a_{i+1} \geq a_i$ và $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ cho $b_{\sigma(i)} \geq b_{\sigma(i+1)}$. Mỗi lần đổi chỗ như vậy làm số cặp ngược thứ tự giảm đúng 1, nên sau hữu hạn bước ta tới hoán vị đồng nhất, và tổng không giảm ở mỗi bước. Do đó tổng ban đầu không vượt quá tổng cùng thứ tự.

because $a_{i+1} \geq a_i$, and $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ gives $b_{\sigma(i)} \geq b_{\sigma(i+1)}$. Each such swap reduces the number of out-of-order pairs by exactly 1, so after finitely many steps we reach the identity, and the sum never decreases along the way. Hence the original sum does not exceed the similarly ordered sum.

Bất đẳng thức bên phải: áp dụng kết quả vừa chứng minh cho bộ a_i và bộ tăng $b'_k = -b_{n+1-k}$. Với hoán vị τ bất kỳ, đặt $\rho(i) = n+1 - \tau(i)$; ta có $\sum a_i b'_i \geq \sum a_i b'_{\tau(i)}$, tức $-\sum a_i b_{n+1-i} \geq -\sum a_i b_{\rho(i)}$, hay $\sum a_i b_{\rho(i)} \geq \sum a_i b_{n+1-i}$. Vì ρ chạy khắp mọi hoán vị khi τ chạy khắp mọi hoán vị, bất đẳng thức bên phải đúng.

The right inequality: apply the result just proved to the list a_i and the increasing list $b'_k = -b_{n+1-k}$. For any permutation τ put $\rho(i) = n + 1 - \tau(i)$; we have $\sum a_i b'_i \geq \sum a_i b'_{\tau(i)}$, that is $-\sum a_i b_{n+1-i} \geq -\sum a_i b_{\rho(i)}$, or $\sum a_i b_{\rho(i)} \geq \sum a_i b_{n+1-i}$. Since ρ runs over all permutations as τ does, the right inequality holds. ■

HỆ QUẢ 2.17 (Bất đẳng thức Chebyshev) / COROLLARY 2.17 (Chebyshev's inequality)

— Cho $a_1 \leq \dots \leq a_n$ và $b_1 \leq \dots \leq b_n$. Khi đó $n \cdot (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \geq (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)$. Nếu một bộ tăng và bộ kia giảm thì bất đẳng thức đổi chiều.

Let $a_1 \leq \dots \leq a_n$ and $b_1 \leq \dots \leq b_n$. Then $n \cdot (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \geq (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)$. If one list is increasing and the other decreasing, the inequality reverses.

Chứng minh. / Proof.

Với $k = 0, 1, \dots, n-1$, xét tổng dịch vòng $S_k = \sum a_i b_{i+k}$, chỉ số b tính theo modulo n ($b_{n+1} = b_1, \dots$). Mỗi S_k là tổng $a_i b_{\sigma(i)}$ với một hoán vị σ , nên theo Định lý 2.16, $S_k \leq S_0 = \sum a_i b_i$.

For $k = 0, 1, \dots, n-1$ consider the shifted sum $S_k = \sum a_i b_{i+k}$, with indices of b taken modulo n ($b_{n+1} = b_1, \dots$). Each S_k is a sum $a_i b_{\sigma(i)}$ for some permutation σ , so by Theorem 2.16, $S_k \leq S_0 = \sum a_i b_i$.

Cộng n bất đẳng thức đó: $\sum_k S_k \leq n \cdot \sum a_i b_i$. Mặt khác $\sum_k S_k = \sum_i \sum_j a_i b_j = (\sum a_i)(\sum b_j)$, vì khi i cố định, $i+k$ chạy hết các chỉ số khi k chạy từ 0 tới $n-1$.

Add these n inequalities: $\sum_k S_k \leq n \cdot \sum a_i b_i$. On the other hand $\sum_k S_k = \sum_i \sum_j a_i b_j = (\sum a_i)(\sum b_j)$, because for fixed i , the index $i+k$ runs through all indices as k runs from 0 to $n-1$.

Trường hợp một bộ tăng, một bộ giảm: thay b_i bằng $-b_i$ (bộ tăng) rồi áp dụng kết quả trên.

Case of one increasing and one decreasing list: replace b_i by $-b_i$ (an increasing list) and apply the result above. ■

$$n \cdot \sum a_i b_i \geq (\sum a_i)(\sum b_i) \quad (\text{cùng chiều tăng}) \quad (2.5)$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Tổng nghịch đảo và tích bằng 1: nếu $x_1 \cdots x_n = 1$ và $x_i > 0$ thì $\sum x_i \geq n$; với $x_i > 0$ bất kỳ thì $(\sum x_i)(\sum 1/x_i) \geq n^2$.

Reciprocal sums and unit products: if $x_1 \cdots x_n = 1$ and $x_i > 0$ then $\sum x_i \geq n$; for any $x_i > 0$, $(\sum x_i)(\sum 1/x_i) \geq n^2$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Cauchy–Schwarz: $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$, dấu bằng khi hai bộ tỉ lệ. Engel: $\sum a_i^2/b_i \geq (\sum a_i)^2/\sum b_i$ với $b_i > 0$.

Cauchy–Schwarz: $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$, with equality when the lists are proportional. Engel: $\sum a_i^2/b_i \geq (\sum a_i)^2/\sum b_i$ for $b_i > 0$.

NHẬN XÉT / REMARK — Hai hệ quả nhanh của hoán vị và Chebyshev. Lấy $b_i = a_i$: $n \cdot \sum a_i^2 \geq (\sum a_i)^2$, tức $AM \leq QM$, chứng minh thứ ba của bất đẳng thức này. Với $a \leq b \leq c$, so sánh tổng cùng thứ tự $a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c$ với tổng đã dịch vòng $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, trùng Bổ đề 2.5(c).

Two quick consequences of rearrangement and Chebyshev. Take $b_i = a_i$: $n \cdot \sum a_i^2 \geq (\sum a_i)^2$, that is $AM \leq QM$, a third proof of this inequality. For $a \leq b \leq c$, compare the similarly ordered sum $a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c$ with the shifted sum $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, the same as Lemma 2.5(c).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng Chebyshev cho hai dãy ngược chiều. Với $(a) = (1, 2, 3)$ và $(b) = (3, 2, 1)$: $n \cdot \sum a_i b_i = 3 \cdot 10 = 30$ còn $(\sum a_i)(\sum b_i) = 36$, nên bất đẳng thức " $\geq$ " SAI; đúng là chiều ngược lại.

Using Chebyshev for two lists in opposite directions. For $(a) = (1, 2, 3)$ and $(b) = (3, 2, 1)$: $n \cdot \sum a_i b_i = 3 \cdot 10 = 30$ while $(\sum a_i)(\sum b_i) = 36$, so the inequality " $\geq$ " FAILS; the reverse direction is the correct one.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng điều kiện "tích bằng 1" khi các số có thể âm. Với $x_1 = x_2 = -1$ thì $x_1 x_2 = 1$ nhưng $x_1 + x_2 = -2 < 2$. Hệ quả 2.10 đòi mọi số dương.

Using the condition "product equals 1" when the numbers may be negative. For $x_1 = x_2 = -1$ we have $x_1 x_2 = 1$ but $x_1 + x_2 = -2 < 2$. Corollary 2.10 requires every number positive.

HỆ QUẢ 2.18 (Tổng tỉ số qua hoán vị) / COROLLARY 2.18 (Sum of ratios under a permutation) — Với $a_1, \dots, a_n > 0$ và mọi hoán vị σ của $\{1, \dots, n\}$: $a_1/a_{\sigma(1)} + \dots + a_n/a_{\sigma(n)} \geq n$. Dấu bằng khi và chỉ khi $a_i = a_{\sigma(i)}$ với mọi i .

For $a_1, \dots, a_n > 0$ and every permutation σ of $\{1, \dots, n\}$: $a_1/a_{\sigma(1)} + \dots + a_n/a_{\sigma(n)} \geq n$. Equality holds if and only if $a_i = a_{\sigma(i)}$ for every i .

Chứng minh. / Proof.

Mỗi chỉ số xuất hiện đúng một lần ở tử và đúng một lần ở mẫu, nên tích n tỉ số bằng $(a_1 \cdots a_n)/(a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}) = 1$. Áp dụng Hệ quả 2.10 cho n số dương này.

Each index appears exactly once in the numerators and once in the denominators, so the product of the n ratios is $(a_1 \cdots a_n)/(a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}) = 1$. Apply Corollary 2.10 to these n positive numbers. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Với $n = 3$ và σ là hoán vị vòng ta được $a/b + b/c + c/a \geq 3$, bất đẳng thức đã gặp ở Ví dụ 2.9 (bước thứ hai). Cách chứng minh này không cần bình phương nào.

For $n = 3$ and σ the cyclic permutation we get $a/b + b/c + c/a \geq 3$, the inequality met in Example 2.9 (its second step). This proof needs no squares at all.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Hai dãy cùng chiều: tổng tích cùng thứ tự là lớn nhất, tổng tích ngược thứ tự là bé nhất. Chebyshev: $n \cdot \sum a_i b_i \geq (\sum a_i)(\sum b_i)$ khi cả hai dãy cùng tăng.

Two lists in the same direction: the similarly ordered sum of products is the largest and the oppositely ordered one the smallest. Chebyshev: $n \cdot \sum a_i b_i \geq (\sum a_i)(\sum b_i)$ when both lists are increasing.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Vế trái $a^3 + b^3 + c^3$ gồm $a \cdot a^2, b \cdot b^2, c \cdot c^2$, còn vế phải $a^2 b + b^2 c + c^2 a$ gồm $a^2 \cdot b, b^2 \cdot c, c^2 \cdot a$: cùng các thừa số a^2, b^2, c^2 nhưng thừa số còn lại bị hoán vị vòng. Bộ (a, b, c) và bộ (a^2, b^2, c^2) sắp thứ tự giống nhau (với $a, b, c > 0$), nên tổng cùng thứ tự không bé hơn tổng đã hoán vị.

The left side $a^3 + b^3 + c^3$ consists of $a \cdot a^2, b \cdot b^2, c \cdot c^2$, and the right side $a^2 b + b^2 c + c^2 a$ of $a^2 \cdot b, b^2 \cdot c, c^2 \cdot a$: the same factors a^2, b^2, c^2 but the other factor is cyclically permuted. The list (a, b, c) and the list (a^2, b^2, c^2) are ordered alike (for $a, b, c > 0$), so the similarly ordered sum is at least the permuted sum.

VÍ DỤ 2.10 (Sắp xếp lại) / EXAMPLE 2.10 (Rearrangement) — Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$: $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$. Tìm các trường hợp dấu bằng.

Prove that for all $a, b, c > 0$: $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$. Find the equality cases.

Lời giải. / Solution.

Gọi $u_1 \leq u_2 \leq u_3$ là ba số a, b, c sắp theo thứ tự tăng. Vì các số dương nên $u_1^2 \leq u_2^2 \leq u_3^2$: hai bộ (u_1^2, u_2^2, u_3^2) và (u_1, u_2, u_3) được sắp cùng thứ tự.

Let $u_1 \leq u_2 \leq u_3$ be the numbers a, b, c in increasing order. Since they are positive, $u_1^2 \leq u_2^2 \leq u_3^2$: the lists (u_1^2, u_2^2, u_3^2) and (u_1, u_2, u_3) are ordered alike.

Trong tổng $a^2b + b^2c + c^2a$, mỗi bình phương u_j^2 được nhân với đúng một trong ba số u_1, u_2, u_3 (số đứng sau nó theo vòng a, b, c), và ba thừa số này đôi một khác vị trí, nên tổng có dạng $\sum u_j^2 \cdot u_{\sigma(j)}$ với σ là một hoán vị.

In the sum $a^2b + b^2c + c^2a$, each square u_j^2 is multiplied by exactly one of u_1, u_2, u_3 (the number following it in the cycle a, b, c), and these three factors occupy different positions, so the sum has the form $\sum u_j^2 \cdot u_{\sigma(j)}$ for some permutation σ .

Theo Định lý 2.16, tổng đó không vượt quá tổng cùng thứ tự $u_1^2 \cdot u_1 + u_2^2 \cdot u_2 + u_3^2 \cdot u_3 = a^3 + b^3 + c^3$. Đây là bất đẳng thức cần chứng minh.

By Theorem 2.16, that sum does not exceed the similarly ordered sum $u_1^2 \cdot u_1 + u_2^2 \cdot u_2 + u_3^2 \cdot u_3 = a^3 + b^3 + c^3$. This is the required inequality.

Dấu bằng: theo Định lý 2.8 cho ba số dương, $a^3 + a^3 + b^3 \geq 3a^2b$, dấu bằng khi $a = b$. Viết hai bất đẳng thức tương tự cho (b, c) và (c, a) rồi cộng lại: $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$. Dấu bằng toàn bộ khi $a = b, b = c, c = a$.

Equality: by Theorem 2.8 for three positive numbers, $a^3 + a^3 + b^3 \geq 3a^2b$, with equality when $a = b$. Write the two similar inequalities for (b, c) and (c, a) and add: $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$. Equality throughout needs $a = b, b = c, c = a$.

Vậy bất đẳng thức đúng, dấu bằng khi và chỉ khi $a = b = c$.

Hence the inequality holds, with equality if and only if $a = b = c$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Bất đẳng thức hoán vị cho biết hai việc cùng lúc: tổng lớn nhất khi ghép lớn với lớn, bé nhất khi ghép lớn với bé. Vì vậy nó dùng được cho cả chặn trên lẫn chặn dưới. Ví dụ, nếu $a \leq b \leq c$ thì $a \cdot c + b \cdot b + c \cdot a$ nhỏ hơn hoặc bằng $a^2 + b^2 + c^2$.

The rearrangement inequality says two things at once: the sum is largest when large pairs with large, and smallest when large pairs with small. It therefore gives both upper and lower bounds. For example, if $a \leq b \leq c$ then $a \cdot c + b \cdot b + c \cdot a$ is at most $a^2 + b^2 + c^2$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng hoán vị mà không kiểm tra thứ tự của hai bộ. Với a, b, c âm, bộ (a, b, c) và (a^2, b^2, c^2) không cùng thứ tự, kết luận có thể sai. Phải ghi rõ điều kiện dương hoặc sắp xếp lại trước.

Using rearrangement without checking the order of the two lists. For negative a, b, c the lists (a, b, c) and (a^2, b^2, c^2) are not ordered alike and the conclusion may fail. State the positivity condition or sort first.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Giả sử $a \geq b \geq c$ cho biểu thức chỉ đối xứng vòng quanh. Với $a^2b + b^2c + c^2a$, bộ $(3, 2, 1)$ cho $18 + 4 + 3 = 25$ còn bộ $(1, 2, 3)$ cho $2 + 12 + 9 = 23$: thứ tự quyết định giá trị. Chỉ được sắp thứ tự khi biểu thức đối xứng theo mọi hoán vị; còn lại chỉ được quay vòng.

Assuming $a \geq b \geq c$ for an expression that is only cyclic. For $a^2b + b^2c + c^2a$ the triple $(3, 2, 1)$ gives

$18 + 4 + 3 = 25$ while $(1, 2, 3)$ gives $2 + 12 + 9 = 23$: the order decides the value. Sorting is allowed only for an expression symmetric under every permutation; otherwise one may only rotate.

2.5. Chuỗi trung bình và bất đẳng thức Bernoulli — The chain of means and Bernoulli's inequality

ĐỊNH LÝ 2.19 (Chuỗi HM–GM–AM–QM) / THEOREM 2.19 (HM–GM–AM–QM chain) — Với n số dương $x_1, \dots, x_n$, gọi $HM = n/(1/x_1 + \dots + 1/x_n)$ (trung bình điều hòa), $GM = (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$, $AM = (x_1 + \dots + x_n)/n$, $QM = \sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)/n}$ (trung bình bình phương). Khi đó $HM \leq GM \leq AM \leq QM$, và dấu bằng ở bất kỳ chỗ nào xảy ra khi và chỉ khi mọi x_i bằng nhau.

