

TÀI LIỆU ÔN THI VÀO LỚP 10

TỔNG ÔN MÔN TOÁN CẤP 2 (LỚP 6–9) NÂNG CAO

Phục vụ thi vào lớp 10 · Có phần nâng cao cho học sinh thi chuyên

Advanced Lower Secondary Maths Revision (Grades 6–9) for the Grade 10 Entrance Exam

Số và đại số · Hàm số và phương trình · Hình học · Thống kê, xác suất

Mỗi dạng đề: giải thích, các bước, ví dụ làm mẫu, lỗi hay mất điểm

Bài tự luyện ba mức có lời giải đầy đủ · Đề thi thử có thang điểm

Song ngữ Việt – Anh · Vietnamese – English

Phiên bản 1.0 – Tháng 10 năm 2026

<https://tailieuso.vn>

MỤC LỤC

CONTENTS

Chương 1. Số tự nhiên, số nguyên, chia hết – Chapter 1. Natural numbers, integers and divisibility	8
1.1. Tập hợp, cách ghi số và bốn phép tính – Sets, writing numbers and the four operations	9
1.2. Quan hệ chia hết và dấu hiệu chia hết – Divisibility and divisibility tests	12
1.3. Số nguyên tố và phân tích ra thừa số nguyên tố – Prime numbers and prime factorisation	14
1.4. Ước chung, bội chung, ƯCLN và BCNN – Common factors, common multiples, HCF and LCM.....	17
1.5. Số nguyên và các phép tính – Integers and their operations	22
1.6. Nâng cao: chứng minh chia hết, số chính phương, x nguyên để biểu thức nguyên – Advanced: divisibility proofs, squares, integer x	25
1.7. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – Multiple-choice and short-answer practice	29
1.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ – Strategy table and glossary	31
1.9. Bài tự luyện – Practice problems	33
1.10. Lời giải bài tự luyện – Solutions to practice problems	34
Chương 2. Phân số, số thập phân, số hữu tỉ, số thực và tỉ lệ – Chapter 2. Fractions, decimals, rationals, reals and proportion	39
2.1. Phân số: bằng nhau, rút gọn, so sánh, hỗn số – 2.1. Fractions: equal, simplify, compare, mixed numbers.....	40
2.2. Bốn phép tính với phân số và hai bài toán về phân số – 2.2. The four operations on fractions and two fraction problems	44
2.3. Số thập phân, làm tròn, tỉ số và tỉ số phần trăm – 2.3. Decimals, rounding, ratios and percentages.....	46
2.4. Số hữu tỉ: lũy thừa, thứ tự phép tính, quy tắc chuyển vế – 2.4. Rational numbers: powers, order of operations, moving terms.....	49
2.5. Số thập phân vô hạn tuần hoàn, số vô tỉ, số thực, giá trị tuyệt đối – 2.5. Recurring decimals, irrational numbers, real numbers, absolute value	52
2.6. Tỉ lệ thức, dãy tỉ số bằng nhau, đại lượng tỉ lệ thuận và tỉ lệ nghịch – 2.6. Proportions, chains of equal ratios, direct and inverse proportion	55
2.7. Nâng cao: tổng dãy phân số và so sánh lũy thừa – 2.7. Advanced: sums of fraction series and comparing powers.....	59
2.8. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – 2.8. Multiple-choice and short-answer practice	63
2.9. Bảng chiến lược và bảng thuật ngữ – 2.9. Strategy table and glossary.....	65
2.10. Bài tự luyện – Practice problems	67
2.11. Lời giải bài tự luyện – Solutions to practice problems	68
Chương 3. Đa thức, hằng đẳng thức, phân tích nhân tử và phân thức – Chapter 3. Polynomials, identities, factorisation and algebraic fractions.....	73

3.1. Đơn thức và đa thức nhiều biến – <i>Monomials and polynomials in several variables</i>	74
3.2. Đa thức một biến: bậc, nghiệm và bốn phép tính – <i>Polynomials in one variable: degree, roots and the four operations</i>	76
3.3. Bảy hằng đẳng thức đáng nhớ – <i>The seven standard identities</i>	79
3.4. Phân tích đa thức thành nhân tử – <i>Factorising polynomials</i>	82
3.5. Phân thức đại số: điều kiện xác định và rút gọn – <i>Algebraic fractions: domain and simplification</i>	85
3.6. Bốn phép tính với phân thức và bài rút gọn tổng hợp – <i>The four operations on fractions and the combined simplification</i>	87
3.7. Nâng cao: giá trị nguyên và biểu thức có điều kiện – <i>Advanced: integer values and expressions with a condition</i>	90
3.8. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	93
3.9. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	97
3.10. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	98
Chương 4. Căn bậc hai, căn bậc ba và bài toán rút gọn biểu thức – Chapter 4. Square roots, cube roots and simplifying expressions	103
4.1. Căn bậc hai, căn thức bậc hai và điều kiện xác định – <i>4.1. Square roots, radical expressions and the defined condition</i>	104
4.2. Khai căn với phép nhân, phép chia; đưa thừa số ra ngoài và vào trong dấu căn – <i>4.2. Roots of products and quotients; taking factors out of and into a root</i>	107
4.3. Khử mẫu và trục căn thức ở mẫu – <i>4.3. Clearing and rationalising denominators</i>	110
4.4. Căn bậc ba – <i>4.4. Cube roots</i>	112
4.5. Bài toán rút gọn của đề vào 10 và các câu hỏi phụ – <i>4.5. The simplification question of the entrance exam and its follow-up parts</i>	115
4.6. Nâng cao: căn lồng, dãy trục căn và cực trị có căn – <i>4.6. Advanced: nested roots, telescoping sums and extrema with roots</i>	123
4.7. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>4.7. Multiple-choice and short-answer practice</i>	126
4.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ – <i>4.8. Strategy table and glossary</i>	128
4.9. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	131
4.10. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	132
Chương 5. Phương trình và bất phương trình bậc nhất một ẩn – Chapter 5. Linear equations and inequalities in one unknown	137
5.1. Phương trình bậc nhất một ẩn – <i>Linear equations in one unknown</i>	138
5.2. Phương trình tích – <i>Product equations</i>	141
5.3. Phương trình chứa ẩn ở mẫu – <i>Equations with the unknown in a denominator</i>	143
5.4. Bất đẳng thức và tính chất – <i>Inequalities and their properties</i>	145
5.5. Bất phương trình bậc nhất một ẩn – <i>Linear inequalities in one unknown</i>	147
5.6. Phương trình và bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối – <i>Equations and inequalities with absolute values</i>	151
5.7. Giải và biện luận phương trình $ax = b$ theo tham số – <i>Solving and discussing $ax = b$ with a parameter</i>	154
5.8. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	158

5.9. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	162
5.10. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	163
Chương 6. Hàm số bậc nhất và hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn – Chapter 6.	
<i>Linear functions and simultaneous linear equations</i>	168
6.1. Hàm số và đồ thị của hàm số – <i>Functions and their graphs</i>	169
6.2. Hàm số bậc nhất, hệ số góc và vị trí hai đường thẳng – <i>Linear functions, slope and the position of two lines</i>	172
6.3. Phương trình bậc nhất hai ẩn và hệ hai phương trình – <i>Linear equations in two unknowns and pairs of equations</i>	179
6.4. Giải hệ bằng phương pháp thế và phương pháp cộng – <i>Solving by substitution and by elimination</i>	182
6.5. Hệ giải bằng cách đặt ẩn phụ – <i>Systems solved by a change of variable</i>	187
6.6. Hệ có tham số m – <i>Systems with a parameter m</i>	189
6.7. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	195
6.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ – <i>Strategy table and glossary</i>	197
6.9. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	199
6.10. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	201
Chương 7. Hàm số $y = ax^2$, phương trình bậc hai và định lý Viète – Chapter 7. The function $y = ax^2$, quadratic equations and Viète's theorem	207
7.1. Hàm số $y = ax^2$ và đồ thị parabol – <i>The function $y = ax^2$ and its parabola</i>	207
7.2. Phương trình bậc hai: công thức nghiệm và nhẩm nghiệm – <i>Quadratic equations: the formulas and solving by inspection</i>	210
7.3. Định lý Viète và biểu thức đối xứng của hai nghiệm – <i>Viète's theorem and symmetric expressions in the roots</i>	214
7.4. Bài toán tham số m của đề vào 10 – <i>Parameter-m problems of the entrance exam</i>	217
7.5. Tương giao của parabol (P): $y = ax^2$ và đường thẳng (d) – <i>Parabola (P): $y = ax^2$ and a line (d): intersections</i>	221
7.6. Phương trình quy về bậc hai – <i>Equations reducing to quadratics</i>	226
7.7. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	230
7.8. Tóm tắt công thức và bảng thuật ngữ – <i>Formula summary and glossary</i>	232
7.9. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	234
7.10. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	235
Chương 8. Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình – Chapter 8. Word problems by forming equations and systems	241
8.1. Quy trình ba bước và cách chọn ẩn – <i>The three-step method and how to choose the unknown</i>	242
8.2. Bài toán chuyển động – <i>Motion problems</i>	244
8.3. Bài toán năng suất: làm chung, làm riêng, vòi nước – <i>Work-rate problems: working together, working alone, taps</i>	248
8.4. Bài toán số, chữ số và hình học – <i>Problems on numbers, digits and geometry</i>	250
8.5. Mua bán, phần trăm, lãi đơn và lãi kép – <i>Trade, percentages, simple and compound interest</i>	252