For n positive numbers $x_1, \dots, x_n$, let $HM = n/(1/x_1 + \dots + 1/x_n)$ (harmonic mean), $GM = (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$, $AM = (x_1 + \dots + x_n)/n$, $QM = \sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)/n}$ (quadratic mean). Then $HM \leq GM \leq AM \leq QM$, and equality anywhere in the chain holds if and only if all x_i are equal.

Chứng minh. / Proof.

$GM \leq AM$ chính là Định lý 2.9.

$GM \leq AM$ is Theorem 2.9 itself.

$HM \leq GM$: áp dụng Định lý 2.9 cho n số dương $1/x_1, \dots, 1/x_n$: $(1/x_1 + \dots + 1/x_n)/n \geq (1/(x_1 \cdots x_n))^{1/n} = 1/GM$. Lấy nghịch đảo hai vế dương: $n/(1/x_1 + \dots + 1/x_n) \leq GM$.

$HM \leq GM$: apply Theorem 2.9 to the n positive numbers $1/x_1, \dots, 1/x_n$: $(1/x_1 + \dots + 1/x_n)/n \geq (1/(x_1 \cdots x_n))^{1/n} = 1/GM$. Taking reciprocals of the positive sides: $n/(1/x_1 + \dots + 1/x_n) \leq GM$.

$AM \leq QM$: áp dụng Định lý 2.12 cho bộ $(1, \dots, 1)$ và $(x_1, \dots, x_n)$: $(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n \cdot (x_1^2 + \dots + x_n^2)$. Chia cho n^2 rồi lấy căn dương hai vế.

$AM \leq QM$: apply Theorem 2.12 to the lists $(1, \dots, 1)$ and $(x_1, \dots, x_n)$: $(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n \cdot (x_1^2 + \dots + x_n^2)$. Divide by n^2 and take positive square roots.

Dấu bằng: mỗi bước có dấu bằng khi các số bằng nhau (AM–GM) hoặc khi (x_i) tỉ lệ với $(1, \dots, 1)$ (Cauchy–Schwarz), tức cũng là khi các số bằng nhau.

Equality: each step has equality when the numbers are equal (AM–GM) or when (x_i) is proportional to $(1, \dots, 1)$ (Cauchy–Schwarz), which again means the numbers are equal. ■

$$2ab/(a+b) \leq \sqrt{ab} \leq (a+b)/2 \leq \sqrt{(a^2+b^2)/2} \quad (a, b > 0) \quad (2.6)$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Với $a, b > 0$: $2ab/(a+b) \leq \sqrt{ab} \leq (a+b)/2 \leq \sqrt{(a^2+b^2)/2}$. Hệ quả hay dùng: $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$.

For $a, b > 0$: $2ab/(a+b) \leq \sqrt{ab} \leq (a+b)/2 \leq \sqrt{(a^2+b^2)/2}$. A frequent consequence: $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$.

NHẬN XÉT / REMARK — Từ $AM \leq QM$ cho hai số: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})/2 \leq \sqrt{(x+y)/2}$, tức $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$ với $x, y \geq 0$. Đây là cách nhanh để chặn tổng hai căn bằng tổng bên trong, dấu bằng khi $x = y$.

From $AM \leq QM$ for two numbers: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})/2 \leq \sqrt{(x+y)/2}$, that is $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$ for $x, y \geq 0$. This is a quick way to bound a sum of two roots by the sum inside, with equality when $x = y$.

ĐỊNH LÝ 2.20 (Bất đẳng thức Bernoulli) / THEOREM 2.20 (Bernoulli's inequality) — Với mọi số thực $x \geq -1$ và số nguyên dương n : $(1+x)^n \geq 1+nx$. Dấu bằng khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $n = 1$.
For every real $x \geq -1$ and positive integer n : $(1+x)^n \geq 1+nx$. Equality holds if and only if $x = 0$ or $n = 1$.

Chứng minh. / Proof.

Nếu $x = 0$ hoặc $n = 1$ thì hai vế bằng nhau. Xét $x \geq -1$, $x \neq 0$ và $n \geq 2$, ta chứng minh $(1+x)^n > 1+nx$.

If $x = 0$ or $n = 1$ both sides are equal. Take $x \geq -1$, $x \neq 0$ and $n \geq 2$; we prove $(1+x)^n > 1+nx$.

Với $x = -1$: vế trái bằng 0, vế phải bằng $1-n < 0$, đúng. Với $x > -1$, $x \neq 0$, quy nạp theo n . Cơ sở $n = 2$: $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$ vì $x \neq 0$. Bước quy nạp: giả sử $(1+x)^n > 1+nx$. Vì $1+x > 0$, nhân hai vế:

For $x = -1$: the left side is 0 and the right side is $1-n < 0$, true. For $x > -1$, $x \neq 0$, use induction on n . Base $n = 2$: $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$ because $x \neq 0$. Inductive step: assume $(1+x)^n > 1+nx$. Since $1+x > 0$, multiply both sides:

$$(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n+1$.

So the inequality holds for $n+1$. ■

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (x \geq -1, n \in \mathbb{Z}^+) \quad (2.7)$$

HỆ QUẢ 2.21 (Bất đẳng thức Weierstrass) / COROLLARY 2.21 (Weierstrass product inequality) — Nếu $x_1, \dots, x_n \geq -1$ cùng dấu (tất cả không âm, hoặc tất cả không dương) thì $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n$.
If $x_1, \dots, x_n \geq -1$ all have the same sign (all non-negative, or all non-positive) then $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n$.

Chứng minh. / Proof.

Quy nạp theo n . Với $n = 1$ hai vế bằng nhau. Giả sử đúng với n số và đặt $S = x_1 + \dots + x_n$. Thêm số x_{n+1} cùng dấu với các số trước, $1+x_{n+1} \geq 0$. Nhân bất đẳng thức $(1+x_1)\dots(1+x_n) \geq 1+S$ với $1+x_{n+1} \geq 0$:

Induction on n . For $n = 1$ both sides are equal. Assume the claim for n numbers and put $S = x_1 + \dots + x_n$. Add a number x_{n+1} of the same sign as the earlier ones, so $1+x_{n+1} \geq 0$. Multiply the inequality $(1+x_1)\dots(1+x_n) \geq 1+S$ by $1+x_{n+1} \geq 0$:

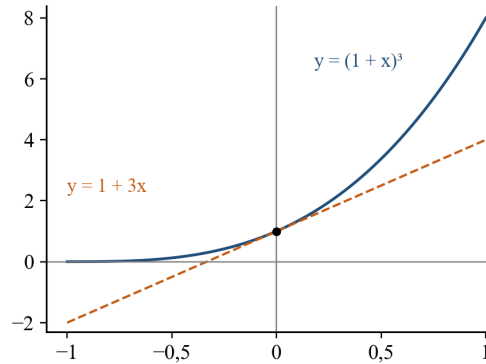
$$(1+x_1)\dots(1+x_{n+1}) \geq (1+S)(1+x_{n+1}) = 1+S+x_{n+1}+S \cdot x_{n+1} \geq 1+S+x_{n+1}$$

Bước cuối đúng vì S và x_{n+1} cùng dấu nên $S \cdot x_{n+1} \geq 0$.

The last step holds because S and x_{n+1} have the same sign, so $S \cdot x_{n+1} \geq 0$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Khi $x_1 = \dots = x_n = x$ ta được lại Định lý 2.20. Điều kiện "cùng dấu" không thể bỏ: với $x_1 = 1$, $x_2 = -1/2$ thì $(1+1)(1-1/2) = 1$, còn $1+x_1+x_2 = 3/2 > 1$.

When $x_1 = \dots = x_n = x$ we recover Theorem 2.20. The condition "same sign" cannot be dropped: for $x_1 = 1, x_2 = -1/2$ we get $(1+1)(1-1/2) = 1$ while $1 + x_1 + x_2 = 3/2 > 1$.



Hình 2.3. Đường $y = (1+x)^3$ nằm trên tiếp tuyến $y = 1+3x$ tại $x=0$ với $x \geq -1$
Figure 2.3. The curve $y = (1+x)^3$ lies above the tangent $y = 1+3x$ at $x=0$ for $x \geq -1$

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Số $1,01^{100} = (1 + 1/100)^{100}$ có dạng $(1+x)^n$ với $x = 1/100$ và $n = 100$, và $nx = 1$. Bernoulli cho ngay $1 + nx = 2$, nên ta suy ra cận dưới 2. Chỉ còn việc chọn bất đẳng thức chặt vì $x \neq 0$ và $n \geq 2$.

The number $1.01^{100} = (1 + 1/100)^{100}$ has the form $(1+x)^n$ with $x = 1/100$ and $n = 100$, and $nx = 1$. Bernoulli gives $1 + nx = 2$ at once, hence a lower bound of 2. What remains is to note that the inequality is strict because $x \neq 0$ and $n \geq 2$.

VÍ DỤ 2.11 (Bernoulli với số cụ thể) / EXAMPLE 2.11 (Bernoulli with concrete numbers) — Không dùng máy tính, chứng minh rằng $1,01^{100} > 2$.

Without a calculator, prove that $1.01^{100} > 2$.

Lời giải. / Solution.

Đặt $x = 1/100, n = 100$. Vì $x > -1, x \neq 0$ và $n \geq 2$, Định lý 2.20 cho bất đẳng thức chặt:
Put $x = 1/100, n = 100$. Since $x > -1, x \neq 0$ and $n \geq 2$, Theorem 2.20 gives a strict inequality:

$$(1 + 1/100)^{100} > 1 + 100 \cdot (1/100) = 2$$

Vậy $1,01^{100} > 2$.

Hence $1.01^{100} > 2$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Cận 2 khá thô: $1,01^{100}$ thực tế xấp xỉ 2,7. Để lấy cận tốt hơn, dùng khai triển nhị thức, giữ thêm số hạng bậc hai: $(1+x)^n \geq 1 + nx + C(n, 2)x^2$ với $x \geq 0$ ($C(n, k)$ là số tổ hợp chập k của n , SGK viết C_n^k). Với $x = 1/100, n = 100$ cận này cho $1 + 1 + 0,495$.

The bound 2 is crude: 1.01^{100} is in fact about 2.7. For a better bound use the binomial expansion and keep the quadratic term: $(1+x)^n \geq 1 + nx + C(n, 2)x^2$ for $x \geq 0$ ($C(n, k)$ is the number of k -element subsets of an n -element set; the textbook writes C_n^k). With $x = 1/100, n = 100$ this bound gives $1 + 1 + 0.495$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng Bernoulli khi $x < -1$. Với $x = -3$ và $n = 5$ thì $(1+x)^5 = (-2)^5 = -32$, nhỏ hơn $1 + nx = -14$, nên bất đẳng thức SAI.

Using Bernoulli when $x < -1$. For $x = -3$ and $n = 5$ we get $(1 + x)^5 = (-2)^5 = -32$, which is smaller than $1 + nx = -14$, so the inequality FAILS.

2.6. Trị tuyệt đối, bất đẳng thức tam giác và dạng căn Minkowski — Absolute values, the triangle inequality and Minkowski's form

ĐỊNH LÝ 2.22 (Bất đẳng thức tam giác) / THEOREM 2.22 (Triangle inequality) — Với mọi số thực a, b : $|a + b| \leq |a| + |b|$, dấu bằng khi và chỉ khi $ab \geq 0$. Hệ quả: $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$.

For all real a, b : $|a + b| \leq |a| + |b|$, with equality if and only if $ab \geq 0$. Consequence: $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$.

Chứng minh. / Proof.

Cả hai vế không âm nên so sánh bình phương của chúng (Tính chất 2.2(v)): $(|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 = 2|ab| - 2ab \geq 0$, vì $|ab| \geq ab$. Dấu bằng khi $|ab| = ab$, tức $ab \geq 0$.

Both sides are non-negative, so compare their squares (Property 2.2(v)): $(|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 = 2|ab| - 2ab \geq 0$, because $|ab| \geq ab$. Equality when $|ab| = ab$, that is $ab \geq 0$.

Hệ quả: $a = (a - b) + b$ nên $|a| \leq |a - b| + |b|$, tức $|a| - |b| \leq |a - b|$. Đổi vai trò a, b : $|b| - |a| \leq |a - b|$. Hai điều này cho $||a| - |b|| \leq |a - b|$. Còn $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |b|$.

Consequence: $a = (a - b) + b$ gives $|a| \leq |a - b| + |b|$, that is $|a| - |b| \leq |a - b|$. Swapping the roles of a and b : $|b| - |a| \leq |a - b|$. Together these give $||a| - |b|| \leq |a - b|$. Also $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |b|$. ■

TÍNH CHẤT 2.23 (Trị tuyệt đối và khoảng) / PROPERTY 2.23 (Absolute value and intervals) — Với $r \geq 0$: $|x| \leq r$ khi và chỉ khi $-r \leq x \leq r$; $|x| \geq r$ khi và chỉ khi $x \geq r$ hoặc $x \leq -r$.
For $r \geq 0$: $|x| \leq r$ if and only if $-r \leq x \leq r$; $|x| \geq r$ if and only if $x \geq r$ or $x \leq -r$.

Chứng minh. / Proof.

$|x|$ bằng số lớn hơn trong hai số x và $-x$. Vậy $|x| \leq r$ khi và chỉ khi $x \leq r$ và $-x \leq r$, tức $-r \leq x \leq r$. Khẳng định thứ hai là phủ định của khẳng định " $|x| < r$ ", tức $-r < x < r$, nên đúng khi $x \leq -r$ hoặc $x \geq r$.

$|x|$ equals the larger of the two numbers x and $-x$. So $|x| \leq r$ if and only if $x \leq r$ and $-x \leq r$, that is $-r \leq x \leq r$. The second claim is the negation of " $|x| < r$ ", that is $-r < x < r$, so it holds exactly when $x \leq -r$ or $x \geq r$. ■

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Bất đẳng thức tam giác: $|a + b| \leq |a| + |b|$, dấu bằng khi $ab \geq 0$. Với $r \geq 0$: $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.

Triangle inequality: $|a + b| \leq |a| + |b|$, with equality when $ab \geq 0$. For $r \geq 0$: $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.

ĐỊNH LÝ 2.24 (Dạng căn Minkowski) / THEOREM 2.24 (Minkowski's form) — Với mọi số thực a, b, c, d : $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$. Dấu bằng khi và chỉ khi $ad = bc$ và $ac + bd \geq 0$.

For all real a, b, c, d : $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$. Equality holds if and only if $ad = bc$ and $ac + bd \geq 0$.

Chứng minh. / Proof.

Cả hai vế không âm nên so sánh bình phương. Vế trái bình phương bằng $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{((a^2 + b^2)(c^2 + d^2))}$; vế phải bình phương bằng $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd)$. Cần chứng minh $\sqrt{((a^2 + b^2)(c^2 + d^2))} \geq ac + bd$.

Both sides are non-negative, so compare squares. The left side squared is $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{((a^2 + b^2)(c^2 + d^2))}$; the right side squared is $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd)$. We must show $\sqrt{((a^2 + b^2)(c^2 + d^2))} \geq ac + bd$.

Theo (2.3) với $n = 2$: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2 \geq 0$. Vậy $\sqrt{((a^2 + b^2)(c^2 + d^2))} \geq |ac + bd| \geq ac + bd$.

By (2.3) with $n = 2$: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2 \geq 0$. Hence $\sqrt{((a^2 + b^2)(c^2 + d^2))} \geq |ac + bd| \geq ac + bd$.

Dấu bằng khi $(ad - bc)^2 = 0$ và $|ac + bd| = ac + bd$, tức $ad = bc$ và $ac + bd \geq 0$.

Equality holds when $(ad - bc)^2 = 0$ and $|ac + bd| = ac + bd$, that is $ad = bc$ and $ac + bd \geq 0$. ■

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \quad (2.8)$$

Ý nghĩa hình học: $\sqrt{a^2 + b^2}$ là độ dài vector (a, b) , nên Định lý 2.24 nói rằng độ dài tổng hai vector không vượt quá tổng các độ dài. Dấu bằng khi hai vector cùng hướng. Dạng này dùng cho các biểu thức hai căn mà bên trong là tổng hai bình phương.

Geometric meaning: $\sqrt{a^2 + b^2}$ is the length of the vector (a, b) , so Theorem 2.24 says that the length of a sum of two vectors does not exceed the sum of the lengths. Equality holds when the two vectors point the same way. It applies to expressions with two square roots whose radicands are sums of two squares.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai căn có dạng $\sqrt{x^2 + 2^2}$ và $\sqrt{((6 - x)^2 + 3^2)}$: bên trong là tổng hai bình phương, trong đó phần chứa x là x và $6 - x$ có tổng bằng 6, không phụ thuộc x . Đặt $(a, b) = (x, 2)$ và $(c, d) = (6 - x, 3)$ thì $a + c = 6$ không đổi. Về hình học, tổng là $MP + PN$ với $M(0, 2)$, $N(6, -3)$, $P(x, 0)$ trên trục hoành, và đường gấp khúc ngắn nhất khi M, P, N thẳng hàng.

The two roots have the form $\sqrt{x^2 + 2^2}$ and $\sqrt{((6 - x)^2 + 3^2)}$: inside are sums of two squares, and the x -dependent parts x and $6 - x$ add up to 6, independent of x . Put $(a, b) = (x, 2)$ and $(c, d) = (6 - x, 3)$, so $a + c = 6$ is constant. Geometrically the sum is $MP + PN$ with $M(0, 2)$, $N(6, -3)$, $P(x, 0)$ on the horizontal axis, and the broken line is shortest when M, P, N are collinear.

VÍ DỤ 2.12 (Dạng căn và hình học) / EXAMPLE 2.12 (Radical form and geometry) —

Tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{((6 - x)^2 + 9)}$ trên $\mathbb{R}$.

Find the minimum of $F(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{((6 - x)^2 + 9)}$ over $\mathbb{R}$.

Lời giải. / Solution.

Đặt $a = x$, $b = 2$, $c = 6 - x$, $d = 3$. Theo Định lý 2.24:

Put $a = x$, $b = 2$, $c = 6 - x$, $d = 3$. By Theorem 2.24:

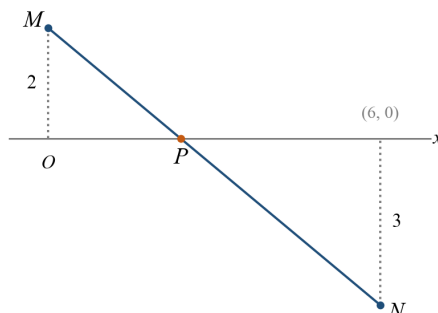
$$F(x) \geq \sqrt{((x + 6 - x)^2 + (2 + 3)^2)} = \sqrt{(36 + 25)} = \sqrt{61}$$

Dấu bằng khi $ad = bc$, tức $3x = 2(6 - x)$, $x = 12/5$; và $ac + bd = x(6 - x) + 6 = (12/5) \cdot (18/5) + 6 > 0$. Hai điều kiện đều thỏa mãn.

Equality holds when $ad = bc$, that is $3x = 2(6 - x)$, $x = 12/5$; and $ac + bd = x(6 - x) + 6 = (12/5) \cdot (18/5) + 6 > 0$. Both conditions are met.

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{61}$, đạt tại $x = 12/5$.

Hence the minimum is $\sqrt{61}$, attained at $x = 12/5$. ■



Hình 2.4. Tổng $MP + PN$ nhỏ nhất bằng $MN = \sqrt{61}$ khi P có hoành độ $12/5$

Figure 2.4. The sum $MP + PN$ is smallest, equal to $MN = \sqrt{61}$, when P has abscissa $12/5$

NHẬN XÉT / REMARK — Bất đẳng thức tam giác cho nhiều số: $|a_1| + \dots + |a_n| \geq |a_1 + \dots + a_n|$, chứng minh bằng quy nạp theo n từ trường hợp hai số. Một cách dùng: với x thực, $|x - 1| + |x - 7| = |x - 1| + |7 - x| \geq |(x - 1) + (7 - x)| = 6$, dấu bằng khi $(x - 1)(7 - x) \geq 0$, tức $1 \leq x \leq 7$.

The triangle inequality for many numbers: $|a_1| + \dots + |a_n| \geq |a_1 + \dots + a_n|$, proved by induction on n from the two-number case. One use: for real x , $|x - 1| + |x - 7| = |x - 1| + |7 - x| \geq |(x - 1) + (7 - x)| = 6$, with equality when $(x - 1)(7 - x) \geq 0$, that is $1 \leq x \leq 7$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho rằng dấu bằng của Minkowski chỉ cần $ad = bc$. Với $(a, b) = (1, 0)$ và $(c, d) = (-1, 0)$ ta có $ad = bc = 0$, nhưng vế trái bằng $1 + 1 = 2$ còn vế phải $\sqrt{((1 - 1)^2 + 0)} = 0$. Hai vectơ phải cùng hướng, tức cần thêm $ac + bd \geq 0$.

Believing that the equality case of Minkowski needs only $ad = bc$. For $(a, b) = (1, 0)$ and $(c, d) = (-1, 0)$ we have $ad = bc = 0$, yet the left side is $1 + 1 = 2$ while the right side is $\sqrt{((1 - 1)^2 + 0)} = 0$. The two vectors must point the same way, so $ac + bd \geq 0$ is also needed.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Bỏ dấu giá trị tuyệt đối bằng cách bình phương mà quên rằng $|a| \geq a$ chứ không bằng a . Từ $|a| \geq |b|$ chỉ suy ra $a^2 \geq b^2$, còn muốn suy ra $a \geq b$ thì cần thêm $a, b \geq 0$.

Dropping an absolute value by squaring while forgetting that $|a| \geq a$, not $|a| = a$. From $|a| \geq |b|$ one gets only $a^2 \geq b^2$; to get $a \geq b$ one also needs $a, b \geq 0$.

2.7. Bất đẳng thức Nesbitt và bài toán cực trị có điều kiện — Nesbitt's inequality and constrained extremum problems

ĐỊNH LÝ 2.25 (Bất đẳng thức Nesbitt) / THEOREM 2.25 (Nesbitt's inequality) — Với mọi $a, b, c > 0$: $a/(b + c) + b/(c + a) + c/(a + b) \geq 3/2$. Dấu bằng khi và chỉ khi $a = b = c$. For all $a, b, c > 0$: $a/(b + c) + b/(c + a) + c/(a + b) \geq 3/2$, with equality if and only if $a = b = c$.

Chứng minh. / Proof.

Viết $a/(b+c) = a^2/(a(b+c))$ và áp dụng Hệ quả 2.13 với các mẫu dương $a(b+c)$, $b(c+a)$, $c(a+b)$:

Write $a/(b+c) = a^2/(a(b+c))$ and apply Corollary 2.13 with the positive denominators $a(b+c)$, $b(c+a)$, $c(a+b)$:

$$\Sigma a/(b+c) \geq (a+b+c)^2/(2(ab+bc+ca))$$

Theo Bổ đề 2.5(c), $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, nên vế phải không nhỏ hơn $3/2$.

By Lemma 2.5(c), $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, so the right side is at least $3/2$.

Dấu bằng cần $a=b=c$ (từ bước cuối); khi $a=b=c$, mỗi phân số bằng $1/2$ và tổng bằng $3/2$.

Equality needs $a=b=c$ (from the last step); when $a=b=c$ each fraction equals $1/2$ and the sum is $3/2$. ■

$$a/(b+c) + b/(c+a) + c/(a+b) \geq 3/2 \quad (a, b, c > 0) \quad (2.9)$$

NHẬN XÉT / REMARK — Giá trị $3/2$ của Nesbitt chỉ đạt khi $a=b=c$. Khi một biến tiến tới 0 thì tổng lớn hơn: $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ cho $1+1+0=2 > 3/2$, nên cận $3/2$ là chặt nhưng chỉ đạt ở tâm.

The value $3/2$ in Nesbitt is attained only at $a=b=c$. When one variable tends to 0 the sum is larger: $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ gives $1+1+0=2 > 3/2$, so the bound $3/2$ is sharp but attained only at the centre.

HỆ QUẢ 2.26 (Nesbitt bốn biến) / COROLLARY 2.26 (Four-variable Nesbitt) — Với $a, b, c, d > 0$: $a/(b+c) + b/(c+d) + c/(d+a) + d/(a+b) \geq 2$. Dấu bằng khi và chỉ khi $a=c$ và $b=d$.

For $a, b, c, d > 0$: $a/(b+c) + b/(c+d) + c/(d+a) + d/(a+b) \geq 2$. Equality holds if and only if $a=c$ and $b=d$.

Chứng minh. / Proof.

Viết $a/(b+c) = a^2/(a(b+c))$ và tương tự, rồi dùng Hệ quả 2.13 với bốn mẫu dương. Tổng mẫu bằng $ab+ac+bc+bd+cd+ca+da+db = ab+2ac+bc+2bd+cd+da$. Vậy tổng cần chứng minh không nhỏ hơn

Write $a/(b+c) = a^2/(a(b+c))$ and similarly, then use Corollary 2.13 with the four positive denominators. The sum of the denominators is $ab+ac+bc+bd+cd+ca+da+db = ab+2ac+bc+2bd+cd+da$. So the sum is at least

$$(a+b+c+d)^2/(ab+bc+cd+da+2ac+2bd)$$

Hiệu $(a+b+c+d)^2 - 2(ab+bc+cd+da+2ac+2bd) = a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd = (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 0$, nên phân số trên không nhỏ hơn 2.

The difference $(a+b+c+d)^2 - 2(ab+bc+cd+da+2ac+2bd) = a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd = (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 0$, so the fraction above is at least 2.

Dấu bằng cần $a=c$, $b=d$ (từ bước cuối). Khi $a=c$ và $b=d$, bốn số hạng là $a/(b+a)$, $b/(a+b)$, $a/(b+a)$, $b/(a+b)$, tổng bằng $2(a+b)/(a+b) = 2$.

Equality needs $a = c$ and $b = d$ (from the last step). When $a = c$ and $b = d$ the four terms are $a/(b + a)$, $b/(a + b)$, $a/(b + a)$, $b/(a + b)$, summing to $2(a + b)/(a + b) = 2$. ■

ĐỊNH NGHĨA 2.27 (Giá trị nhỏ nhất) / DEFINITION 2.27 (Minimum value) — Hàm f có giá trị nhỏ nhất m trên tập M nếu (1) $f(x) \geq m$ với mọi $x \in M$ và (2) tồn tại $x_0 \in M$ để $f(x_0) = m$. Giá trị lớn nhất định nghĩa tương tự với chiều ngược lại.

A function f has minimum value m on a set M if (1) $f(x) \geq m$ for all $x \in M$ and (2) there is $x_0 \in M$ with $f(x_0) = m$. The maximum is defined similarly with the reverse direction.

Lời giải bài cực trị có hai nửa không thể thiếu: chặn (điều kiện (1)) và đạt được (điều kiện (2)). Bỏ nửa thứ hai là lỗi phổ biến nhất, như ví dụ sau cho thấy khi điều kiện đề cản điểm rơi quen thuộc.

A solution to an extremum problem has two indispensable halves: the bound (condition (1)) and attainment (condition (2)). Dropping the second half is the most common error, as the next example shows when the constraint of the problem blocks the familiar equality point.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Không có ràng buộc, $a + 1/a \geq 2$ (tại $a = 1$) và $b + 4/b \geq 4$ (tại $b = 2$), nên giá trị nhỏ nhất là 6 tại $(a, b) = (1, 2)$. Nhưng khi đó $a + b = 3 > 2$, vi phạm điều kiện. Điểm rơi quen thuộc nằm ngoài miền, nên cực tiểu phải ở biên $a + b = 2$. Muốn xử lý, đặt $t = a + b$ và dùng dạng Engel để gom $1/a + 4/b$ thành một hàm của t .

Without the constraint, $a + 1/a \geq 2$ (at $a = 1$) and $b + 4/b \geq 4$ (at $b = 2$), so the minimum would be 6 at $(a, b) = (1, 2)$. But then $a + b = 3 > 2$, violating the condition. The familiar equality point lies outside the domain, so the minimum must be on the boundary $a + b = 2$. To handle it, put $t = a + b$ and use the Engel form to collect $1/a + 4/b$ into a function of t .

VÍ DỤ 2.13 (Điểm rơi bị ràng buộc chặn) / EXAMPLE 2.13 (Equality point blocked by a constraint) — Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = a + b + 1/a + 4/b$.

Let $a, b > 0$ with $a + b \leq 2$. Find the minimum of $P = a + b + 1/a + 4/b$.

Lời giải. / Solution.

Đặt $t = a + b$, $0 < t \leq 2$. Theo Hệ quả 2.13: $1/a + 4/b = 1^2/a + 2^2/b \geq (1 + 2)^2/(a + b) = 9/t$. Vậy $P \geq t + 9/t$.

Put $t = a + b$, $0 < t \leq 2$. By Corollary 2.13: $1/a + 4/b = 1^2/a + 2^2/b \geq (1 + 2)^2/(a + b) = 9/t$. Hence $P \geq t + 9/t$.

Ta chứng minh $t + 9/t \geq 13/2$ với $0 < t \leq 2$:

We show that $t + 9/t \geq 13/2$ for $0 < t \leq 2$:

$$t + 9/t - 13/2 = (2t^2 - 13t + 18)/(2t) = (2t - 9)(t - 2)/(2t) \geq 0$$

vì $t > 0$, $2t - 9 < 0$ và $t - 2 \leq 0$ nên tích $(2t - 9)(t - 2)$ không âm.

because $t > 0$, $2t - 9 < 0$ and $t - 2 \leq 0$, so the product $(2t - 9)(t - 2)$ is non-negative.

Vậy $P \geq 13/2$. Dấu bằng cần $t = 2$ và, theo dạng Engel, $1/a : 2/b$ bằng nhau, tức $b = 2a$. Từ $a + b = 2$ ta được $a = 2/3$, $b = 4/3$ (thuộc miền).

Hence $P \geq 13/2$. Equality needs $t = 2$ and, in the Engel form, $1/a = 2/b$, that is $b = 2a$. From $a + b = 2$ we get $a = 2/3$, $b = 4/3$ (inside the domain).

Kiểm tra: $P = 2 + 3/2 + 3 = 13/2$. Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $13/2$, đạt tại $(a, b) = (2/3, 4/3)$.

Check: $P = 2 + 3/2 + 3 = 13/2$. Hence the minimum is $13/2$, attained at $(a, b) = (2/3, 4/3)$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Biểu thức $a^2b + b^2c + c^2a + abc$ chỉ bất biến khi hoán vị vòng, không đối xứng, nên không thể giả sử $a \geq b \geq c$. Nhưng ta luôn có thể quay vòng để một số nằm giữa hai số kia đứng ở vị trí b . Khi đó $(a - b)(b - c) \geq 0$, và hiệu giữa $b(a + c)^2$ với biểu thức đã cho đúng bằng $c(a - b)(b - c)$, kiểm tra bằng khai triển. Sau đó $b(a + c)^2 = 4 \cdot b \cdot ((a + c)/2)^2$ được chặn bằng AM–GM ba số vì $b + (a + c)/2 + (a + c)/2 = 3$.