8.6. Pha trộn dung dịch và tỉ lệ trong thực tế – <i>Mixing solutions and proportion in practice</i>	255
8.7. Bài toán đưa về phương trình bậc hai – <i>Problems leading to a quadratic equation</i>	258
8.8. Mức chuyên: ba ẩn, quan hệ đặc biệt, biện luận nghiệm nguyên – <i>Specialist level: three unknowns, special relations, integer reasoning</i>	261
8.9. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	266
8.10. Bảng chiến lược và thuật ngữ – <i>Strategy table and glossary</i>	268
8.11. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	271
8.12. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	272
Chương 9. Thống kê và xác suất – Chapter 9. Statistics and probability	278
9.1. Thu thập, phân loại dữ liệu và bảng thống kê – <i>Collecting and classifying data; statistical tables</i>	279
9.2. Đọc biểu đồ: tranh, cột, cột kép, quạt tròn, đoạn thẳng – <i>Reading charts: pictogram, bar, double bar, pie and line charts</i>	282
9.3. Phân tích số liệu từ biểu đồ và phát hiện số liệu sai – <i>Analysing chart data and finding wrong figures</i>	286
9.4. Bảng tần số, tần số tương đối và số trung bình – <i>Frequency tables, relative frequency and the mean</i>	288
9.5. Số liệu ghép nhóm – <i>Grouped data</i>	291
9.6. Kết quả có thể, biến cố và xác suất thực nghiệm – <i>Possible outcomes, events and experimental probability</i>	295
9.7. Phép thử, không gian mẫu và xác suất của biến cố – <i>Experiments, sample space and probability of an event</i>	297
9.8. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	303
9.9. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	307
9.10. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	309
Chương 10. Hình học phẳng nền tảng: góc, song song, tam giác bằng nhau, tứ giác – Chapter 10. Foundations of plane geometry: angles, parallel lines, congruent triangles, quadrilaterals	314
10.1. Đoạn thẳng, trung điểm và góc – <i>Segments, midpoints and angles</i>	315
10.2. Hai đường thẳng song song, định lý và chứng minh – <i>Parallel lines, theorems and proofs</i>	319
10.3. Tam giác: tổng ba góc, hai tam giác bằng nhau, tam giác cân – <i>Triangles: angle sum, congruent triangles, isosceles triangles</i>	323
10.4. Quan hệ cạnh – góc, bất đẳng thức tam giác và các đường đồng quy – <i>Side-angle relations, the triangle inequality and concurrent lines</i>	328
10.5. Tứ giác và các hình đặc biệt – <i>Quadrilaterals and special shapes</i>	332
10.6. Hình phẳng trong thực tiễn: chu vi, diện tích, đối xứng – <i>Plane figures in real life: perimeter, area, symmetry</i>	337
10.7. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	341
10.8. Tổng hợp: chiến lược và thuật ngữ – <i>Summary: strategy and terminology</i>	343
10.9. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	346

10.10. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	348
Chương 11. Định lí Thalès, tam giác đồng dạng, định lí Pythagore và hệ thức lượng – Chapter 11. Thales, similar triangles, Pythagoras and right-triangle relations	354
11.1. Định lí Thalès, đường trung bình và đường phân giác – <i>11.1. Thales' theorem, the midline and the angle bisector</i>	355
11.2. Tam giác đồng dạng và hình đồng dạng – <i>11.2. Similar triangles and similar figures</i>	360
11.3. Định lí Pythagore và đồng dạng của tam giác vuông – <i>11.3. Pythagoras' theorem and similar right triangles</i>	365
11.4. Tỉ số lượng giác và giải tam giác vuông – <i>11.4. Trigonometric ratios and solving right triangles</i>	369
11.5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông – <i>11.5. Metric relations in a right triangle</i> ..	375
11.6. Chứng minh đẳng thức tích bằng tam giác đồng dạng – <i>11.6. Proving product identities with similar triangles</i>	377
11.7. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>11.7. Multiple-choice and short-answer practice</i>	381
11.8. Bảng chiến lược và bảng thuật ngữ – <i>11.8. Strategy table and glossary</i>	384
11.9. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	387
11.10. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	389
Chương 12. Đường tròn – Chapter 12. Circles	395
12.1. Đường tròn, dây và khoảng cách từ tâm tới dây – <i>Circles, chords and the distance from the centre to a chord</i>	396
12.2. Cung, góc ở tâm, độ dài cung, diện tích hình quạt và hình vành khuyên – <i>Arcs, central angles, arc length, sector and annulus</i>	399
12.3. Đường thẳng và đường tròn, tiếp tuyến – <i>A line and a circle, tangents</i>	403
12.4. Vị trí tương đối của hai đường tròn – <i>Relative position of two circles</i>	406
12.5. Góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây – <i>Inscribed angles and the tangent- chord angle</i>	409
12.6. Đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác; đa giác đều và phép quay – <i>Circumcircle, incircle, regular polygons and rotations</i>	414
12.7. Tứ giác nội tiếp – <i>Cyclic quadrilaterals</i>	418
12.8. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	423
12.9. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	427
12.10. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	428
Chương 13. Bài hình học tổng hợp trong đề thi vào 10 – Chapter 13. The combined geometry question	434
13.1. Đọc đề, vẽ hình, phân tích đi ngược – <i>Reading, drawing, and working backwards</i>	435
13.2. Công cụ góc: góc nội tiếp và tứ giác nội tiếp – <i>Angle tools: inscribed angles and cyclic quadrilaterals</i>	436
13.3. Công cụ đồng dạng và phương tích – <i>Tools: similarity and the power of a point</i> ..	440
13.4. Tiếp tuyến, thẳng hàng, song song, trung điểm – <i>Tangents, collinearity, parallels and midpoints</i>	442

13.5. Điểm cố định và cực trị hình – <i>Fixed points and geometric extrema</i>	445
13.6. Tám bài tổng hợp làm mẫu – <i>Eight complete model solutions</i>	446
13.7. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	460
13.8. Bảng chiến lược, lỗi hay mất điểm và thuật ngữ – <i>Strategy table, common mistakes and glossary</i>	463
13.9. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	466
13.10. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	468
Chương 14. Hình khối trong thực tiễn – Chapter 14. Solids in real life	475
14.1. Hình hộp chữ nhật và hình lập phương – <i>Cuboids and cubes</i>	476
14.2. Hình lăng trụ đứng tam giác và tứ giác – <i>Right prisms with triangular and quadrilateral bases</i>	479
14.3. Hình chóp tam giác đều và hình chóp tứ giác đều – <i>Regular triangular and square pyramids</i>	482
14.4. Hình trụ và hình nón – <i>Cylinders and cones</i>	486
14.5. Hình cầu – <i>Spheres and balls</i>	490
14.6. Bài toán thực tế: đổi đơn vị, hình ghép và cực trị – <i>Real-life problems: units, composite solids and extrema</i>	492
14.7. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	497
14.8. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	501
14.9. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	502
Chương 15. Bất đẳng thức, cực trị và phương trình không mẫu mực – Chapter 15. Inequalities, extrema and non-standard equations	508
15.1. Chứng minh bất đẳng thức bằng biến đổi tương đương – <i>Proving inequalities by equivalent transformations</i>	509
15.2. Bất đẳng thức AM–GM và tìm cực trị – <i>The AM–GM inequality and finding extrema</i>	511
15.3. Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng phân thức – <i>The Cauchy–Schwarz inequality in fraction form</i>	515
15.4. Cực trị một biến và hai biến có điều kiện – <i>Extrema in one variable and in two variables with a condition</i>	517
15.5. Phương trình vô tỉ – <i>Irrational equations</i>	520
15.6. Phương trình bậc cao và hệ phương trình không mẫu mực – <i>Higher-degree equations and non-standard systems</i>	525
15.7. Đa thức và định lý Bézout sơ cấp – <i>Polynomials and the elementary Bézout theorem</i>	529
15.8. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	531
15.9. Bảng chiến lược và thuật ngữ – <i>Strategy table and glossary</i>	533
15.10. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	536
15.11. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	537
Chương 16. Số học và suy luận cho đề chuyên – Chapter 16. Number theory and reasoning for specialist-school exams	541
16.1. Đồng dư và số dư của lũy thừa – <i>16.1. Congruences and remainders of powers</i> ..	542

16.2. Số chính phương và số nguyên tố nâng cao – 16.2. <i>Perfect squares and more on primes</i>	545
16.3. Phương trình nghiệm nguyên – 16.3. <i>Integer-solution equations</i>	548
16.4. Phần nguyên – 16.4. <i>The integer part</i>	553
16.5. Nguyên lí Dirichlet – 16.5. <i>The pigeonhole (Dirichlet) principle</i>	555
16.6. Bất biến và tô màu – 16.6. <i>Invariants and colouring</i>	558
16.7. Đếm cơ bản: quy tắc cộng và quy tắc nhân – 16.7. <i>Basic counting: addition and multiplication rules</i>	561
16.8. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – 16.8. <i>Multiple-choice and short-answer practice</i>	563
16.9. Cách trình bày lời giải chặt cho đề chuyên – 16.9. <i>Writing a tight solution for specialist exams</i>	566
16.10. Bài tự luyện – <i>Practice problems</i>	569
16.11. Lời giải bài tự luyện – <i>Solutions to practice problems</i>	571

Phụ lục A. Đề thi thử có đáp án và thang điểm – Appendix A. Practice exams with answers and marking schemes..... 576

A.1. Đề thi thử số 1 (tự luận, 120 phút) – <i>Practice exam 1 (written paper, 120 minutes)</i>	576
A.2. Đề thi thử số 2 (tự luận, 120 phút) – <i>Practice exam 2 (written paper, 120 minutes)</i>	582
A.3. Đề thi thử số 3 (trắc nghiệm, 90 phút) – <i>Practice exam 3 (multiple-choice format, 90 minutes)</i>	588
A.4. Đề thi thử số 4 (dạng kết hợp, 120 phút) – <i>Practice exam 4 (mixed format, 120 minutes)</i>	597
A.5. Đề thi thử số 5 (chuyên Toán, 150 phút) – <i>A.5. Practice exam 5 (specialist-school mathematics, 150 minutes)</i>	605
A.6. Đề thi thử số 6 (chuyên Toán, 150 phút) – <i>A.6. Practice exam 6 (specialist-school mathematics, 150 minutes)</i>	615
A.7. Cách phân bổ 120 phút và cách trình bày để không mất điểm – <i>A.7. Planning 120 minutes and writing solutions that keep every mark</i>	624

Phụ lục B. Tra cứu định lý và kết quả có tên – Appendix B. Index of named theorems and results 630

B.1. Bảng tra theo chương – <i>B.1. Index by chapter</i>	630
--	-----

Phụ lục C. Thuật ngữ Việt – Anh – Appendix C. Vietnamese – English glossary 642

C.1. Bảng tra từ A đến Z – <i>C.1. A to Z index</i>	642
---	-----

Phụ lục D. Tài liệu đọc thêm – Appendix D. Further reading 654

D.1. Sách tiếng Anh và sách giáo khoa – <i>D.1. Books in English and textbooks</i>	654
--	-----

Chương 1. Số tự nhiên, số nguyên, chia hết – Chapter 1. Natural numbers, integers and divisibility

Sau chương này em làm được – *What you will be able to do*

- Tính nhanh, tính đúng thứ tự phép tính và tìm x trong các đẳng thức có lũy thừa.
Calculate quickly, apply the order of operations and solve equations with powers.
- Dùng dấu hiệu chia hết cho 2, 3, 5, 9 để tìm chữ số chưa biết và chứng minh một số chia hết.
Use the divisibility tests for 2, 3, 5 and 9 to find missing digits and to prove divisibility.
- Phân tích một số ra thừa số nguyên tố, tìm ƯCLN, BCNN và giải bài toán chia nhóm, lịch trùng nhau.
Factorise a number into primes, find the HCF and LCM, and solve grouping and repeating-schedule problems.
- Tính với số nguyên và tìm x nguyên bằng cách dùng ước, bội.
Compute with integers and find integer solutions using factors and multiples.
- Chứng minh chia hết, nhận ra số chính phương và tìm x nguyên để biểu thức nguyên (câu phân loại, đề chuyên).
Prove divisibility, recognise square numbers and find integer x that make an expression an integer (top-mark and specialist-school questions).

Đề thi hay hỏi gì – *What the exams ask*

Đề vào 10 hiếm khi có một câu riêng cho số tự nhiên. Kiến thức của chương nằm bên trong các câu khác: tìm x nguyên để P nguyên, bài thực tế chia nhóm, xác suất có số nguyên tố. Đề chuyên Toán hỏi thẳng: chia hết, số chính phương, nghiệm nguyên. Câu phân loại là câu khó ở cuối một bài, dùng để tách học sinh khá giỏi.

Entrance exams rarely have a separate question on natural numbers. The chapter's ideas sit inside other questions: integer x making P an integer, grouping problems, probability with primes. Specialist-school papers ask directly about divisibility, squares and integer solutions. A top-mark question is the hard last part of a problem, used to separate the strongest students.

Dạng Type	Hay ở đâu Where	Mức Level	Mục Section
Chia nhóm, lịch trùng nhau (ƯCLN, BCNN) <i>Grouping and schedules (HCF, LCM)</i>	Câu toán thực tế <i>Real-life question</i>	Dễ <i>Easy</i>	1.4
Số nguyên tố trong xác suất, liệt kê kết quả <i>Primes in probability</i>	Câu thống kê, xác suất <i>Probability question</i>	Dễ <i>Easy</i>	1.3

Dạng <i>Type</i>	Hay ở đâu <i>Where</i>	Mức <i>Level</i>	Mục <i>Section</i>
Tìm x nguyên để biểu thức nguyên <i>Integer x for an integer value</i>	Ý cuối bài rút gọn <i>Last part of the simplify question</i>	Phân loại <i>Harder</i>	1.6
Chứng minh chia hết, số chính phương <i>Prove divisibility; squares</i>	Bài số học đề chuyên <i>Specialist number theory</i>	Chuyên <i>Specialist</i>	1.6
Tìm số nguyên tố, nghiệm nguyên <i>Find primes, integer solutions</i>	Bài số học đề chuyên <i>Specialist number theory</i>	Chuyên <i>Specialist</i>	1.3, 1.5

1.1. Tập hợp, cách ghi số và bốn phép tính – Sets, writing numbers and the four operations

Tập hợp là một nhóm đối tượng xác định. Mỗi đối tượng là một phần tử của tập hợp. Ví dụ $A = \{0; 1; 2; 3\}$ là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 4. Ta viết $3 \in A$ (3 thuộc A) và $5 \notin A$ (5 không thuộc A).

A set is a well-defined group of objects. Each object is an element of the set. For example $A = \{0; 1; 2; 3\}$ is the set of natural numbers less than 4. We write $3 \in A$ (3 belongs to A) and $5 \notin A$ (5 does not belong to A).

Có hai cách viết một tập hợp. Cách liệt kê: ghi từng phần tử trong ngoặc nhọn, cách nhau bằng dấu chấm phẩy. Cách chỉ tính chất: $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 4\}$, đọc là các số tự nhiên x thỏa $x < 4$. Tập hợp không có phần tử nào là tập rỗng, kí hiệu $\emptyset$.

A set can be written in two ways. Listing: write each element inside curly brackets, separated by semicolons. Describing: $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 4\}$, read as the natural numbers x with $x < 4$. A set with no element is the empty set, written $\emptyset$.

Tập hợp các số tự nhiên là $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$. Bỏ số 0 ta được $\mathbb{N}^+ = \{1; 2; 3; \dots\}$. Mọi phần tử của $\mathbb{N}^+$ đều thuộc $\mathbb{N}$ nên ta viết $\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}^+$ là tập con của $\mathbb{N}$). Tập hợp các số nguyên là $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$, và $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

The set of natural numbers is $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$. Removing 0 gives $\mathbb{N}^+ = \{1; 2; 3; \dots\}$. Every element of $\mathbb{N}^+$ is in $\mathbb{N}$, so we write $\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}^+$ is a subset of $\mathbb{N}$). The set of integers is $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$, and $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Cách ghi số. Ta dùng hệ thập phân: mười chữ số 0 đến 9, giá trị của chữ số phụ thuộc vị trí. Số có ba chữ số a, b, c ($a \neq 0$) bằng $100a + 10b + c$. Ví dụ $4 - 0 - 7$ ghép thành $407 = 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7$. Số La Mã dùng kí tự $I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100; XIV = 14, XXIX = 29$.