The expression $a^2b + b^2c + c^2a + abc$ is invariant only under cyclic permutation, not symmetric, so we cannot assume $a \geq b \geq c$. But we can always rotate so that a number lying between the other two sits in position b . Then $(a - b)(b - c) \geq 0$, and the difference between $b(a + c)^2$ and the given expression is exactly $c(a - b)(b - c)$, as expansion confirms. Then $b(a + c)^2 = 4 \cdot b \cdot ((a + c)/2)^2$ is bounded by three-term AM–GM because $b + (a + c)/2 + (a + c)/2 = 3$.

VÍ DỤ 2.14 (Quay vòng và so sánh với $b(a + c)^2$) / EXAMPLE 2.14 (Rotation and comparison with $b(a + c)^2$) — Cho $a, b, c \geq 0$ với $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4$, và tìm mọi trường hợp dấu bằng.

Let $a, b, c \geq 0$ with $a + b + c = 3$. Prove that $a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4$, and find all equality cases.

Lời giải. / Solution.

Gọi $E(a, b, c) = a^2b + b^2c + c^2a + abc$. Quay vòng (a, b, c) thành (b, c, a) không đổi E . Trong ba số luôn có một số nằm giữa hai số còn lại (không lớn nhất, không nhỏ nhất); quay vòng sao cho số đó là b . Khi đó $(a - b)(b - c) \geq 0$.

Let $E(a, b, c) = a^2b + b^2c + c^2a + abc$. Rotating (a, b, c) to (b, c, a) leaves E unchanged. Among the three numbers one lies between the other two (neither the largest nor the smallest); rotate so that this number is b . Then $(a - b)(b - c) \geq 0$.

Khai triển:

Expand:

$$b(a + c)^2 - E = (a^2b + 2abc + bc^2) - (a^2b + b^2c + c^2a + abc) = abc + bc^2 - b^2c - c^2a = c(a - b)(b - c) \geq 0$$

Do đó $E \leq b(a + c)^2 = 4 \cdot b \cdot ((a + c)/2) \cdot ((a + c)/2)$. Theo Định lý 2.8 cho ba số không âm $b, (a + c)/2, (a + c)/2$ có tổng bằng 3:

So $E \leq b(a + c)^2 = 4 \cdot b \cdot ((a + c)/2) \cdot ((a + c)/2)$. By Theorem 2.8 for the three non-negative numbers $b, (a + c)/2, (a + c)/2$, whose sum is 3:

$$b \cdot ((a + c)/2) \cdot ((a + c)/2) \leq ((b + (a + c)/2 + (a + c)/2)/3)^3 = 1$$

Suy ra $E \leq 4$.

Hence $E \leq 4$.

Dấu bằng cần $c(a - b)(b - c) = 0$ và $b = (a + c)/2 = 1$, tức $b = 1, a + c = 2$ và $c = 0$ hoặc $a = 1$ hoặc $c = 1$. Ba khả năng cho $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ hoặc $(1, 1, 1)$. Trả lại phép quay vòng, các trường hợp dấu bằng của đề là $(1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 2)$.

Equality needs $c(a - b)(b - c) = 0$ and $b = (a + c)/2 = 1$, that is $b = 1$, $a + c = 2$ and $c = 0$ or $a = 1$ or $c = 1$. These give $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ or $(1, 1, 1)$. Undoing the rotation, the equality cases of the problem are $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 0, 2)$.

Kiểm tra: $E(2, 1, 0) = 4 \cdot 1 = 4$. Vậy giá trị lớn nhất của E bằng 4.

Check: $E(2, 1, 0) = 4 \cdot 1 = 4$. Hence the maximum of E is 4. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Điều kiện $a, b, c \geq 0$ (cho phép bằng 0) là cần thiết: dấu bằng thứ hai $(2, 1, 0)$ có một biến bằng 0. Nếu đề đòi $a, b, c > 0$ thì giá trị 4 không còn đạt được trừ tại $(1, 1, 1)$, nhưng 4 vẫn là cận trên nhỏ nhất.

The condition $a, b, c \geq 0$ (zero allowed) matters: the second equality case $(2, 1, 0)$ has a variable equal to 0. If the problem demanded $a, b, c > 0$, the value 4 would be attained only at $(1, 1, 1)$, while 4 would still be the least upper bound.

NHẬN XÉT / REMARK — Tổng quát hóa Ví dụ 2.13: với $a, b > 0$ và $a + b \leq s$, giá trị nhỏ nhất của $a + b + 1/a + 4/b$ là 6 nếu $s \geq 3$ (đạt tại $(1, 2)$, nằm trong miền), và là $s + 9/s$ nếu $0 < s < 3$ (đạt tại $a = s/3$, $b = 2s/3$, trên biên). Ngưỡng $s = 3$ chính là tổng của điểm rơi không ràng buộc.

A generalisation of Example 2.13: for $a, b > 0$ with $a + b \leq s$, the minimum of $a + b + 1/a + 4/b$ is 6 if $s \geq 3$ (attained at $(1, 2)$, inside the domain), and $s + 9/s$ if $0 < s < 3$ (attained at $a = s/3$, $b = 2s/3$, on the boundary). The threshold $s = 3$ is exactly the sum of the unconstrained equality point.

NHẬN XÉT / REMARK — Tổng quát hóa Ví dụ 2.7: nếu $w_1x_1^2 + \dots + w_nx_n^2 = c$ với $w_i > 0$, $c > 0$ thì $x_1 + \dots + x_n \leq \sqrt{(c \cdot (1/w_1 + \dots + 1/w_n))}$. Với $(w) = (1, 2, 3)$ và $c = 6$ ta được $\sqrt{(6 \cdot 11/6)} = \sqrt{11}$.

A generalisation of Example 2.7: if $w_1x_1^2 + \dots + w_nx_n^2 = c$ with $w_i > 0$, $c > 0$ then $x_1 + \dots + x_n \leq \sqrt{(c \cdot (1/w_1 + \dots + 1/w_n))}$. With $(w) = (1, 2, 3)$ and $c = 6$ we get $\sqrt{(6 \cdot 11/6)} = \sqrt{11}$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Chứng minh $f \geq m$ rồi kết luận giá trị nhỏ nhất là m mà không nêu điểm đạt. Thiếu điều kiện (2) của Định nghĩa 2.27 thì m chỉ là một cận dưới, chưa chắc là giá trị nhỏ nhất.

Proving $f \geq m$ and then declaring the minimum to be m without exhibiting a point where it is attained. Without condition (2) of Definition 2.27, m is only a lower bound, not necessarily the minimum.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Chia hai vế cho một biểu thức chưa biết dấu. Từ $x^2 \geq xy$ không suy ra $x \geq y$: $x = -3$, $y = 1$ cho $9 \geq -3$ nhưng $-3 < 1$. Phải xét riêng $x > 0$ và $x < 0$, hoặc chuyển vế rồi phân tích $x(x - y) \geq 0$.

Dividing both sides by an expression of unknown sign. From $x^2 \geq xy$ one cannot deduce $x \geq y$: $x = -3$, $y = 1$ gives $9 \geq -3$ but $-3 < 1$. Treat $x > 0$ and $x < 0$ separately, or move everything to one side and factor $x(x - y) \geq 0$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều khi có số âm. Từ $a > b$ và $c > d$ không suy ra $ac > bd$: $a = 1$, $b = -5$, $c = 2$, $d = -3$ cho $ac = 2 < 15 = bd$. Tính chất 2.2(iii) đòi mọi số không âm.

Multiplying same-direction inequalities when negative numbers are present. From $a > b$ and $c > d$ one cannot deduce $ac > bd$: $a = 1$, $b = -5$, $c = 2$, $d = -3$ gives $ac = 2 < 15 = bd$. Property 2.2(iii) requires all numbers non-negative.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Xử lý biểu thức có hai biến bằng cách tối ưu từng biến riêng rồi ghép lại, trong khi ràng buộc nối các biến với nhau. Với $a + b \leq 2$ và $P = a$

$+b + 1/a + 4/b$, tối ưu riêng cho $a = 1, b = 2$, tức $P = 6$, nhưng điểm này vi phạm $a + b \leq 2$ và cận 6 không đạt được; giá trị nhỏ nhất thật là $13/2$.

Optimising each variable separately and then combining, while a constraint links the variables. With $a + b \leq 2$ and $P = a + b + 1/a + 4/b$, separate optimisation gives $a = 1, b = 2$, that is $P = 6$, but this point violates $a + b \leq 2$ and the bound 6 is not attained; the true minimum is $13/2$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Một bài cực trị chỉ hoàn thành khi có đủ: (1) chứng minh bất đẳng thức; (2) chỉ ra bộ giá trị biến làm dấu bằng xảy ra và thuộc miền xác định; (3) kết luận bằng một câu "Vậy giá trị nhỏ nhất bằng ...".

An extremum problem is finished only when you have: (1) proved the inequality; (2) exhibited values of the variables for which equality holds and which lie in the domain; (3) concluded with a sentence "Hence the minimum is ...".

2.8. Kỹ thuật tách – ghép và các bổ đề nhỏ — *Splitting, pairing and small lemmas*

Nhiều bài khó thực ra là tổng của vài bất đẳng thức nhỏ, mỗi bất đẳng thức chỉ cần một dòng. Các bổ đề sau xuất hiện lặp lại ở dạng phân thức, bậc ba và tổng nghịch đảo.

Many hard problems are really a sum of a few small inequalities, each needing one line. The lemmas that follow recur in fractional, cubic and reciprocal-sum form.

BỔ ĐỀ 2.28 (Bốn bổ đề tách – ghép) / LEMMA 2.28 (Four splitting lemmas) — Với $x, y > 0$:

- (a) $x^2/y \geq 2x - y$, dấu bằng khi $x = y$;
- (b) $1/x + 1/y \geq 4/(x + y)$, dấu bằng khi $x = y$;
- (c) $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$, dấu bằng khi $x = y$;
- (d) $x/y + y/x \geq 2$, dấu bằng khi $x = y$.

For $x, y > 0$:

- (a) $x^2/y \geq 2x - y$, with equality when $x = y$;
- (b) $1/x + 1/y \geq 4/(x + y)$, with equality when $x = y$;
- (c) $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$, with equality when $x = y$;
- (d) $x/y + y/x \geq 2$, with equality when $x = y$.

Chứng minh. / *Proof.*

- (a) $x^2/y - (2x - y) = (x^2 - 2xy + y^2)/y = (x - y)^2/y \geq 0$ vì $y > 0$.
- (a) $x^2/y - (2x - y) = (x^2 - 2xy + y^2)/y = (x - y)^2/y \geq 0$ because $y > 0$.
- (b) $1/x + 1/y - 4/(x + y) = [(x + y)^2 - 4xy]/(xy(x + y)) = (x - y)^2/(xy(x + y)) \geq 0$.
- (b) $1/x + 1/y - 4/(x + y) = [(x + y)^2 - 4xy]/(xy(x + y)) = (x - y)^2/(xy(x + y)) \geq 0$.
- (c) $x^3 + y^3 - xy(x + y) = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = (x + y)(x - y)^2 \geq 0$.
- (c) $x^3 + y^3 - xy(x + y) = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = (x + y)(x - y)^2 \geq 0$.
- (d) $x/y + y/x - 2 = (x - y)^2/(xy) \geq 0$.
- (d) $x/y + y/x - 2 = (x - y)^2/(xy) \geq 0$. ■

BỔ ĐỀ 2.29 (Tách – ghép bậc $n + 1$) / LEMMA 2.29 (Splitting of degree $n + 1$) — Với $x, y \geq 0$ và $n \in \mathbb{Z}^+$: $x^{n+1} + y^{n+1} \geq x^n y + x y^n$. Dấu bằng khi và chỉ khi $x = y$.

For $x, y \geq 0$ and $n \in \mathbb{Z}^+$: $x^{n+1} + y^{n+1} \geq x^n y + x y^n$. Equality holds if and only if $x = y$.

Chứng minh. / Proof.

Hiệu hai vế bằng $(x^n - y^n)(x - y)$. Theo Tính chất 2.2(v), $x^n - y^n$ cùng dấu với $x - y$ khi $x, y \geq 0$, nên tích không âm; nó bằng 0 chỉ khi $x = y$.

The difference of the two sides equals $(x^n - y^n)(x - y)$. By Property 2.2(v), $x^n - y^n$ has the same sign as $x - y$ for $x, y \geq 0$, so the product is non-negative; it is 0 only when $x = y$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Với $n = 2$ ta được $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$, trùng Bổ đề 2.28(c). Với $n = 4$: $x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4$. Cộng vòng cho ba cặp: $2(a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}) \geq ab(a^{n-1} + b^{n-1}) + bc(b^{n-1} + c^{n-1}) + ca(c^{n-1} + a^{n-1})$.

For $n = 2$ we get $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$, the same as Lemma 2.28(c). For $n = 4$: $x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4$. Adding cyclically over three pairs: $2(a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}) \geq ab(a^{n-1} + b^{n-1}) + bc(b^{n-1} + c^{n-1}) + ca(c^{n-1} + a^{n-1})$.

HỆ QUẢ 2.30 (Tổng nghịch đảo) / COROLLARY 2.30 (Sum of reciprocals) — Với n số dương $x_1, \dots, x_n$: $(x_1 + \dots + x_n)(1/x_1 + \dots + 1/x_n) \geq n^2$. Dấu bằng khi và chỉ khi mọi x_i bằng nhau.

For n positive numbers $x_1, \dots, x_n$: $(x_1 + \dots + x_n)(1/x_1 + \dots + 1/x_n) \geq n^2$. Equality holds if and only if all x_i are equal.

Chứng minh. / Proof.

Áp dụng Định lý 2.12 cho hai bộ $\sqrt{x_i}$ và $1/\sqrt{x_i}$: tích từng cặp bằng 1, nên $(\sum 1)^2 = n^2 \leq (\sum x_i)(\sum 1/x_i)$. Dấu bằng khi hai bộ tỉ lệ, tức $\sqrt{x_i} = \lambda/\sqrt{x_i}$, $x_i = \lambda$ không đổi.

Apply Theorem 2.12 to the lists $\sqrt{x_i}$ and $1/\sqrt{x_i}$: each pair multiplies to 1, so $(\sum 1)^2 = n^2 \leq (\sum x_i)(\sum 1/x_i)$. Equality when the lists are proportional, that is $\sqrt{x_i} = \lambda/\sqrt{x_i}$, $x_i = \lambda$ constant. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Với $n = 3$, Hệ quả 2.30 cho $(a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) \geq 9$, tức $1/a + 1/b + 1/c \geq 9/(a + b + c)$. Dạng này quen dùng khi biết tổng $a + b + c$.

For $n = 3$, Corollary 2.30 gives $(a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) \geq 9$, that is $1/a + 1/b + 1/c \geq 9/(a + b + c)$. This form is used when the sum $a + b + c$ is known.

HỆ QUẢ 2.31 (AM–GM có trọng số nguyên) / COROLLARY 2.31 (AM–GM with integer weights) — Với $x_1, \dots, x_k > 0$ và các số nguyên dương $p_1, \dots, p_k$, đặt $N = p_1 + \dots + p_k$. Khi đó $(p_1x_1 + \dots + p_kx_k)/N \geq (x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k})^{1/N}$, dấu bằng khi và chỉ khi $x_1 = \dots = x_k$.

For $x_1, \dots, x_k > 0$ and positive integers $p_1, \dots, p_k$, put $N = p_1 + \dots + p_k$. Then $(p_1x_1 + \dots + p_kx_k)/N \geq (x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k})^{1/N}$, with equality if and only if $x_1 = \dots = x_k$.

Chứng minh. / Proof.

Áp dụng Định lý 2.9 cho N số dương gồm p_1 số bằng x_1 , p_2 số bằng x_2 , ..., p_k số bằng x_k . Trung bình cộng là $(p_1x_1 + \dots + p_kx_k)/N$, trung bình nhân là $(x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k})^{1/N}$. Dấu bằng khi N số bằng nhau, tức $x_1 = \dots = x_k$.

Apply Theorem 2.9 to the N positive numbers consisting of p_1 copies of x_1 , p_2 copies of x_2 , ..., p_k copies of x_k . The arithmetic mean is $(p_1x_1 + \dots + p_kx_k)/N$ and the geometric mean is $(x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k})^{1/N}$. Equality when all N numbers are equal, that is $x_1 = \dots = x_k$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Cộng vòng Bỏ đề 2.28(a) cho các cặp (a, b) , (b, c) , (c, a) ta được $a^2/b + b^2/c + c^2/a \geq (2a - b) + (2b - c) + (2c - a) = a + b + c$, kết quả trùng với dạng Engel nhưng chỉ cần một dòng.

Adding Lemma 2.28(a) cyclically for the pairs (a, b) , (b, c) , (c, a) gives $a^2/b + b^2/c + c^2/a \geq (2a - b) + (2b - c) + (2c - a) = a + b + c$, the same as the Engel form but in a single line.

NHẬN XÉT / REMARK — Cộng Bỏ đề 2.28(c) cho ba cặp được $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$. Về phải còn viết được bằng $(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$, nên bất đẳng thức này nổi bậc ba với các tổng đối xứng sơ cấp.

Adding Lemma 2.28(c) over three pairs gives $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$. The right side equals $(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$, so this inequality links cubes with the elementary symmetric sums.

NHẬN XÉT / REMARK — Hệ quả 2.31 giải thích cách chọn hệ số ở Ví dụ 2.5: để chặn x^2y ta dùng hai bản sao của x và một bản sao của y , nên $N = 3$ và điểm rơi là các số tách ra bằng nhau. Cùng cách ấy, a^2b^3 với $2a + 3b$ cố định dùng hai bản sao của a và ba bản sao của b ($N = 5$).

Corollary 2.31 explains the choice of coefficients in Example 2.5: to bound x^2y we use two copies of x and one copy of y , so $N = 3$ and the equality point is where the split numbers are equal. By the same device, a^2b^3 with $2a + 3b$ fixed uses two copies of a and three copies of b ($N = 5$).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cộng bất đẳng thức cùng chiều rồi trừ. Có thể cộng hai bất đẳng thức cùng chiều, nhưng không được trừ chúng: từ $a \geq b$ và $c \geq d$ không suy ra $a - c \geq b - d$ (chẳng hạn $3 \geq 1$ và $5 \geq 0$ cho $3 - 5 = -2 < 1 - 0 = 1$). Muốn trừ, chuyển về dạng hiệu trước.

Adding same-direction inequalities and then subtracting. Two inequalities in the same direction can be added but not subtracted: from $a \geq b$ and $c \geq d$ one cannot deduce $a - c \geq b - d$ (for instance $3 \geq 1$ and $5 \geq 0$ give $3 - 5 = -2 < 1 - 0 = 1$). To subtract, rewrite in difference form first.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — $x^2/y \geq 2x - y$; $1/x + 1/y \geq 4/(x + y)$; $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$; $(\sum x_i)(\sum 1/x_i) \geq n^2$. Cả bốn đều chứng minh trong một dòng từ $(x - y)^2 \geq 0$ hoặc Cauchy–Schwarz.

$x^2/y \geq 2x - y$; $1/x + 1/y \geq 4/(x + y)$; $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$; $(\sum x_i)(\sum 1/x_i) \geq n^2$. All four follow in one line from $(x - y)^2 \geq 0$ or Cauchy–Schwarz.

2.9. Bảng chiến lược chọn công cụ — Strategy table: choosing the tool

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Hiệu hai vế gom được thành tổng các bình phương <i>The difference of the sides groups into a sum of squares</i>	Biến đổi tương đương, Bỏ đề 2.5 <i>Equivalent transformation, Lemma 2.5</i>	Ví dụ 2.1, 2.2 <i>Example 2.1, 2.2</i>

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Tích hoặc tổng cố định, cần cực trị, hạng tử dương <i>Fixed product or sum, extremum wanted, positive terms</i>	AM–GM với điểm rơi, tách hạng tử <i>AM–GM with equality point, splitting</i>	Ví dụ 2.3, 2.5 <i>Example 2.3, 2.5</i>
Phân thức x^2/y , tổng nghịch đảo, $x^3 + y^3$, tích các tổng $a + b$, $b + c$, $c + a$ <i>Fractions x^2/y, sums of reciprocals, $x^3 + y^3$, products of sums $a + b$, $b + c$, $c + a$</i>	Bổ đề tách – ghép, AM–GM từng cặp <i>Splitting lemmas, AM–GM on each pair</i>	Bổ đề 2.28, Ví dụ 2.4 <i>Lemma 2.28, Example 2.4</i>
Biểu thức bậc nhất bị chặn bởi tổng bình phương <i>A linear expression bounded by a sum of squares</i>	Cauchy–Schwarz có trọng số <i>Weighted Cauchy–Schwarz</i>	Ví dụ 2.7 <i>Example 2.7</i>
Tổng phân thức, tổng mẫu hoặc tổng tử biết trước <i>A sum of fractions with known sum of denominators or numerators</i>	Dạng Engel (Titu), Nesbitt <i>Engel form (Titu), Nesbitt</i>	Ví dụ 2.8, 2.9 <i>Example 2.8, 2.9</i>
Hai vế có cùng thừa số, chỉ khác hoán vị vòng <i>Both sides share factors and differ by a cyclic shift</i>	Bất đẳng thức hoán vị, Chebyshev <i>Rearrangement, Chebyshev</i>	Ví dụ 2.10 <i>Example 2.10</i>
Lũy thừa $(1 + x)^n$ so với $1 + nx$ <i>A power $(1 + x)^n$ against $1 + nx$</i>	Bernoulli	Ví dụ 2.11 <i>Example 2.11</i>
Tổng hai căn $\sqrt{p^2 + q^2}$ với phần chứa biến có tổng không đổi <i>A sum of two roots $\sqrt{p^2 + q^2}$ whose variable parts have constant sum</i>	Minkowski, hình học <i>Minkowski, geometry</i>	Ví dụ 2.12 <i>Example 2.12</i>
Có điều kiện dạng " $\leq$ " chặn điểm rơi quen thuộc <i>A condition of the form "$\leq$" blocking the familiar equality point</i>	Đặt $t =$ tổng, khảo sát theo t <i>Put $t =$ the sum and study in t</i>	Ví dụ 2.13 <i>Example 2.13</i>
Biểu thức chỉ bất biến theo hoán vị vòng <i>An expression invariant only under cyclic permutation</i>	Quay vòng để một biến nằm giữa <i>Rotate so that one variable lies in the middle</i>	Ví dụ 2.14 <i>Example 2.14</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Bất đẳng thức	Inequality	Quan hệ $\geq, >, \leq$ hoặc $<$ giữa hai biểu thức <i>A relation $\geq, >, \leq$ or $<$ between two expressions</i>
Dấu bằng	Equality case	Giá trị biến làm hai vế bằng nhau <i>Values of the variables making both sides equal</i>
Điểm rơi	Equality point	Điểm tại đó AM–GM thành đẳng thức <i>The point at which AM–GM becomes an equality</i>
Biến đổi tương đương	Equivalent transformation	Biến đổi hai chiều, không đổi tập nghiệm <i>A two-way step that keeps the solution set</i>
Trung bình cộng	Arithmetic mean	$(a_1 + \dots + a_n)/n$
Trung bình nhân	Geometric mean	$(a_1 \cdots a_n)^{1/n}$, các số không âm <i>$(a_1 \cdots a_n)^{1/n}$, numbers non-negative</i>
Trung bình điều hòa	Harmonic mean	$n/(1/x_1 + \dots + 1/x_n)$, các số dương <i>$n/(1/x_1 + \dots + 1/x_n)$, numbers positive</i>
Trung bình bình phương	Quadratic mean	$\sqrt{((x_1^2 + \dots + x_n^2)/n)}$
Quy nạp Cauchy	Cauchy induction	Quy nạp lên 2^k rồi lùi từng bước <i>Induction up to 2^k, then stepping down</i>
Đồng nhất thức Lagrange	Lagrange's identity	Biểu diễn hiệu hai vế Cauchy–Schwarz bằng tổng bình phương <i>Writes the Cauchy–Schwarz gap as a sum of squares</i>
Dạng Engel	Engel form	$\sum a_i^2/b_i \geq (\sum a_i)^2/\sum b_i$
Hai bộ tỉ lệ	Proportional lists	Điều kiện dấu bằng của Cauchy–Schwarz <i>Equality condition of Cauchy–Schwarz</i>
Cùng thứ tự	Similarly ordered	Hai dãy cùng tăng <i>Both lists increasing</i>
Hoán vị	Permutation	Cách sắp xếp lại n phần tử <i>A rearrangement of n elements</i>
Dịch vòng	Cyclic shift	Hoán vị (a, b, c) thành (b, c, a) <i>Permuting (a, b, c) to (b, c, a)</i>
Giá trị tuyệt đối	Absolute value	Bằng x nếu $x \geq 0$, bằng $-x$ nếu $x < 0$ <i>Equals x if $x \geq 0$, equals $-x$ if $x < 0$</i>
Bất đẳng thức tam giác	Triangle inequality	Trị tuyệt đối của tổng không vượt tổng các trị tuyệt đối <i>The absolute value of a sum is at most the sum of the absolute values</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Giá trị nhỏ nhất	Minimum value	Cận dưới đạt được tại một điểm của miền <i>A lower bound attained at a point of the domain</i>
Cận dưới	Lower bound	Số không vượt quá mọi giá trị của hàm <i>A number not exceeding any value of the function</i>
Ràng buộc	Constraint	Điều kiện cho trước giữa các biến <i>A given condition linking the variables</i>
Tách hạng tử	Term splitting	Viết một hạng tử thành tổng để dùng AM–GM <i>Writing a term as a sum so that AM–GM applies</i>
Phản ví dụ	Counterexample	Bộ giá trị làm một khẳng định sai <i>Values that make a claim false</i>
Tam thức bậc hai	Quadratic trinomial	$ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ <i>$ax^2 + bx + c$ with $a \neq 0$</i>
Biệt thức	Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$, quyết định dấu tam thức <i>$\Delta = b^2 - 4ac$, decides the sign of the trinomial</i>
Trung bình có trọng số	Weighted mean	$(p_1x_1 + \dots + p_kx_k)/N$ với $N = \sum p_i$ <i>$(p_1x_1 + \dots + p_kx_k)/N$ with $N = \sum p_i$</i>

2.10. Bài tự luyện — Practice problems

Mức 1 — Học sinh giỏi cấp tỉnh — Level 1 — Provincial olympiad

Bài 2.1 / Problem 2.1 — Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b)(c + d)$. Tìm các trường hợp dấu bằng.

Prove that for all real a, b, c, d : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b)(c + d)$. Find the equality cases.

Bài 2.2 / Problem 2.2 — Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $9x + 1/(x - 1)$ với $x > 1$.

Find the minimum of the expression $9x + 1/(x - 1)$ for $x > 1$.

Bài 2.3 / Problem 2.3 — Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$: $(a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) \geq 9$. Suy ra: nếu $a + b + c = 1$ thì $1/a + 1/b + 1/c \geq 9$.

Prove that for all $a, b, c > 0$: $(a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) \geq 9$. Deduce: if $a + b + c = 1$ then $1/a + 1/b + 1/c \geq 9$.

Bài 2.4 / Problem 2.4 — Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = |x - 1| + |x - 3| + |x - 7|$ trên $\mathbb{R}$.

Find the minimum of $f(x) = |x - 1| + |x - 3| + |x - 7|$ over $\mathbb{R}$.

Mức 2 — Học sinh giỏi quốc gia — Level 2 — National olympiad

Bài 2.5 / Problem 2.5 — Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $2a + 3b = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của a^2b^3 .

Let $a, b > 0$ satisfy $2a + 3b = 12$. Find the maximum of a^2b^3 .

Bài 2.6 / Problem 2.6 — Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x + 2y - 2z = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^2 + y^2 + z^2$ và các giá trị x, y, z tại đó.

Let x, y, z be real numbers with $x + 2y - 2z = 9$. Find the minimum of $x^2 + y^2 + z^2$ and the values of x, y, z where it is attained.

Bài 2.7 / Problem 2.7 — Cho $a, b, c > 0$ với $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2/(a + b) + b^2/(b + c) + c^2/(c + a)$.

Let $a, b, c > 0$ with $a + b + c = 1$. Find the minimum of $a^2/(a + b) + b^2/(b + c) + c^2/(c + a)$.

Bài 2.8 / Problem 2.8 — Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$: $a^3 + b^3 + c^3 \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)/3 \geq (a + b + c)^3/9$.

Prove that for all $a, b, c > 0$: $a^3 + b^3 + c^3 \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)/3 \geq (a + b + c)^3/9$.

Mức 3 — Olympic quốc tế — Level 3 — International olympiad

Bài 2.9 / Problem 2.9 — Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$: $a^3/(a + 2b) + b^3/(b + 2c) + c^3/(c + 2a) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2/(a + b + c)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)/3$.

Prove that for all $a, b, c > 0$: $a^3/(a + 2b) + b^3/(b + 2c) + c^3/(c + 2a) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2/(a + b + c)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)/3$.

Bài 2.10 / Problem 2.10 — Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1) < n^n$.

Prove that for every integer $n \geq 2$: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1) < n^n$.

Bài 2.11 / Problem 2.11 — Tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 10x + 34}$ trên $\mathbb{R}$.

Find the minimum of $F(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 10x + 34}$ over $\mathbb{R}$.

Bài 2.12 / Problem 2.12 — Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$: $a/b + b/c + c/a \geq (a + b + c)/\sqrt[3]{abc}$. Tìm các trường hợp dấu bằng.

Prove that for all $a, b, c > 0$: $a/b + b/c + c/a \geq (a + b + c)/\sqrt[3]{abc}$. Find the equality cases.

2.11. Lời giải bài tự luyện — Solutions to practice problems

Bài 2.1 — Problem 2.1

Khai triển $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. Ta có đồng nhất thức (kiểm tra bằng khai triển bốn bình phương ở vế phải):

Expand $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. We have the identity (check by expanding the four squares on the right):

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a + b)(c + d) = (1/2) \cdot [(a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2]$$

Vế phải là tổng bình phương, không âm, nên bất đẳng thức đúng.

The right side is a sum of squares, so it is non-negative and the inequality holds.

Dấu bằng khi $a = c, a = d, b = c, b = d$, tức $a = b = c = d$. Vậy dấu bằng khi và chỉ khi bốn số bằng nhau.

Equality holds when $a = c, a = d, b = c, b = d$, that is $a = b = c = d$. Hence equality holds if and only if the four numbers are equal. ■

Bài 2.2 — Problem 2.2

Điều kiện $x > 1$ cho $x - 1 > 0$. Viết $9x + 1/(x - 1) = 9(x - 1) + 1/(x - 1) + 9$. Theo AM–GM hai số dương:

The condition $x > 1$ gives $x - 1 > 0$. Write $9x + 1/(x - 1) = 9(x - 1) + 1/(x - 1) + 9$. By two-term AM–GM on positive numbers:

$$9(x - 1) + 1/(x - 1) \geq 2 \cdot \sqrt{9(x - 1) \cdot 1/(x - 1)} = 6$$

Do đó biểu thức không nhỏ hơn $6 + 9 = 15$. Dấu bằng khi $9(x - 1) = 1/(x - 1)$, tức $(x - 1)^2 = 1/9$, $x - 1 = 1/3$ (lấy nghiệm dương), $x = 4/3 > 1$.