Writing numbers. We use the decimal system: ten digits 0 to 9, and the value of a digit depends on its position. The three-digit number with digits a, b, c ($a \neq 0$) equals $100a + 10b + c$. For example digits 4, 0, 7 form $407 = 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7$. Roman numerals use $I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100; XIV = 14, XXIX = 29$.

Thứ tự. Trong $\mathbb{N}$, số đứng trước nhỏ hơn số đứng sau trên tia số. Mỗi số a có số liền sau $a + 1$; số liền trước $a - 1$ (khi $a \geq 1$). Hai số liên tiếp hơn kém nhau 1.

Order. In $\mathbb{N}$, a number to the left on the number line is smaller. Each number a has a successor $a + 1$ and, when $a \geq 1$, a predecessor $a - 1$. Consecutive numbers differ by 1.

Bốn phép tính có các tính chất: giao hoán $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$; kết hợp $(a + b) + c = a + (b + c)$; phân phối $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Phép trừ $a - b$ chỉ làm được trong $\mathbb{N}$ khi $a \geq b$. Phép chia có dư: $a = b \cdot q + r$ với $0 \leq r < b$; $r = 0$ là chia hết.

The four operations satisfy: commutative $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$; associative $(a + b) + c = a + (b + c)$; distributive $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Subtraction $a - b$ works in $\mathbb{N}$ only when $a \geq b$. Division with remainder: $a = b \cdot q + r$ with $0 \leq r < b$; $r = 0$ means exact division.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Số số hạng của dãy cách đều = (số cuối – số đầu) : khoảng cách + 1. Tổng = (số đầu + số cuối) · (số số hạng) : 2.

Number of terms in an evenly spaced list = (last – first) ÷ step + 1. Sum = (first + last) · (number of terms) ÷ 2.

Lũy thừa. a^n là tích của n thừa số a ; a gọi là cơ số, n là số mũ. Ví dụ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $5^1 = 5$; $7^0 = 1$.

Powers. a^n is the product of n factors a ; a is the base and n the exponent. For example $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $5^1 = 5$; $7^0 = 1$.

TÍNH CHẤT 1.1 (Quy tắc lũy thừa) / PROPERTY 1.1 (Rules for powers) – Với $a \neq 0$ và $m \geq n$: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $a^0 = 1$.

For $a \neq 0$ and $m \geq n$: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m \div a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $a^0 = 1$.

Ví dụ số nhỏ: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$; $3^5 : 3^2 = 3^3 = 27$; $(2^2)^3 = 2^6 = 64$.

Small examples: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$; $3^5 \div 3^2 = 3^3 = 27$; $(2^2)^3 = 2^6 = 64$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Thứ tự thực hiện: ngoặc () rồi [] rồi { }; trong cùng một cấp: lũy thừa, sau đó nhân và chia từ trái sang phải, cuối cùng cộng và trừ từ trái sang phải.

Order of operations: brackets () then [] then { }; within a level: powers, then multiplication and division left to right, then addition and subtraction left to right.

Các bước làm bài tính nhanh và tìm x – Steps for quick calculation and for finding x

1. Nhìn các số: có cặp nào cộng hoặc nhân ra số tròn (25 và 4, 47 và 53) không.

Look at the numbers: do any pair add or multiply to a round number (25 and 4, 47 and 53)?

2. Đổi chỗ, nhóm lại bằng tính chất giao hoán, kết hợp; hoặc đặt thừa số chung ra ngoài bằng tính chất phân phối.

Reorder and regroup with the commutative and associative laws, or take out a common factor with the distributive law.

3. Với bài tìm x: đưa về dạng lũy thừa cùng cơ số, hoặc cô lập x về một vế bằng phép tính ngược.

For an equation in x: reduce to powers of the same base, or isolate x on one side with inverse operations.

4. Thế kết quả vào đề gốc để kiểm lại, và xem x có thuộc $\mathbb{N}$ không.

Substitute back into the original statement and check that x belongs to $\mathbb{N}$.

VÍ DỤ 1.1 / EXAMPLE 1.1 – Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn lớn hơn 5 và nhỏ hơn 17. Viết A bằng hai cách và cho biết A có bao nhiêu phần tử.

Let A be the set of even natural numbers greater than 5 and less than 17. Write A in two ways and state how many elements A has.

Lời giải. / Solution.

1. Cách chỉ tính chất: $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ chẵn}, 5 < x < 17\}$.

Describing: $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ even}, 5 < x < 17\}$.

2. Cách liệt kê: số chẵn đầu tiên lớn hơn 5 là 6, số chẵn lớn nhất nhỏ hơn 17 là 16. Vậy $A = \{6; 8; 10; 12; 14; 16\}$.

Listing: the first even number above 5 is 6 and the largest even number less than 17 is 16. So $A = \{6; 8; 10; 12; 14; 16\}$.

3. Số phần tử $= (16 - 6) : 2 + 1 = 6$.

Number of elements $= (16 - 6) \div 2 + 1 = 6$.

Vậy A có 6 phần tử.

So A has 6 elements. ■

VÍ DỤ 1.2 / EXAMPLE 1.2 – Tính nhanh: a) $4 \cdot 37 \cdot 25$; b) $47 \cdot 18 + 53 \cdot 18$; c) $2 + 4 + 6 + \dots + 100$.

Calculate quickly: a) $4 \cdot 37 \cdot 25$; b) $47 \cdot 18 + 53 \cdot 18$; c) $2 + 4 + 6 + \dots + 100$.

Lời giải. / Solution.

1. a) Nhóm 4 với 25: $4 \cdot 37 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 37 = 100 \cdot 37 = 3.700$.

a) Group 4 with 25: $4 \cdot 37 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 37 = 100 \cdot 37 = 3,700$.

2. b) Đặt 18 làm thừa số chung: $47 \cdot 18 + 53 \cdot 18 = (47 + 53) \cdot 18 = 100 \cdot 18 = 1.800$.

b) Take out the common factor 18: $47 \cdot 18 + 53 \cdot 18 = (47 + 53) \cdot 18 = 100 \cdot 18 = 1,800$.

3. c) Số số hạng: $(100 - 2) : 2 + 1 = 50$. Tổng $= (2 + 100) \cdot 50 : 2 = 2.550$.

c) Number of terms: $(100 - 2) \div 2 + 1 = 50$. Sum $= (2 + 100) \cdot 50 \div 2 = 2,550$.

Kết quả: 3.700; 1.800; 2.550.

Results: 3,700; 1,800; 2,550. ■

VÍ DỤ 1.3 / EXAMPLE 1.3 – Tính $120 - [3^2 \cdot (18 - 4 \cdot 3) + 2^4 : 8]$.

Calculate $120 - [3^2 \cdot (18 - 4 \cdot 3) + 2^4 \div 8]$.

Lời giải. / Solution.

1. Trong ngoặc tròn: $4 \cdot 3 = 12$, rồi $18 - 12 = 6$.

Inside the round brackets: $4 \cdot 3 = 12$, then $18 - 12 = 6$.

2. Trong ngoặc vuông: $3^2 \cdot 6 = 9 \cdot 6 = 54$ và $2^4 : 8 = 16 : 8 = 2$, nên ngoặc vuông bằng $54 + 2 = 56$.

Inside the square brackets: $3^2 \cdot 6 = 9 \cdot 6 = 54$ and $2^4 \div 8 = 16 \div 8 = 2$, so the brackets equal $54 + 2 = 56$.

3. Phép cuối: $120 - 56 = 64$.

Last step: $120 - 56 = 64$.

Vậy giá trị biểu thức là 64.

So the value of the expression is 64. ■

VÍ DỤ 1.4 / EXAMPLE 1.4 – Tìm số tự nhiên x biết: a) $2^x \cdot 4 = 128$; b) $(x - 3)^2 = 25$.
Find the natural number x such that: a) $2^x \cdot 4 = 128$; b) $(x - 3)^2 = 25$.

Lời giải. / Solution.

1. a) Chia hai vế cho 4: $2^x = 32 = 2^5$. Hai lũy thừa cùng cơ số 2 bằng nhau nên $x = 5$.

a) Divide both sides by 4: $2^x = 32 = 2^5$. Powers of the same base 2 are equal, so $x = 5$.

2. b) $25 = 5^2$ nên $x - 3 = 5$ hoặc $x - 3 = -5$, tức $x = 8$ hoặc $x = -2$.

b) $25 = 5^2$, so $x - 3 = 5$ or $x - 3 = -5$, that is $x = 8$ or $x = -2$.

3. Đối chiếu $x \in \mathbb{N}$: loại $x = -2$.

Check $x \in \mathbb{N}$: reject $x = -2$.

Vậy a) $x = 5$; b) $x = 8$.

So a) $x = 5$; b) $x = 8$. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Làm phép tính từ trái sang phải mà bỏ qua lũy thừa và nhân chia: $2 + 3 \cdot 4 = 14$ chứ không phải 20.

Working strictly left to right and ignoring powers and multiplication: $2 + 3 \cdot 4 = 14$, not 20.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Giải $(x - 3)^2 = 25$ mà chỉ lấy $x - 3 = 5$, bỏ mất trường hợp $x - 3 = -5$ (hoặc không đối chiếu $x \in \mathbb{N}$).

Solving $(x - 3)^2 = 25$ with only $x - 3 = 5$ and missing $x - 3 = -5$ (or not checking $x \in \mathbb{N}$).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đếm sai số số hạng của dãy: quên cộng 1 ở công thức (cuối – đầu) : khoảng cách + 1.

Miscounting the terms of a list: forgetting the + 1 in (last – first) $\div$ step + 1.

1.2. Quan hệ chia hết và dấu hiệu chia hết – Divisibility and divisibility tests

Dạng bài này hỏi: số này có chia hết cho số kia không, hoặc tìm chữ số còn thiếu để số chia hết. Dấu hiệu chia hết cho phép trả lời chỉ bằng cách nhìn các chữ số, không cần đặt phép chia.

These questions ask whether one number divides another, or which missing digit makes a number divisible. The divisibility tests answer this by looking at the digits, with no long division.

ĐỊNH NGHĨA 1.2 (Chia hết, ước, bội) / DEFINITION 1.2 (Divisibility, factor, multiple)

– Cho $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. Nếu có $q \in \mathbb{N}$ sao cho $a = b \cdot q$ thì a chia hết cho b , kí hiệu $a : b$. Khi đó b là ước của a , a là bội của b .

For $a, b \in \mathbb{N}$ with $b \neq 0$: if there is $q \in \mathbb{N}$ with $a = b \cdot q$ then a is divisible by b , written $a : b$. Then b is a factor (divisor) of a and a is a multiple of b .

Ví dụ $12 = 3 \cdot 4$ nên $12 : 3$, 3 là ước của 12, 12 là bội của 3. Các ước của 12 là 1, 2, 3, 4, 6, 12. Các bội của 3 là 0, 3, 6, 9, ... (vô số).

For example $12 = 3 \cdot 4$, so $12 : 3$, 3 is a factor of 12 and 12 is a multiple of 3. The factors of 12 are 1, 2, 3, 4, 6, 12. The multiples of 3 are 0, 3, 6, 9, ... (infinitely many).

TÍNH CHẤT 1.3 (Tính chất chia hết của tổng) / PROPERTY 1.3 (Divisibility of sums) –

Nếu $a : m$ và $b : m$ thì $(a + b) : m$ và $(a - b) : m$ (khi $a \geq b$). Nếu $a : m$ thì $k \cdot a : m$ với mọi k .

Nếu $a : m$ còn b không chia hết cho m thì $(a + b)$ không chia hết cho m .

If $a : m$ and $b : m$ then $(a + b) : m$ and $(a - b) : m$ (when $a \geq b$). If $a : m$ then $k \cdot a : m$ for every k . If $a : m$ but b is not divisible by m then $(a + b)$ is not divisible by m .

Ví dụ $18 : 6$ và $30 : 6$ nên $18 + 30 = 48 : 6$. Lại có $18 : 6$ nhưng 5 không chia hết cho 6, nên $18 + 5 = 23$ không chia hết cho 6.

For example $18 : 6$ and $30 : 6$, so $18 + 30 = 48 : 6$. Also $18 : 6$ but 5 is not divisible by 6, so $18 + 5 = 23$ is not divisible by 6.

TÍNH CHẤT 1.4 (Dấu hiệu chia hết cho 2, 3, 5, 9) / PROPERTY 1.4 (Tests for 2, 3, 5, 9) –

Dấu hiệu chia hết. Chia hết cho 2: chữ số tận cùng chẵn (0, 2, 4, 6, 8). Chia hết cho 5: chữ số tận cùng là 0 hoặc 5. Chia hết cho 9: tổng các chữ số chia hết cho 9. Chia hết cho 3: tổng các chữ số chia hết cho 3.

Divisibility tests. By 2: the last digit is even (0, 2, 4, 6, 8). By 5: the last digit is 0 or 5. By 9: the digit sum is divisible by 9. By 3: the digit sum is divisible by 3.

Ví dụ số nhỏ: $4.560 : 2$ và $: 5$ (tận cùng 0). 738 có tổng chữ số $7 + 3 + 8 = 18$ nên $738 : 9$ và $: 3$. 123 có tổng 6 nên $: 3$ nhưng không $: 9$.

Small examples: 4,560 is divisible by 2 and 5 (ends in 0). 738 has digit sum $7 + 3 + 8 = 18$, so it is divisible by 9 and 3. 123 has digit sum 6, so it is divisible by 3 but not by 9.

Các bước tìm chữ số chưa biết – Steps for finding a missing digit

1. Ghi rõ chữ số cần tìm là số từ 0 đến 9 (chữ số đầu tiên khác 0).

State that each missing digit is from 0 to 9 (the first digit is not 0).

2. Nếu đề có chia hết cho 2 hoặc 5: dùng chữ số tận cùng, liệt kê các khả năng của chữ số cuối.

If the question involves 2 or 5: use the last digit and list the possible last digits.

3. Nếu đề có chia hết cho 3 hoặc 9: tính tổng các chữ số theo các chữ số chưa biết, rồi tìm bội của 3 hoặc 9 phù hợp.

If it involves 3 or 9: write the digit sum in terms of the unknown digits and look for the suitable multiple of 3 or 9.

4. Với mỗi khả năng của chữ số cuối, tìm chữ số còn lại; loại giá trị lớn hơn 9.

For each possible last digit, find the other digit; reject values above 9.

5. Viết các số tìm được và kiểm lại bằng phép chia.

Write the numbers found and check by division.

VÍ DỤ 1.5 / EXAMPLE 1.5 – Tìm các chữ số x, y để số $3x7y$ chia hết cho cả 5 và 9.
Find the digits x, y such that the number $3x7y$ is divisible by both 5 and 9.

Lời giải. / Solution.

- x, y là chữ số từ 0 đến 9. Số chia hết cho 5 nên $y = 0$ hoặc $y = 5$.
 x, y are digits from 0 to 9. Divisible by 5, so $y = 0$ or $y = 5$.
- Số chia hết cho 9 nên tổng $3 + x + 7 + y = 10 + x + y$ chia hết cho 9.
Divisible by 9, so the digit sum $3 + x + 7 + y = 10 + x + y$ is divisible by 9.
- Với $y = 0$: $10 + x : 9$, $x \leq 9$ nên $10 + x = 18$, $x = 8$. Với $y = 5$: $15 + x : 9$ nên $15 + x = 18$, $x = 3$ (27 cho $x = 12$, loại).
For $y = 0$: $10 + x : 9$ with $x \leq 9$ gives $10 + x = 18$, $x = 8$. For $y = 5$: $15 + x : 9$ gives $15 + x = 18$, $x = 3$ (27 would give $x = 12$, rejected).
- Kiểm lại: $3.870 : 9 = 430$ và $3.375 : 9 = 375$.
Check: $3,870 \div 9 = 430$ and $3,375 \div 9 = 375$.

Vậy hai số là 3.870 và 3.375.

So the numbers are 3,870 and 3,375. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Xét $10 + x + y$ chia hết cho 9 mà quên giới hạn $x, y \leq 9$, nên giữ lại giá trị $x = 12$.

Taking $10 + x + y : 9$ and forgetting $x, y \leq 9$, so keeping $x = 12$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm dấu hiệu chia hết cho 3 và cho 9: tổng chữ số bằng 6 chỉ cho chia hết cho 3.

Mixing up the tests for 3 and 9: a digit sum of 6 gives divisibility by 3 only.

1.3. Số nguyên tố và phân tích ra thừa số nguyên tố – Prime numbers and prime factorisation

ĐỊNH NGHĨA 1.5 (Số nguyên tố, hợp số) / DEFINITION 1.5 (Prime and composite numbers) – Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước là 1 và chính nó. Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 có nhiều hơn hai ước.