So the expression is at least $6 + 9 = 15$. Equality holds when $9(x - 1) = 1/(x - 1)$, that is $(x - 1)^2 = 1/9$, $x - 1 = 1/3$ (the positive root), $x = 4/3 > 1$.

Kiểm tra: $9 \cdot (4/3) + 1/(1/3) = 12 + 3 = 15$. Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 15, đạt tại $x = 4/3$.

Check: $9 \cdot (4/3) + 1/(1/3) = 12 + 3 = 15$. Hence the minimum is 15, attained at $x = 4/3$. ■

Bài 2.3 — Problem 2.3

Khai triển tích:

Expand the product:

$$(a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) = 3 + (a/b + b/a) + (b/c + c/b) + (c/a + a/c)$$

Với $x, y > 0$, theo AM–GM hai số, $x/y + y/x \geq 2\sqrt{1} = 2$. Áp dụng cho ba cặp: tổng ba ngoặc không nhỏ hơn 6. Vậy tích không nhỏ hơn $3 + 6 = 9$, dấu bằng khi $a = b = c$.

For $x, y > 0$, two-term AM–GM gives $x/y + y/x \geq 2\sqrt{1} = 2$. Applied to the three pairs, the sum of the three brackets is at least 6. So the product is at least $3 + 6 = 9$, with equality when $a = b = c$.

Nếu $a + b + c = 1$ thì tích bằng $1/a + 1/b + 1/c$, nên $1/a + 1/b + 1/c \geq 9$, dấu bằng tại $a = b = c = 1/3$.

If $a + b + c = 1$ the product equals $1/a + 1/b + 1/c$, so $1/a + 1/b + 1/c \geq 9$, with equality at $a = b = c = 1/3$. ■

Bài 2.4 — Problem 2.4

Theo bất đẳng thức tam giác, $|x - 1| + |x - 7| = |x - 1| + |7 - x| \geq |(x - 1) + (7 - x)| = 6$, dấu bằng khi $1 \leq x \leq 7$.

By the triangle inequality, $|x - 1| + |x - 7| = |x - 1| + |7 - x| \geq |(x - 1) + (7 - x)| = 6$, with equality when $1 \leq x \leq 7$.

Mặt khác $|x - 3| \geq 0$, dấu bằng khi $x = 3$. Cộng hai bất đẳng thức: $f(x) \geq 6 + 0 = 6$.

Also $|x - 3| \geq 0$, with equality when $x = 3$. Adding the two inequalities: $f(x) \geq 6 + 0 = 6$.

Tại $x = 3$ (thuộc đoạn $[1, 7]$) cả hai dấu bằng cùng xảy ra: $f(3) = 2 + 0 + 4 = 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 6, đạt tại $x = 3$.

At $x = 3$ (which lies in $[1, 7]$) both equalities hold at once: $f(3) = 2 + 0 + 4 = 6$. Hence the minimum is 6, attained at $x = 3$. ■

Bài 2.5 — Problem 2.5

Áp dụng AM–GM cho năm số dương a, a, b, b, b (hai số a và ba số b); tổng của chúng là $2a + 3b = 12$:

Apply AM–GM to the five positive numbers a, a, b, b, b (two copies of a and three of b); their sum is $2a + 3b = 12$:

$$a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \leq ((a + a + b + b + b)/5)^5 = (12/5)^5$$

Dấu bằng khi $a = b$; cùng $2a + 3b = 12$ cho $a = b = 12/5$ (dương).

Equality holds when $a = b$; with $2a + 3b = 12$ this gives $a = b = 12/5$ (positive).

Vậy giá trị lớn nhất của a^2b^3 bằng $(12/5)^5 = 248832/3125$, đạt tại $a = b = 12/5$.

Hence the maximum of a^2b^3 is $(12/5)^5 = 248832/3125$, attained at $a = b = 12/5$. ■

Bài 2.6 — Problem 2.6

Áp dụng Cauchy–Schwarz cho bộ $(1, 2, -2)$ và (x, y, z) :

Apply Cauchy–Schwarz to the lists $(1, 2, -2)$ and (x, y, z) :

$$81 = (x + 2y - 2z)^2 \leq (1^2 + 2^2 + (-2)^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 9(x^2 + y^2 + z^2)$$

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 \geq 9$. Dấu bằng khi $(x, y, z) = k(1, 2, -2)$; thế vào điều kiện: $k + 4k + 4k = 9k = 9$, nên $k = 1$.

Hence $x^2 + y^2 + z^2 \geq 9$. Equality holds when $(x, y, z) = k(1, 2, -2)$; substituting into the condition: $k + 4k + 4k = 9k = 9$, so $k = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 9, đạt tại $(x, y, z) = (1, 2, -2)$.

Hence the minimum is 9, attained at $(x, y, z) = (1, 2, -2)$. ■

Bài 2.7 — Problem 2.7

Các mẫu $a + b, b + c, c + a$ đều dương. Theo dạng Engel:

The denominators $a + b, b + c, c + a$ are all positive. By the Engel form:

$$\begin{aligned} a^2/(a + b) + b^2/(b + c) + c^2/(c + a) &\geq (a + b + c)^2/[(a + b) + (b + c) + (c + a)] \\ &= 1/(2(a + b + c)) = 1/2 \end{aligned}$$

Tại $a = b = c = 1/3$: mỗi số hạng bằng $(1/9)/(2/3) = 1/6$, tổng bằng $1/2$, nên cận $1/2$ đạt được.

At $a = b = c = 1/3$: each term equals $(1/9)/(2/3) = 1/6$ and the sum is $1/2$, so the bound $1/2$ is attained.

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $1/2$.

Hence the minimum is $1/2$. ■

Bài 2.8 — Problem 2.8

Bất đẳng thức thứ nhất: không mất tổng quát $a \leq b \leq c$. Khi đó $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ (các số dương), hai bộ (a, b, c) và (a^2, b^2, c^2) cùng thứ tự. Theo Chebyshev:

First inequality: WLOG $a \leq b \leq c$. Then $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ (the numbers are positive), so the lists (a, b, c) and (a^2, b^2, c^2) are ordered alike. By Chebyshev:

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

Chia hai vế cho 3 được bất đẳng thức thứ nhất.

Dividing both sides by 3 gives the first inequality.

Bất đẳng thức thứ hai: theo chuỗi QM–AM (hay Cauchy–Schwarz cho bộ $(1, 1, 1)$ và (a, b, c)), $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$. Nhân hai vế với $(a + b + c)/9 > 0$:

Second inequality: by QM–AM (or Cauchy–Schwarz for the lists $(1, 1, 1)$ and (a, b, c)), $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$. Multiply both sides by $(a + b + c)/9 > 0$:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)/3 \geq (a + b + c)^3/9$$

Dấu bằng cả hai bước khi $a = b = c$.

Equality in both steps holds when $a = b = c$. ■

Bài 2.9 — Problem 2.9

Viết $a^3/(a + 2b) = (a^2)^2/(a^2 + 2ab)$ và tương tự. Các mẫu $a^2 + 2ab$, $b^2 + 2bc$, $c^2 + 2ca$ đều dương, tổng của chúng là $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2$. Theo dạng Engel với tử a^2 , b^2 , c^2 :

Write $a^3/(a + 2b) = (a^2)^2/(a^2 + 2ab)$ and similarly. The denominators $a^2 + 2ab$, $b^2 + 2bc$, $c^2 + 2ca$ are positive and sum to $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2$. By the Engel form with numerators a^2 , b^2 , c^2 :

$$a^3/(a + 2b) + b^3/(b + 2c) + c^3/(c + 2a) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2/(a + b + c)^2$$

Bất đẳng thức thứ hai: chia hai vế cho $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, cần $(a^2 + b^2 + c^2)/(a + b + c)^2 \geq 1/3$, tức $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$. Bất đẳng thức này tương đương $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, đúng vì hiệu bằng $(1/2) \cdot [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$.

Second inequality: divide by $a^2 + b^2 + c^2 > 0$; we need $(a^2 + b^2 + c^2)/(a + b + c)^2 \geq 1/3$, that is $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$. This is equivalent to $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, true because the difference is $(1/2) \cdot [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$.

Tại $a = b = c = 1$: vế trái bằng $3 \cdot (1/3) = 1$, vế giữa bằng $9/9 = 1$, vế phải bằng $3/3 = 1$, nên dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

At $a = b = c = 1$: the left side is $3 \cdot (1/3) = 1$, the middle is $9/9 = 1$, the right is $3/3 = 1$, so equality holds when $a = b = c$. ■

Bài 2.10 — Problem 2.10

Xét n số dương lẻ $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$. Tổng của chúng là n^2 (cấp số cộng n số hạng, công sai 2: tổng bằng $n \cdot (1 + (2n - 1))/2 = n^2$), nên trung bình cộng bằng n .

Consider the n positive odd numbers $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$. Their sum is n^2 (an arithmetic progression with n terms and common difference 2: the sum is $n \cdot (1 + (2n - 1))/2 = n^2$), so the arithmetic mean is n .

Theo AM–GM cho n số: $(1 \cdot 3 \cdots (2n - 1))^{1/n} \leq n$.

By AM–GM for n numbers: $(1 \cdot 3 \cdots (2n - 1))^{1/n} \leq n$.

Với $n \geq 2$ các số 1 và 3 khác nhau nên các số không đều bằng nhau, dấu bằng không xảy ra: $(1 \cdot 3 \cdots (2n-1))^{1/n} < n$.

For $n \geq 2$ the numbers 1 and 3 differ, so the numbers are not all equal and equality cannot occur: $(1 \cdot 3 \cdots (2n-1))^{1/n} < n$.

Lũy thừa n hai vế dương: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < n^n$. Kiểm tra $n = 2$: $1 \cdot 3 = 3 < 4$.

Raising both positive sides to the power n : $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < n^n$. Check $n = 2$: $1 \cdot 3 = 3 < 4$. ■

Bài 2.11 — Problem 2.11

Hoàn thành bình phương: $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 2^2$ và $x^2 - 10x + 34 = (x-5)^2 + 3^2$. Đặt $a = x-1$, $b = 2$, $c = 5-x$, $d = 3$ (chú ý $(5-x)^2 = (x-5)^2$).

Complete the squares: $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 2^2$ and $x^2 - 10x + 34 = (x-5)^2 + 3^2$. Put $a = x-1$, $b = 2$, $c = 5-x$, $d = 3$ (note $(5-x)^2 = (x-5)^2$).

Theo bất đẳng thức Minkowski:

By Minkowski's inequality:

$$F(x) \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

Dấu bằng khi $ad = bc$, tức $3(x-1) = 2(5-x)$, $5x = 13$, $x = 13/5$; và $ac + bd = (x-1)(5-x) + 6 = (8/5)(12/5) + 6 > 0$. Cả hai điều kiện thỏa mãn.

Equality holds when $ad = bc$, that is $3(x-1) = 2(5-x)$, $5x = 13$, $x = 13/5$; and $ac + bd = (x-1)(5-x) + 6 = (8/5)(12/5) + 6 > 0$. Both conditions are met.

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{41}$, đạt tại $x = 13/5$.

Hence the minimum is $\sqrt{41}$, attained at $x = 13/5$. ■

Bài 2.12 — Problem 2.12

Đặt $t = \sqrt[3]{abc} > 0$. Theo AM–GM ba số dương a/b , a/b , b/c :

Put $t = \sqrt[3]{abc} > 0$. By three-term AM–GM on the positive numbers a/b , a/b , b/c :

$$a/b + a/b + b/c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{(a/b) \cdot (a/b) \cdot (b/c)} = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2/(bc)} = 3 \cdot \sqrt[3]{a^3/(abc)} = 3a/t$$

Tương tự, với bộ $(b/c, b/c, c/a)$ và $(c/a, c/a, a/b)$:

Similarly, for the triples $(b/c, b/c, c/a)$ and $(c/a, c/a, a/b)$:

$$b/c + b/c + c/a \geq 3b/t, \quad c/a + c/a + a/b \geq 3c/t$$

Cộng ba bất đẳng thức: vế trái là $3(a/b + b/c + c/a)$ vì mỗi phân số xuất hiện đúng ba lần; vế phải là $3(a + b + c)/t$. Chia cho 3 được điều phải chứng minh.

Add the three inequalities: the left side is $3(a/b + b/c + c/a)$ because each fraction appears exactly three times; the right side is $3(a + b + c)/t$. Divide by 3 to finish.

Dấu bằng khi $a/b = b/c = c/a$. Tích ba tỉ số này bằng 1 nên mỗi tỉ số bằng 1, tức $a = b = c$; ngược lại $a = b = c$ cho hai vế cùng bằng 3. Vậy dấu bằng khi và chỉ khi $a = b = c$.

Equality holds when $a/b = b/c = c/a$. The product of these three ratios is 1, so each equals 1, that is $a = b = c$; conversely $a = b = c$ makes both sides equal 3. Hence equality holds if and only if $a = b = c$. ■

Chương 3. Kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức nâng cao — Chapter 3. Advanced techniques for inequalities

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Đưa bất đẳng thức có điều kiện về dạng thuần nhất, và ngược lại dùng điều kiện để hạ bậc.
Turn a constrained inequality into a homogeneous one, and use the constraint to lower the degree.
- Chứng minh và vận dụng bất đẳng thức Schur, phương pháp SOS với tiêu chuẩn S_a , S_b , S_c .
Prove and apply Schur's inequality and the SOS method with the criteria on S_a , S_b , S_c .
- Dùng đánh giá tiếp tuyến, dồn biến về hai biến bằng nhau và đổi biến p , q , r .
Use tangent-line estimates, mixing variables to two equal ones, and the p , q , r substitution.
- Đổi biến Ravi cho cạnh tam giác; dùng hàm lồi và bất đẳng thức Jensen rời rạc mà không cần đạo hàm.
Apply the Ravi substitution to triangle sides; use convex functions and discrete Jensen without derivatives.
- Chọn kỹ thuật theo dấu hiệu của đề và trình bày lời giải đủ điểm.
Choose a technique from the shape of the problem and write a solution that earns full marks.

3.1. Thuần nhất hóa và chuẩn hóa — Homogenisation and normalisation

Nhiều đề cho điều kiện như $abc = 1$, $a + b + c = 3$ hay $ab + bc + ca = 3$. Điều kiện làm các số hạng có bậc khác nhau và che mất cấu trúc của bất đẳng thức. Có hai thao tác ngược chiều nhau: thuần nhất hóa dùng điều kiện để cho mọi số hạng cùng bậc, còn chuẩn hóa dùng tính thuần nhất để thêm một điều kiện gọn vào đề.

Many problems come with a condition such as $abc = 1$, $a + b + c = 3$ or $ab + bc + ca = 3$. The condition gives the terms different degrees and hides the structure of the inequality. Two opposite moves are available: homogenisation uses the condition to give every term the same degree, while normalisation uses homogeneity to add a convenient condition to the problem.

ĐỊNH NGHĨA 3.1 (Đa thức thuần nhất) / DEFINITION 3.1 (Homogeneous polynomial)

— Đa thức $P(a, b, c)$ gọi là thuần nhất bậc k nếu $P(ta, tb, tc) = t^k \cdot P(a, b, c)$ với mọi số thực t . Bất đẳng thức $P(a, b, c) \geq 0$ (hoặc $F \geq G$ với F, G thuần nhất cùng bậc) gọi là thuần nhất. Thương của hai đa thức thuần nhất bậc m và n là hàm thuần nhất bậc $m - n$.

A polynomial $P(a, b, c)$ is homogeneous of degree k if $P(ta, tb, tc) = t^k \cdot P(a, b, c)$ for every real t . An inequality $P(a, b, c) \geq 0$ (or $F \geq G$ with F, G homogeneous of the same degree) is called homogeneous. A quotient of homogeneous polynomials of degrees m and n is homogeneous of degree $m - n$.