A prime number is a natural number greater than 1 whose only factors are 1 and itself. A composite number is a natural number greater than 1 with more than two factors.

Các số 0 và 1 không phải số nguyên tố, cũng không phải hợp số. Số 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất. Các số nguyên tố nhỏ hơn 50 là: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

0 and 1 are neither prime nor composite. 2 is the only even prime. The primes less than 50 are: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Các bước kiểm tra một số có nguyên tố không – Steps to test whether a number is prime

- Tìm số nguyên tố p lớn nhất sao cho $p^2 \leq n$ (nếu n là hợp số thì n có ước nguyên tố không vượt quá $\sqrt{n}$).
Find the largest prime p with $p^2 \leq n$ (if n is composite it has a prime factor at most $\sqrt{n}$).

2. Thử chia n lần lượt cho 2, 3, 5, 7, ... tới p , dùng dấu hiệu chia hết cho nhanh.
Try dividing n by 2, 3, 5, 7, ... up to p , using divisibility tests for speed.
3. Gặp một ước thì dừng và kết luận hợp số; chia hết cho không số nào thì kết luận nguyên tố.
Stop at the first factor and conclude composite; if none divides, conclude prime.

VÍ DỤ 1.6 / EXAMPLE 1.6 – Số 221 và số 197 có phải số nguyên tố không?
Are 221 and 197 prime?

Lời giải. / Solution.

1. $221: 14^2 = 196 < 221 < 225 = 15^2$, nên chỉ cần thử các số nguyên tố ≤ 13 : 2, 3, 5, 7, 11, 13.
 $221: 14^2 = 196 < 221 < 225 = 15^2$, so we only test primes up to 13: 2, 3, 5, 7, 11, 13.
2. 221 lẻ, tổng chữ số 5 (không : 3), tận cùng 1 (không : 5); $221 : 7$ dư 4; $221 : 11$ dư 1; $221 : 13 = 17$. Vậy $221 = 13 \cdot 17$ là hợp số.
221 is odd, digit sum 5 (not divisible by 3), ends in 1 (not by 5); $221 \div 7$ leaves 4; $221 \div 11$ leaves 1; $221 \div 13 = 17$. So $221 = 13 \cdot 17$ is composite.
3. $197: 14^2 = 196 < 197 < 225 = 15^2$, nên thử 2, 3, 5, 7, 11, 13. Số dư lần lượt là 1, 2 (tổng chữ số 17), 2, 1, 10, 2.
 $197: 14^2 = 196 < 197 < 225$, so we test 2, 3, 5, 7, 11, 13. The remainders are 1, 2 (digit sum 17), 2, 1, 10, 2.

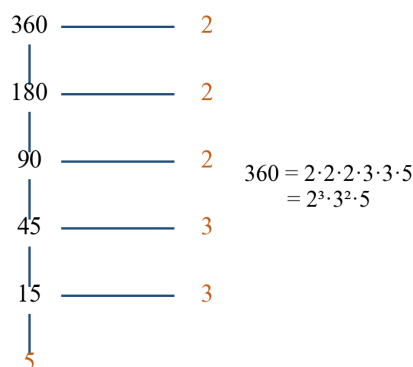
Không số nào chia hết, vậy 197 là số nguyên tố; 221 là hợp số.

None divides, so 197 is prime; 221 is composite. ■

ĐỊNH LÝ 1.6 (Phân tích ra thừa số nguyên tố) / THEOREM 1.6 (Prime factorisation) – Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố, và cách phân tích là duy nhất nếu không kể thứ tự các thừa số.
Every natural number greater than 1 can be written as a product of primes, and this is unique apart from the order of the factors.

Thừa nhận (SGK lớp 6 có trình bày cách phân tích). Cách làm: chia dần cho số nguyên tố nhỏ nhất có thể, ghi bên phải, đến khi thương bằng 1. Hình 1.1 phân tích 360: chia liên tiếp cho 2, 2, 2, 3, 3 rồi còn 5.

Accepted without proof (the grade 6 textbook shows the method). Method: divide by the smallest possible prime, write it on the right, until the quotient is 1. Figure 1.1 factorises 360: divide successively by 2, 2, 2, 3, 3, leaving 5.



Hình 1.1. Phân tích 360 ra thừa số nguyên tố

Figure 1.1. Prime factorisation of 360

Viết gọn: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Số ước của 360 tính bằng cách lấy mỗi số mũ cộng 1 rồi nhân lại: $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$. Lí do: một ước của 360 có dạng $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ với a có 4 cách chọn (0 đến 3), b có 3 cách, c có 2 cách.

In short: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. The number of factors of 360 is found by adding 1 to each exponent and multiplying: $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$. Reason: a factor of 360 has the form $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ where a has 4 choices (0 to 3), b has 3 and c has 2.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $n = p^a \cdot q^b \cdot r^c$ (p, q, r nguyên tố khác nhau) có $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ ước.

$n = p^a \cdot q^b \cdot r^c$ (distinct primes p, q, r) has $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ factors.

VÍ DỤ 1.7 / EXAMPLE 1.7 – Phân tích 1.260 ra thừa số nguyên tố. 1.260 có bao nhiêu ước? Trong đó có bao nhiêu ước là số lẻ?

Factorise 1,260 into primes. How many factors does 1,260 have? How many of them are odd?

Lời giải. / Solution.

1. Chia dần: $1.260 : 2 = 630$; $630 : 2 = 315$; $315 : 3 = 105$; $105 : 3 = 35$; $35 : 5 = 7$; $7 : 7 = 1$.

Divide: $1,260 \div 2 = 630$; $630 \div 2 = 315$; $315 \div 3 = 105$; $105 \div 3 = 35$; $35 \div 5 = 7$; $7 \div 7 = 1$.

2. Vậy $1.260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

So $1,260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

3. Số ước: $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 36$.

Number of factors: $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 36$.

4. Ước lẻ không chứa thừa số 2, tức có dạng $3^b \cdot 5^c \cdot 7^e$: $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$ ước.

An odd factor has no factor 2, so it has the form $3^b \cdot 5^c \cdot 7^e$: $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$ factors.

Vậy 1.260 có 36 ước, trong đó 12 ước lẻ.

So 1,260 has 36 factors, 12 of them odd. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Coi 1 là số nguyên tố, hoặc quên 2 là số nguyên tố duy nhất chẵn.

Treating 1 as prime, or forgetting that 2 is the only even prime.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chia thử vượt quá $\sqrt{n}$ làm mất thời gian, hoặc dừng sớm quá và kết luận nguyên tố thiếu căn cứ.

Testing far beyond $\sqrt{n}$ and wasting time, or stopping too early and calling a number prime without evidence.

NHẬN XÉT / REMARK – Để đếm ước chỉ cần các số mũ. Đừng liệt kê ước của số lớn, dễ sót.

To count factors only the exponents matter. Do not list the factors of a large number; omissions are easy.

1.4. Ước chung, bội chung, ƯCLN và BCNN – *Common factors, common multiples, HCF and LCM*

Hai dạng thực tế hay gặp: chia đều thành nhiều nhóm nhất (dùng ƯCLN) và hai việc lặp lại, hỏi bao lâu thì trùng nhau (dùng BCNN). Chọn đúng ƯCLN hay BCNN là bước đầu tiên của lời giải.

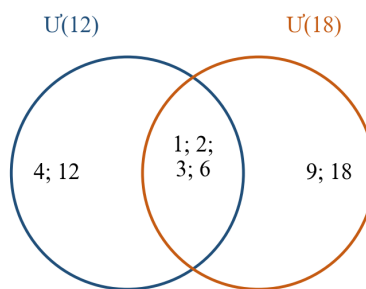
Two real-life types appear often: splitting evenly into as many groups as possible (HCF) and two repeating events, asking when they coincide (LCM). Choosing the right one, HCF or LCM, is the first step of the solution.

ĐỊNH NGHĨA 1.7 (ƯC, ƯCLN, BC, BCNN) / DEFINITION 1.7 (Common factor, HCF, common multiple, LCM) – Ước chung (ƯC) của a và b là số chia hết cả a và b . Ước chung lớn nhất (ƯCLN) là số lớn nhất trong các ước chung. Bội chung (BC) của a và b là số chia hết cho cả a và b . Bội chung nhỏ nhất (BCNN) là số nhỏ nhất khác 0 trong các bội chung.

A common factor of a and b divides both. The highest common factor (HCF) is the largest common factor. A common multiple of a and b is divisible by both. The lowest common multiple (LCM) is the smallest nonzero common multiple.