TÍNH CHẤT 3.2 (Chuẩn hóa) / PROPERTY 3.2 (Normalisation) — Cho $F(a, b, c)$ thuần nhất (bậc nào cũng được), D là tập các bộ số dương, và $h(a, b, c) > 0$ là hàm thuần nhất bậc $d > 0$ trên D (ví dụ $h = a + b + c$, $h = abc$ với $d = 3$, $h = ab + bc + ca$ với $d = 2$). Nếu $F \geq 0$ đúng với mọi bộ trong D có $h = 1$ thì $F \geq 0$ đúng với mọi bộ trong D . Ta gọi đây là chuẩn hóa.

Let $F(a, b, c)$ be homogeneous (of any degree), D a set of positive triples, and $h(a, b, c) > 0$ a homogeneous function of degree $d > 0$ on D (for example $h = a + b + c$, $h = abc$ with $d = 3$, $h = ab +$

$bc + ca$ with $d = 2$). If $F \geq 0$ holds for every triple in D with $h = 1$, then $F \geq 0$ holds for every triple in D . This is called normalisation.

Chứng minh. / Proof.

Lấy (a, b, c) bất kỳ trong D và đặt $s = h(a, b, c)^{1/d} > 0$. Bộ $(a/s, b/s, c/s)$ có $h = s^{-d} \cdot h(a, b, c) = 1$. Giả thiết cho $F(a/s, b/s, c/s) \geq 0$.

Take any (a, b, c) in D and put $s = h(a, b, c)^{1/d} > 0$. The triple $(a/s, b/s, c/s)$ has $h = s^{-d} \cdot h(a, b, c) = 1$. The hypothesis gives $F(a/s, b/s, c/s) \geq 0$.

Vì F thuần nhất bậc k nên $F(a, b, c) = s^k \cdot F(a/s, b/s, c/s) \geq 0$, do $s^k > 0$.

Since F is homogeneous of degree k , $F(a, b, c) = s^k \cdot F(a/s, b/s, c/s) \geq 0$, because $s^k > 0$. ■

Hai cách dùng. Đề thuần nhất: tự chọn điều kiện cho dễ tính, chẳng hạn $a + b + c = 3$ hoặc $abc = 1$. Đề có điều kiện: nhân hoặc chia từng số hạng cho lũy thừa của biểu thức điều kiện để mọi số hạng cùng bậc, rồi chứng minh bằng các bất đẳng thức thuần nhất quen thuộc. Khi bậc của điều kiện không chia hết bậc của số hạng, ta lũy thừa cả hai vế (vế dương) để tránh căn.

There are two uses. For a homogeneous problem, choose a convenient condition yourself, such as $a + b + c = 3$ or $abc = 1$. For a constrained problem, multiply or divide each term by a power of the constraint expression so that all terms have the same degree, then prove the result with familiar homogeneous inequalities. When the degree of the constraint does not divide the degree of a term, raise both (positive) sides to a power to avoid roots.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Điều kiện $ab + bc + ca = 3$ có bậc 2, vế trái $(a + b)(b + c)(c + a)$ có bậc 3. Đưa 8 về bậc 3 cần $(q/3)^{3/2}$, có căn. Thay vì thế, tách bất đẳng thức làm hai bước: bậc 3 so với tích $p \cdot q$, rồi dùng $p \geq 3$ suy ra từ $p^2 \geq 3q = 9$.

The condition $ab + bc + ca = 3$ has degree 2, the left side $(a + b)(b + c)(c + a)$ has degree 3. Writing 8 in degree 3 needs $(q/3)^{3/2}$, a root. Instead split the proof in two: degree 3 against the product $p \cdot q$, then use $p \geq 3$, which follows from $p^2 \geq 3q = 9$.

VÍ DỤ 3.1 (Chuẩn hóa điều kiện) / EXAMPLE 3.1 (Using a normalising condition) —

Cho $a, b, c > 0$ thỏa $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8$.

Let $a, b, c > 0$ with $ab + bc + ca = 3$. Prove that $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8$.

Lời giải. / Solution.

Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca = 3$, $r = abc$. Khai triển trực tiếp:

Put $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca = 3$, $r = abc$. Direct expansion gives:

$$(a + b)(b + c)(c + a) = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc = pq - r$$

Hiệu $pq - 9r = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \geq 0$, nên $r \leq pq/9$.

The difference $pq - 9r = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \geq 0$, so $r \leq pq/9$.

Do đó $(a + b)(b + c)(c + a) = pq - r \geq (8/9) \cdot pq$.

Hence $(a + b)(b + c)(c + a) = pq - r \geq (8/9) \cdot pq$.

Từ $p^2 - 3q = ((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)/2 \geq 0$ ta có $p^2 \geq 9$, tức $p \geq 3$ vì $p > 0$. Vậy $(a + b)(b + c)(c + a) \geq (8/9) \cdot 3 \cdot 3 = 8$.

From $p^2 - 3q = ((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)/2 \geq 0$ we get $p^2 \geq 9$, that is $p \geq 3$ since $p > 0$. Hence $(a + b)(b + c)(c + a) \geq (8/9) \cdot 3 \cdot 3 = 8$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Equality holds when $a = b = c = 1$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Vế trái $a + b + c$ có bậc 1, vế phải $ab + bc + ca$ có bậc 2, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ có bậc 2. Nhân vế trái với căn của $(a^2 + b^2 + c^2)/3$ (bằng 1) thì hai vế cùng bậc 2. Cả hai vế dương, bình phương lên để hết căn.

The left side $a + b + c$ has degree 1, the right side $ab + bc + ca$ has degree 2, the condition $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ has degree 2. Multiplying the left side by the square root of $(a^2 + b^2 + c^2)/3$ (which equals 1) gives degree 2 on both sides. Both sides are positive, so square to remove the root.

VÍ DỤ 3.2 (Thuần nhất hóa bằng căn) / EXAMPLE 3.2 (Homogenising with a root) —

Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh $a + b + c \geq ab + bc + ca$.

Let $a, b, c > 0$ with $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Prove that $a + b + c \geq ab + bc + ca$.

Lời giải. / Solution.

Đặt $P = a^2 + b^2 + c^2 (= 3)$, $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương $p \cdot \sqrt{P/3} \geq q$, tức (vì hai vế dương) $p^2 \cdot P \geq 3q^2$.

Put $P = a^2 + b^2 + c^2 (= 3)$, $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$. The claim is equivalent to $p \cdot \sqrt{P/3} \geq q$, that is (both sides positive) $p^2 \cdot P \geq 3q^2$.

Vì $p^2 = P + 2q$ nên $p^2 \cdot P - 3q^2 = (P + 2q)P - 3q^2 = P^2 + 2qP - 3q^2 = (P - q)(P + 3q)$.

Since $p^2 = P + 2q$ we get $p^2 \cdot P - 3q^2 = (P + 2q)P - 3q^2 = P^2 + 2qP - 3q^2 = (P - q)(P + 3q)$.

Mà $P - q = ((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)/2 \geq 0$ và $P + 3q > 0$, nên tích không âm.

Now $P - q = ((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)/2 \geq 0$ and $P + 3q > 0$, so the product is non-negative.

Với $P = 3$ điều đó cho $p \geq q$. Dấu bằng khi $a = b = c = 1$.

With $P = 3$ this gives $p \geq q$. Equality holds when $a = b = c = 1$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Chuẩn hóa chỉ đúng khi bất đẳng thức thuần nhất. Đề nào có hằng số tự do (ví dụ $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$) thì không được tự đặt $a + b + c = 3$.

Normalisation is valid only when the inequality is homogeneous. If the problem has a free constant (for example $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$), you may not set $a + b + c = 3$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Đặt $a + b + c = 3$ cho một bất đẳng thức không thuần nhất, hoặc sau khi chuẩn hóa quên rằng điều kiện miền ($a, b, c > 0$) vẫn phải giữ cho mọi bộ số.

Setting $a + b + c = 3$ for an inequality that is not homogeneous, or forgetting after normalising that the domain condition ($a, b, c > 0$) must hold for every triple.

3.2. Bất đẳng thức Schur — Schur's inequality

Ký hiệu $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Ký hiệu $\Sigma_{\text{sym}} a^2b$ nghĩa là tổng sáu số hạng $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$. Bất đẳng thức Schur bậc ba có hai dạng dấu bằng: $a = b = c$ và $(a, a, 0)$.

Write $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. The symbol $\Sigma_{\text{sym}} a^2b$ means the sum of six terms $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$. Schur's inequality of degree three has two kinds of equality case: $a = b = c$ and $(a, a, 0)$.

ĐỊNH LÝ 3.3 (Bất đẳng thức Schur) / THEOREM 3.3 (Schur's inequality) — Với mọi $a, b, c \geq 0$: $a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hoặc hai trong ba số bằng nhau và số còn lại bằng 0.

For all $a, b, c \geq 0$: $a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0$. Equality holds if and only if $a = b = c$, or two of the numbers are equal and the third is 0.

Chứng minh. / Proof.

Về trái đối xứng nên giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Gộp hai số hạng đầu: $a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) = (a-b)[a(a-c) - b(b-c)]$. Vì $a(a-c) - b(b-c) = (a-b)(a+b-c)$ nên tổng hai số hạng đầu bằng $(a-b)^2(a+b-c)$.

The left side is symmetric, so assume $a \geq b \geq c \geq 0$. Combine the first two terms: $a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) = (a-b)[a(a-c) - b(b-c)]$. Since $a(a-c) - b(b-c) = (a-b)(a+b-c)$, the first two terms add up to $(a-b)^2(a+b-c)$.

Do $b \geq c$ nên $a+b-c \geq a \geq 0$, suy ra $(a-b)^2(a+b-c) \geq 0$. Số hạng thứ ba $c(c-a)(c-b) = c(a-c)(b-c) \geq 0$ vì $c \geq 0$, $a \geq c$, $b \geq c$. Vậy tổng không âm.

Because $b \geq c$ we have $a+b-c \geq a \geq 0$, so $(a-b)^2(a+b-c) \geq 0$. The third term $c(c-a)(c-b) = c(a-c)(b-c) \geq 0$ since $c \geq 0$, $a \geq c$, $b \geq c$. Hence the sum is non-negative.

Dấu bằng cần $(a-b)^2(a+b-c) = 0$ và $c(a-c)(b-c) = 0$. Từ yếu tố thứ nhất: $a = b$, hoặc $a+b=c$; trường hợp sau cùng với $c \leq b \leq a$ ép $a=0$, nên cả ba số bằng 0. Với $a=b$, yếu tố thứ hai thành $c(a-c)^2 = 0$, tức $c=0$ hoặc $c=a$. Đó là hai dạng đã nêu.

Equality needs $(a-b)^2(a+b-c) = 0$ and $c(a-c)(b-c) = 0$. From the first factor: $a = b$, or $a+b=c$; in the latter case $c \leq b \leq a$ forces $a=0$, so all three numbers are 0. With $a=b$ the second factor becomes $c(a-c)^2 = 0$, so $c=0$ or $c=a$. These are the two stated forms. ■

Khai triển và dùng các biểu thức p, q, r , vế trái của bất đẳng thức Schur bằng $a^3 + b^3 + c^3 - \Sigma_{\text{sym}} a^2b + 3abc$, và bằng:

Expanded and written with p, q, r , the left side of Schur's inequality equals $a^3 + b^3 + c^3 - \Sigma_{\text{sym}} a^2b + 3abc$, and also:

$$a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) = p^3 - 4pq + 9r \quad (3.1)$$

HỆ QUẢ 3.4 / COROLLARY 3.4 — Với $a, b, c \geq 0$ ta có ba dạng tương đương của bất đẳng thức Schur: (1) $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$; (2) $r \geq p(4q - p^2)/9$; (3) nếu $p > 0$ thì $a^2 + b^2 + c^2 + 9abc/p \geq 2(ab + bc + ca)$.

For $a, b, c \geq 0$ there are three equivalent forms of Schur's inequality: (1) $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$; (2) $r \geq p(4q - p^2)/9$; (3) if $p > 0$ then $a^2 + b^2 + c^2 + 9abc/p \geq 2(ab + bc + ca)$.

Chứng minh. / Proof.

Dạng (1) là (3.1). Dạng (2) là (1) chuyển vế rồi chia cho 9. Với dạng (3): chia (1) cho $p > 0$ được $p^2 - 4q + 9r/p \geq 0$; thay $p^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2q$ ta được $a^2 + b^2 + c^2 - 2q + 9r/p \geq 0$, đúng là dạng (3).

Form (1) is (3.1). Form (2) is (1) rearranged and divided by 9. For form (3): dividing (1) by $p > 0$ gives $p^2 - 4q + 9r/p \geq 0$; substituting $p^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2q$ gives $a^2 + b^2 + c^2 - 2q + 9r/p \geq 0$, which is form (3). ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Điều kiện $a + b + c = 3$ cho $p = 3$ nên $a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 2q$. Bất đẳng thức cần chứng minh chỉ còn q và r . Dạng (2) của hệ quả 3.4 cho cận dưới của r theo q , đúng chiều cần dùng.

The condition $a + b + c = 3$ gives $p = 3$, so $a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 2q$. The claim then involves only q and r . Form (2) of corollary 3.4 gives a lower bound for r in terms of q , which is the direction we need.

VÍ DỤ 3.3 (Schur với điều kiện tổng) / EXAMPLE 3.3 (Schur with a sum condition) —

Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a + b + c = 3$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$.

Let $a, b, c \geq 0$ with $a + b + c = 3$. Prove that $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$.

Lời giải. / Solution.

Với $p = 3$ ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 2q$, và dạng (2) của hệ quả 3.4 cho $r \geq 3(4q - 9)/9 = (4q - 9)/3$.

With $p = 3$ we have $a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 2q$, and form (2) of corollary 3.4 gives $r \geq 3(4q - 9)/9 = (4q - 9)/3$.

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 9 - 2q + r \geq 9 - 2q + (4q - 9)/3 = 6 - 2q/3$$

Từ $p^2 \geq 3q$ ta có $q \leq 3$, nên $6 - 2q/3 \geq 6 - 2 = 4$.

From $p^2 \geq 3q$ we get $q \leq 3$, so $6 - 2q/3 \geq 6 - 2 = 4$.

Dấu bằng xảy ra khi $q = 3$, tức $a = b = c = 1$.

Equality holds when $q = 3$, that is $a = b = c = 1$. ■

VÍ DỤ 3.4 (Nesbitt mạnh hơn) / EXAMPLE 3.4 (A stronger Nesbitt) — Cho $a, b, c \geq 0$, trong đó không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh $a/(b + c) + b/(c + a) + c/(a + b) + 4abc/((a + b)(b + c)(c + a)) \geq 2$.

Let $a, b, c \geq 0$ with no two of them equal to 0. Prove that $a/(b + c) + b/(c + a) + c/(a + b) + 4abc/((a + b)(b + c)(c + a)) \geq 2$.

Lời giải. / Solution.

Quy đồng với mẫu chung $(a + b)(b + c)(c + a) > 0$. Tử số của $a/(b + c) + b/(c + a) + c/(a + b)$ là:

Use the common denominator $(a + b)(b + c)(c + a) > 0$. The numerator of $a/(b + c) + b/(c + a) + c/(a + b)$ is:

$$a(a + b)(a + c) + b(b + a)(b + c) + c(c + a)(c + b) = a^3 + b^3 + c^3 + \Sigma_{\text{sym}} a^2b + 3abc$$

Còn $2(a+b)(b+c)(c+a) = 2\sum_{\text{sym}} a^2b + 4abc$. Hiệu của vế trái và vế phải khi nhân với mẫu chung là:

Also $2(a+b)(b+c)(c+a) = 2\sum_{\text{sym}} a^2b + 4abc$. The difference between the two sides, after multiplying by the common denominator, is:

$$(a^3 + b^3 + c^3 + \sum_{\text{sym}} a^2b + 3abc + 4abc) - (2\sum_{\text{sym}} a^2b + 4abc) = a^3 + b^3 + c^3 - \sum_{\text{sym}} a^2b + 3abc$$

Đó chính là vế trái bất đẳng thức Schur, không âm theo định lý 3.3. Dấu bằng khi $a = b = c$ hoặc $(a, a, 0)$ và các hoán vị.