Ví dụ 12 và 18. Kí hiệu $U(a)$ là tập hợp các ước của a . $U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ và $U(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$. Ước chung là 1, 2, 3, 6 nên $ƯCLN(12; 18) = 6$. Bội của 12: 0, 12, 24, 36, ... Bội của 18: 0, 18, 36, ... Bội chung nhỏ nhất khác 0 là 36 nên $BCNN(12; 18) = 36$. Hình 1.2 cho thấy các ước chung nằm ở phần giao.

Example with 12 and 18. The symbol $U(a)$ means the set of factors of a . Factors of 12: $\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; factors of 18: $\{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$. The common factors are 1, 2, 3, 6, so $HCF(12; 18) = 6$. Multiples of 12: 0, 12, 24, 36, ... Multiples of 18: 0, 18, 36, ... The smallest nonzero common multiple is 36, so $LCM(12; 18) = 36$. Figure 1.2 shows the common factors in the overlap.



Hình 1.2. Ước của 12 và của 18, phần giao là ước chung
Figure 1.2. Factors of 12 and of 18; the overlap holds the common factors

Các bước tìm ƯCLN và BCNN bằng thừa số nguyên tố – Steps for the HCF and LCM by prime factors

1. Phân tích từng số ra thừa số nguyên tố (viết dạng lũy thừa).
Factorise each number into primes (as powers).
2. ƯCLN: chỉ lấy các thừa số nguyên tố chung, mỗi thừa số lấy với số mũ NHỎ nhất. Nhân lại.
HCF: take only the common primes, each with its SMALLEST exponent. Multiply.
3. BCNN: lấy tất cả thừa số nguyên tố (chung và riêng), mỗi thừa số lấy với số mũ LỚN nhất. Nhân lại.
LCM: take all primes (common and not), each with its LARGEST exponent. Multiply.
4. Kiểm lại bằng $\text{ƯCLN} \cdot \text{BCNN} = a \cdot b$ (với hai số).
Check with $\text{HCF} \cdot \text{LCM} = a \cdot b$ (for two numbers).

TÍNH CHẤT 1.8 (Tích ƯCLN và BCNN) / PROPERTY 1.8 (Product of HCF and LCM)

– Với hai số tự nhiên a, b khác 0: $\text{ƯCLN}(a; b) \cdot \text{BCNN}(a; b) = a \cdot b$. Mọi ước chung của a và b đều là ước của $\text{ƯCLN}(a; b)$; mọi bội chung đều là bội của $\text{BCNN}(a; b)$. Hai số có ƯCLN bằng 1 gọi là nguyên tố cùng nhau.

For nonzero natural numbers a, b : $\text{HCF}(a; b) \cdot \text{LCM}(a; b) = a \cdot b$. Every common factor divides the HCF; every common multiple is a multiple of the LCM. Two numbers with HCF 1 are called coprime.

Kiểm với 12 và 18: $6 \cdot 36 = 216 = 12 \cdot 18$. Hai số 8 và 15 nguyên tố cùng nhau vì $\text{ƯCLN}(8; 15) = 1$. Hai số tự nhiên liên tiếp luôn nguyên tố cùng nhau.

Check with 12 and 18: $6 \cdot 36 = 216 = 12 \cdot 18$. The numbers 8 and 15 are coprime since $\text{HCF}(8; 15) = 1$. Two consecutive natural numbers are always coprime.

VÍ DỤ 1.8 / EXAMPLE 1.8 – Tìm ƯCLN và BCNN của 180 và 420.

Find the HCF and LCM of 180 and 420.

Lời giải. / Solution.

1. Phân tích: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ và $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Factorise: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ and $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

2. ƯCLN: thừa số chung là 2, 3, 5 với số mũ nhỏ nhất 2, 1, 1. $ƯCLN = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
HCF: the common primes are 2, 3, 5 with smallest exponents 2, 1, 1. $HCF = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
3. BCNN: lấy 2, 3, 5, 7 với số mũ lớn nhất 2, 2, 1, 1. $BCNN = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1.260$.
LCM: take 2, 3, 5, 7 with largest exponents 2, 2, 1, 1. $LCM = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1,260$.
4. Kiểm lại: $60 \cdot 1.260 = 75.600 = 180 \cdot 420$.
Check: $60 \cdot 1,260 = 75,600 = 180 \cdot 420$.

Vậy $ƯCLN = 60$ và $BCNN = 1.260$.

So $HCF = 60$ and $LCM = 1,260$. ■

Thuật toán Euclid. Với số lớn, phân tích thừa số mất thời gian. Dùng: $ƯCLN(a; b) = ƯCLN(b; r)$, trong đó r là số dư khi chia a cho b . Lặp lại đến khi số dư bằng 0; số chia cuối cùng là $ƯCLN$. Lí do: mọi số chia hết cả a và b cũng chia hết $r = a - b \cdot q$, và ngược lại.

Euclid's algorithm. For large numbers factorising takes long. Use $HCF(a; b) = HCF(b; r)$, where r is the remainder of a divided by b . Repeat until the remainder is 0; the last divisor is the HCF. Reason: any number dividing both a and b divides $r = a - b \cdot q$, and conversely.

VÍ DỤ 1.9 / EXAMPLE 1.9 – Dùng thuật toán Euclid tìm $ƯCLN(1.260; 546)$, rồi tính $BCNN(1.260; 546)$.

Use Euclid's algorithm to find $HCF(1,260; 546)$, then compute $LCM(1,260; 546)$.

Lời giải. / Solution.

1. $1.260 = 546 \cdot 2 + 168$, nên $ƯCLN(1.260; 546) = ƯCLN(546; 168)$.
 $1,260 = 546 \cdot 2 + 168$, so $HCF(1,260; 546) = HCF(546; 168)$.
2. $546 = 168 \cdot 3 + 42$, nên $ƯCLN(546; 168) = ƯCLN(168; 42)$.
 $546 = 168 \cdot 3 + 42$, so $HCF(546; 168) = HCF(168; 42)$.
3. $168 = 42 \cdot 4 + 0$, số dư bằng 0 nên $ƯCLN = 42$.
 $168 = 42 \cdot 4 + 0$, remainder 0, so the HCF is 42.
4. $BCNN = 1.260 \cdot 546 : 42 = 687.960 : 42 = 16.380$.
 $LCM = 1,260 \cdot 546 \div 42 = 687,960 \div 42 = 16,380$.

Vậy $ƯCLN = 42$, $BCNN = 16.380$.

So $HCF = 42$ and $LCM = 16,380$. ■

Bài toán thực tế: dùng ƯCLN hay BCNN – Real-life problems: HCF or LCM

Đề nói <i>The question says</i>	Dùng <i>Use</i>	Cách đặt <i>Setting up</i>
Chia đều, cắt thành đoạn bằng nhau, nhiều nhóm nhất, cạnh ô vuông lớn nhất <i>Share equally, cut into equal pieces, most groups, largest square side</i>	ƯCLN <i>HCF</i>	Số cần tìm là ước chung của các số đã cho <i>The answer is a common factor</i>

Đề nói <i>The question says</i>	Dùng <i>Use</i>	Cách đặt <i>Setting up</i>
Bao lâu sau lại trùng, lặp lại, xếp hàng vừa đủ, số nhỏ nhất <i>When they coincide again, repeat, arrange exactly, smallest number</i>	BCNN <i>LCM</i>	Số cần tìm là bội chung của các số đã cho <i>The answer is a common multiple</i>
Xếp hàng dư r em, mỗi cách đều dư r <i>Rows leave the same remainder r each time</i>	BCNN rồi cộng r <i>LCM then add r</i>	$n - r$ là bội chung <i>$n - r$ is a common multiple</i>

Gặp từ khóa ở cột trái thì chọn cách ở cột giữa. Dạng thứ ba (cùng dư r) khó nhận ra nhất; ví dụ 1.12 làm mẫu.

Match a keyword in the left column with the method in the middle. The third type (same remainder r) is the hardest to spot; example 1.12 shows it.

VÍ DỤ 1.10 (mức đề vào 10) / EXAMPLE 1.10 (entrance level) – Đội văn nghệ có 48 bạn nam và 60 bạn nữ. Cô giáo muốn chia thành nhiều tổ nhất sao cho mỗi tổ có số nam bằng nhau và số nữ bằng nhau. Chia được nhiều nhất bao nhiêu tổ? Mỗi tổ có mấy nam, mấy nữ?
A choir has 48 boys and 60 girls. The teacher wants as many groups as possible, each with the same number of boys and the same number of girls. What is the largest number of groups? How many boys and girls are in each?

Lời giải. / Solution.

- Gọi số tổ là k . Chia đều 48 nam và 60 nữ nên k là ước chung của 48 và 60. Nhiều tổ nhất nên $k = \text{ƯCLN}(48; 60)$.
Let k be the number of groups. Boys and girls are shared equally, so k is a common factor of 48 and 60. Most groups, so $k = \text{HCF}(48; 60)$.
- $48 = 2^4 \cdot 3$ và $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, nên $\text{ƯCLN} = 2^2 \cdot 3 = 12$.
 $48 = 2^4 \cdot 3$ and $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, so the HCF is $2^2 \cdot 3 = 12$.
- Mỗi tổ có $48 : 12 = 4$ nam và $60 : 12 = 5$ nữ.
Each group has $48 \div 12 = 4$ boys and $60 \div 12 = 5$ girls.

Vậy chia được nhiều nhất 12 tổ, mỗi tổ 4 nam và 5 nữ.

So at most 12 groups, each with 4 boys and 5 girls. ■

VÍ DỤ 1.11 (mức đề vào 10) / EXAMPLE 1.11 (entrance level) – Ba bạn An, Bình, Chi trực nhật theo lịch: An cứ 6 ngày một lần, Bình cứ 8 ngày một lần, Chi cứ 10 ngày một lần. Hôm nay cả ba cùng trực. Sau ít nhất bao nhiêu ngày thì ba bạn lại cùng trực?
Three friends An, Binh and Chi are on duty by a schedule: An every 6 days, Binh every 8 days, Chi every 10 days. Today all three are on duty. After at least how many days are all three on duty together again?

Lời giải. / Solution.

- Số ngày cần tìm chia hết cho 6, 8 và 10 nên là bội chung của ba số. Ít nhất nên đó là $\text{BCNN}(6; 8; 10)$.

The number of days is divisible by 6, 8 and 10, so it is a common multiple. At least, so it is $\text{LCM}(6; 8; 10)$.

2. $6 = 2 \cdot 3; 8 = 2^3; 10 = 2 \cdot 5$. BCNN $= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

$6 = 2 \cdot 3; 8 = 2^3; 10 = 2 \cdot 5$. LCM $= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Vậy sau ít nhất 120 ngày ba bạn lại cùng trực.

So after at least 120 days all three are on duty together again. ■

VÍ DỤ 1.12 (mức đề vào 10) / EXAMPLE 1.12 (entrance level) – Một khối học sinh khi xếp hàng 6, hàng 8 hoặc hàng 10 đều dư 3 em. Biết số học sinh lớn hơn 100 và nhỏ hơn 200. Tính số học sinh.

A year group of students, when lined up in rows of 6, 8 or 10, always has 3 left over. The number of students is between 100 and 200. Find it.

Lời giải. / Solution.

1. Gọi số học sinh là n . Bớt 3 em dư thì xếp vừa đủ nên $n - 3$ chia hết cho 6, 8 và 10, tức $n - 3$ là bội chung của 6, 8, 10.

Let n be the number of students. Removing the 3 left over, the rows fit exactly, so $n - 3$ is divisible by 6, 8 and 10, a common multiple.

2. BCNN(6; 8; 10) = 120 (ví dụ 1.11), nên $n - 3 \in \{0; 120; 240; \dots\}$, tức $n \in \{3; 123; 243; \dots\}$.

$\text{LCM}(6; 8; 10) = 120$ (example 1.11), so $n - 3 \in \{0; 120; 240; \dots\}$, that is $n \in \{3; 123; 243; \dots\}$.

3. Đới chiều $100 < n < 200$: chỉ $n = 123$.

Check $100 < n < 200$: only $n = 123$.

4. Kiểm lại: $123 = 6 \cdot 20 + 3 = 8 \cdot 15 + 3 = 10 \cdot 12 + 3$.

Check: $123 = 6 \cdot 20 + 3 = 8 \cdot 15 + 3 = 10 \cdot 12 + 3$.

Vậy có 123 học sinh.

So there are 123 students. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm ƯCLN với BCNN: bài chia nhóm dùng ƯCLN, bài lịch trùng nhau dùng BCNN. Tự hỏi: đáp số nhỏ hơn hay lớn hơn các số đề cho?
Mixing up HCF and LCM: grouping uses the HCF, repeating schedules use the LCM. Ask: should the answer be smaller or larger than the given numbers?

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bài dư r: lấy luôn BCNN làm đáp số mà quên cộng r, hoặc quên đới chiều khoảng của n .
Remainder problems: giving the LCM as the answer without adding r, or forgetting to check the range of n .

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lấy số mũ lớn nhất khi tìm ƯCLN (hoặc nhỏ nhất khi tìm BCNN).

Using the largest exponent for the HCF (or the smallest for the LCM).

PHẢI THUỘC / MEMORISE – ƯCLN: thừa số chung, mũ nhỏ nhất. BCNN: mọi thừa số, mũ lớn nhất. $\text{ƯCLN} \cdot \text{BCNN} = a \cdot b$. $\text{ƯCLN}(a; b) = \text{ƯCLN}(b; r)$.
*HCF: common primes, smallest exponents. LCM: all primes, largest exponents. $\text{HCF} \cdot \text{LCM} = a \cdot b$.
 $\text{HCF}(a; b) = \text{HCF}(b; r)$.*

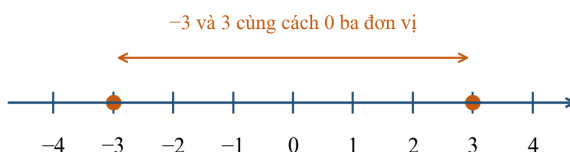
1.5. Số nguyên và các phép tính – Integers and their operations

Số nguyên gồm số tự nhiên và các số đối của chúng: $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.
Số âm dùng cho nhiệt độ dưới 0, nợ, độ sâu dưới mực nước biển.

*The integers are the natural numbers and their opposites: $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.
Negative numbers describe temperatures less than 0, debts and depths under sea level.*

Số đối của a là $-a$. Hai số đối nhau nằm cách đều số 0 ở hai phía trên trục số (Hình 1.3: 3 và -3). Giá trị tuyệt đối của a , kí hiệu $|a|$, là khoảng cách từ a đến 0. Ví dụ $|-7| = 7$, $|5| = 5$, $|0| = 0$. Trên trục số, số nhỏ hơn nằm bên trái số lớn hơn: $-5 < -2 < 0 < 3$.

The opposite of a is $-a$. Two opposites lie at equal distances from 0 on either side of the number line (Figure 1.3: 3 and -3). The absolute value of a , written $|a|$, is its distance from 0. For example $|-7| = 7$, $|5| = 5$, $|0| = 0$. On the number line the smaller number lies to the left: $-5 < -2 < 0 < 3$.



Hình 1.3. Trục số: 3 và -3 là hai số đối nhau
Figure 1.3. The number line: 3 and -3 are opposites

TÍNH CHẤT 1.9 (Cộng, trừ số nguyên) / PROPERTY 1.9 (Adding and subtracting integers) – Cộng hai số cùng dấu: cộng hai giá trị tuyệt đối, giữ dấu chung. Cộng hai số khác dấu: lấy giá trị tuyệt đối lớn trừ giá trị tuyệt đối nhỏ, dấu của số có giá trị tuyệt đối lớn hơn.
Phép trừ: $a - b = a + (-b)$.

Adding numbers of the same sign: add the absolute values and keep the sign. Adding numbers of different signs: subtract the smaller absolute value from the larger, and keep the sign of the number with the larger absolute value. Subtraction: $a - b = a + (-b)$.

Ví dụ số nhỏ: $(-4) + (-6) = -10$; $(-9) + 5 = -4$; $7 + (-7) = 0$; $3 - 8 = 3 + (-8) = -5$; $3 - (-8) = 3 + 8 = 11$.

Small examples: $(-4) + (-6) = -10$; $(-9) + 5 = -4$; $7 + (-7) = 0$; $3 - 8 = 3 + (-8) = -5$; $3 - (-8) = 3 + 8 = 11$.

TÍNH CHẤT 1.10 (Dấu ngoặc và nhân số nguyên) / PROPERTY 1.10 (Brackets and multiplying integers) – Quy tắc dấu ngoặc: bỏ ngoặc có dấu + đằng trước thì giữ nguyên dấu các số trong ngoặc; bỏ ngoặc có dấu – đằng trước thì đổi dấu mọi số trong ngoặc. Quy tắc

nhân: $(+)\cdot(+)=+$, $(-)\cdot(-)=+$, $(+)\cdot(-)=-$.

Brackets rule: removing brackets preceded by + keeps the signs inside; removing brackets preceded by – changes every sign inside. Multiplication: $(+)\cdot(+)=+$, $(-)\cdot(-)=+$, $(+)\cdot(-)=-$.

Ví dụ: $10 - (3 - 5