That is exactly the left side of Schur's inequality, non-negative by theorem 3.3. Equality holds when $a = b = c$, or at $(a, a, 0)$ and its permutations. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Ví dụ 3.4 làm mạnh bất đẳng thức Nesbitt: số hạng $4abc/((a+b)(b+c)(c+a))$ bằng $1/2$ tại $a = b = c$ và bằng 0 tại $(a, a, 0)$, nên tổng ba phân thức nhận giá trị $3/2$ tại tâm và 2 tại biên. Cả hai điểm đều là dấu bằng của Schur.

Example 3.4 strengthens Nesbitt's inequality: the term $4abc/((a+b)(b+c)(c+a))$ is $1/2$ at $a = b = c$ and 0 at $(a, a, 0)$, so the sum of the three fractions is $3/2$ at the centre and 2 on the boundary. Both points are equality cases of Schur.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Schur: $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$ với $a, b, c \geq 0$. Dấu bằng tại $(1, 1, 1)$ và $(1, 1, 0)$. Khi đề có hai dạng dấu bằng này cùng lúc, hãy nghĩ tới Schur.

Schur: $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$ for $a, b, c \geq 0$. Equality at $(1, 1, 1)$ and $(1, 1, 0)$. When a problem has both these equality cases at once, think of Schur.

3.3. Phương pháp SOS (tổng các bình phương) — The SOS method (sums of squares)

Nếu $F(a, b, c)$ đối xứng và $F(a, a, a) = 0$ thì thường viết được F thành tổng có hệ số là các biểu thức S_a, S_b, S_c nhân với bình phương hiệu hai biến. Các hệ số này không cần dương hết; định lý 3.5 cho biết khi nào vẫn kết luận được $F \geq 0$.

If $F(a, b, c)$ is symmetric and $F(a, a, a) = 0$, one can usually write F as a sum of squared differences multiplied by coefficients S_a, S_b, S_c . The coefficients need not all be positive; theorem 3.5 says when $F \geq 0$ can still be concluded.

$$F(a, b, c) = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \quad (3.2)$$

ĐỊNH LÝ 3.5 (Tiêu chuẩn SOS) / THEOREM 3.5 (SOS criteria) — Cho F có dạng (3.2) và giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Khi đó $F \geq 0$ nếu một trong các điều kiện sau đúng: (i) $S_a \geq 0, S_b \geq 0, S_c \geq 0$; (ii) $S_b \geq 0, S_a + S_b \geq 0, S_c + S_b \geq 0$; (iii) $b > 0, S_b \geq 0, S_c \geq 0$ và $a^2S_b + b^2S_a \geq 0$.

Let F have the form (3.2) and suppose $a \geq b \geq c \geq 0$. Then $F \geq 0$ if one of the following holds: (i) $S_a \geq 0, S_b \geq 0, S_c \geq 0$; (ii) $S_b \geq 0, S_a + S_b \geq 0, S_c + S_b \geq 0$; (iii) $b > 0, S_b \geq 0, S_c \geq 0$ and $a^2S_b + b^2S_a \geq 0$.

Chứng minh. / Proof.

(i) hiển nhiên: ba số hạng đều không âm.

(i) is immediate: all three terms are non-negative.

(ii) Vì $a - c = (a - b) + (b - c)$ với hai số hạng không âm, nên $(a - c)^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + 2(a - b)(b - c) \geq (a - b)^2 + (b - c)^2$. Nhân với $S_b \geq 0$ rồi cộng vào (3.2):

(ii) Since $a - c = (a - b) + (b - c)$ with both terms non-negative, $(a - c)^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + 2(a - b)(b - c) \geq (a - b)^2 + (b - c)^2$. Multiply by $S_b \geq 0$ and add into (3.2):

$$F \geq (S_c + S_b)(a - b)^2 + (S_a + S_b)(b - c)^2 \geq 0$$

(iii) Ta có $(a - c)b - a(b - c) = c(a - b) \geq 0$, nên $(a - c)b \geq a(b - c) \geq 0$. Bình phương: $b^2(a - c)^2 \geq a^2(b - c)^2$. Nhân với $S_b/b^2 \geq 0$:

(iii) We have $(a - c)b - a(b - c) = c(a - b) \geq 0$, so $(a - c)b \geq a(b - c) \geq 0$. Squaring: $b^2(a - c)^2 \geq a^2(b - c)^2$. Multiply by $S_b/b^2 \geq 0$:

$$F \geq S_c(a - b)^2 + (b - c)^2 \cdot (b^2 S_a + a^2 S_b)/b^2 \geq 0$$

■

Cách tìm S_a, S_b, S_c : viết hiệu hai vế thành tổng của các biểu thức dạng $(x - y)^2$ nhân hệ số, thường qua các đẳng thức $a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a - b)^2$, $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$, $1/a - 1/b = (b - a)/(ab)$. Tiêu chuẩn chỉ cần thứ tự $a \geq b \geq c$ nên bất đẳng thức phải đối xứng (hoặc ta xét đủ thứ tự).

To find S_a, S_b, S_c , rewrite the difference of the two sides as a sum of terms $(x - y)^2$ times coefficients, usually via the identities $a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a - b)^2$, $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$, $1/a - 1/b = (b - a)/(ab)$. The criterion needs the ordering $a \geq b \geq c$, so the inequality must be symmetric (or all orderings must be treated).

VÍ DỤ 3.5 (SOS với mọi hệ số dương) / EXAMPLE 3.5 (SOS with all coefficients positive)

— Chứng minh với $a, b, c > 0$: $(a^2 + b^2)/(a + b) + (b^2 + c^2)/(b + c) + (c^2 + a^2)/(c + a) \geq a + b + c$.

Prove that for $a, b, c > 0$: $(a^2 + b^2)/(a + b) + (b^2 + c^2)/(b + c) + (c^2 + a^2)/(c + a) \geq a + b + c$.

Lời giải. / Solution.

Với mỗi cặp: $(a^2 + b^2)/(a + b) - (a + b)/2 = (2a^2 + 2b^2 - (a + b)^2)/(2(a + b)) = (a - b)^2/(2(a + b))$.

For each pair: $(a^2 + b^2)/(a + b) - (a + b)/2 = (2a^2 + 2b^2 - (a + b)^2)/(2(a + b)) = (a - b)^2/(2(a + b))$.

Cộng ba đẳng thức, vì tổng $(a + b)/2 + (b + c)/2 + (c + a)/2 = a + b + c$:

Adding the three identities, since $(a + b)/2 + (b + c)/2 + (c + a)/2 = a + b + c$:

$$VT - (a + b + c) = (a - b)^2/(2(a + b)) + (b - c)^2/(2(b + c)) + (c - a)^2/(2(c + a)) \geq 0$$

Đây là dạng (3.2) với $S_c = 1/(2(a + b)) > 0$ và các hệ số còn lại tương tự, tiêu chuẩn (i). Dấu bằng khi $a = b = c$.

This is form (3.2) with $S_c = 1/(2(a + b)) > 0$ and the other coefficients similar, criterion (i). Equality holds when $a = b = c$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đây là bất đẳng thức Schur bậc 4 (tham số $t = 2$). Viết hiệu thành dạng (3.2): $a^2(a - b)(a - c)$ cộng hoán vị sẽ cho $S_a = (b^2 + c^2 - a^2)/2$, có thể âm khi a lớn nhất. Hai hệ số kia dương khi $a \geq b \geq c$, nên thử tiêu chuẩn (iii).

This is Schur's inequality of degree 4 (parameter $t = 2$). Writing the difference in the form (3.2): $a^2(a - b)(a - c)$ plus its permutations gives $S_a = (b^2 + c^2 - a^2)/2$, which can be negative when a is largest. The other two coefficients are positive when $a \geq b \geq c$, so try criterion (iii).

VÍ DỤ 3.6 (SOS và Schur bậc 4) / EXAMPLE 3.6 (SOS and degree-4 Schur) — Chứng minh với $a, b, c \geq 0$: $a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3$.

Prove that for $a, b, c \geq 0$: $a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3$.

Lời giải. / Solution.

Khai triển cho thấy hiệu hai vế bằng $F = a^2(a - b)(a - c) + b^2(b - a)(b - c) + c^2(c - a)(c - b)$. Khai triển nữa cho:

Expanding shows that the difference of the two sides is $F = a^2(a - b)(a - c) + b^2(b - a)(b - c) + c^2(c - a)(c - b)$. A further expansion gives:

$$2F = (b - c)^2(b^2 + c^2 - a^2) + (c - a)^2(c^2 + a^2 - b^2) + (a - b)^2(a^2 + b^2 - c^2)$$

Giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Nếu $b = 0$ thì $c = 0$ và $F = a^4 \geq 0$. Với $b > 0$: $S_c = (a^2 + b^2 - c^2)/2 \geq 0$ và $S_b = (c^2 + a^2 - b^2)/2 \geq 0$.

Assume $a \geq b \geq c \geq 0$. If $b = 0$ then $c = 0$ and $F = a^4 \geq 0$. For $b > 0$: $S_c = (a^2 + b^2 - c^2)/2 \geq 0$ and $S_b = (c^2 + a^2 - b^2)/2 \geq 0$.

Còn $S_a = (b^2 + c^2 - a^2)/2$ có thể âm; ta kiểm tra:

$S_a = (b^2 + c^2 - a^2)/2$ may be negative; we check:

$$2(a^2S_b + b^2S_a) = a^2(c^2 + a^2 - b^2) + b^2(b^2 + c^2 - a^2) = (a^2 - b^2)^2 + c^2(a^2 + b^2) \geq 0$$

Tiêu chuẩn (iii) cho $F \geq 0$. Dấu bằng khi $a = b = c$ hoặc $(a, a, 0)$.

Criterion (iii) gives $F \geq 0$. Equality holds when $a = b = c$ or at $(a, a, 0)$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Mỗi bất đẳng thức dạng (3.2) có nhiều cách chọn S_a, S_b, S_c , vì $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ có thể chuyển vế qua lại. Khi một cách chọn không thỏa tiêu chuẩn, thử cách khác trước khi bỏ SOS.

A given inequality of the form (3.2) allows many choices of S_a, S_b, S_c , because terms can be traded between the three squared differences. When one choice fails the criteria, try another before abandoning SOS.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Áp tiêu chuẩn (ii) hoặc (iii) mà không nêu giả thiết $a \geq b \geq c$, hoặc dùng cho bất đẳng thức không đối xứng nên không có quyền sắp thứ tự.

Applying criterion (ii) or (iii) without stating the assumption $a \geq b \geq c$, or using it on a non-symmetric inequality where the ordering cannot be assumed.

3.4. Phương pháp tiếp tuyến — The tangent-line method

Khi bất đẳng thức có dạng tổng $g(a) + g(b) + g(c)$ với điều kiện $a + b + c$ cố định, ta tìm một hàm bậc nhất $\alpha x + \beta$ nằm dưới (hoặc trên) g trên cả miền của biến, chạm g tại điểm

xảy ra dấu bằng. Cộng ba đánh giá một biến lại thì điều kiện tổng làm phần còn lại thành hằng số.

When the inequality has the form $g(a) + g(b) + g(c)$ with $a + b + c$ fixed, look for a linear function $\alpha x + \beta$ lying below (or above) g on the whole range of the variable and touching g at the equality point. Adding the three one-variable estimates, the sum condition turns the right side into a constant.

ĐỊNH LÝ 3.6 (Đánh giá tiếp tuyến) / THEOREM 3.6 (Tangent-line estimate) — Cho hàm g xác định trên tập I , điểm $m \in I$ và các số α, β sao cho $g(x) \geq \alpha x + \beta$ với mọi $x \in I$, và $g(m) = \alpha m + \beta$. Khi đó với $x_1, \dots, x_n \in I$ có $x_1 + \dots + x_n = nm$ ta có $g(x_1) + \dots + g(x_n) \geq n \cdot g(m)$. Dấu bằng xảy ra khi $x_1 = \dots = x_n = m$.

Let g be defined on a set I , let $m \in I$ and let α, β be numbers such that $g(x) \geq \alpha x + \beta$ for all $x \in I$, and $g(m) = \alpha m + \beta$. Then for $x_1, \dots, x_n \in I$ with $x_1 + \dots + x_n = nm$ we have $g(x_1) + \dots + g(x_n) \geq n \cdot g(m)$. Equality holds when $x_1 = \dots = x_n = m$.

Chứng minh. / Proof.

Cộng n bất đẳng thức $g(x_i) \geq \alpha x_i + \beta$:

Add the n inequalities $g(x_i) \geq \alpha x_i + \beta$:

$$g(x_1) + \dots + g(x_n) \geq \alpha(x_1 + \dots + x_n) + n\beta = \alpha nm + n\beta = n(\alpha m + \beta) = n \cdot g(m)$$

Khi mọi $x_i = m$ thì mỗi đánh giá là đẳng thức.

When every $x_i = m$ each estimate is an equality. ■

Tìm hệ số góc α không cần đạo hàm. Viết $g(x) - g(m) = (x - m) \cdot h(x)$ bằng biến đổi đại số (rút gọn thừa số $x - m$); khi đó $\alpha = h(m)$. Sau đó kiểm tra $g(x) - \alpha x - \beta$ có nhân tử $(x - m)^2$ và phần còn lại không âm trên I . Nếu phần còn lại đổi dấu trong I thì tiếp tuyến không dùng được trên cả miền.

Finding the slope α needs no derivative. Write $g(x) - g(m) = (x - m) \cdot h(x)$ by algebra (cancelling the factor $x - m$); then $\alpha = h(m)$. Next check that $g(x) - \alpha x - \beta$ has the factor $(x - m)^2$ and that the rest is non-negative on I . If the rest changes sign inside I , the tangent line cannot be used on the whole range.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Điểm rơi là $a = b = c = 1$ vì tổng bằng 3. Với $g(x) = 1/(x^2 + 1)$: $g(x) - g(1) = 1/(x^2 + 1) - 1/2 = (1 - x)(1 + x)/(2(x^2 + 1)) = (x - 1) \cdot [-(1 + x)/(2(x^2 + 1))]$. Vậy $h(x) = -(1 + x)/(2(x^2 + 1))$ và $\alpha = h(1) = -1/2$. Tiếp tuyến: $g(x) \geq 1/2 - (x - 1)/2 = (2 - x)/2$.

The equality point is $a = b = c = 1$ because the sum is 3. With $g(x) = 1/(x^2 + 1)$: $g(x) - g(1) = 1/(x^2 + 1) - 1/2 = (1 - x)(1 + x)/(2(x^2 + 1)) = (x - 1) \cdot [-(1 + x)/(2(x^2 + 1))]$. So $h(x) = -(1 + x)/(2(x^2 + 1))$ and $\alpha = h(1) = -1/2$. The tangent line: $g(x) \geq 1/2 - (x - 1)/2 = (2 - x)/2$.

VÍ DỤ 3.7 (Tiếp tuyến cơ bản) / EXAMPLE 3.7 (A basic tangent line) — Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a + b + c = 3$. Chứng minh $1/(a^2 + 1) + 1/(b^2 + 1) + 1/(c^2 + 1) \geq 3/2$.

Let $a, b, c \geq 0$ with $a + b + c = 3$. Prove that $1/(a^2 + 1) + 1/(b^2 + 1) + 1/(c^2 + 1) \geq 3/2$.

Lời giải. / Solution.

Với mọi $x \geq 0$: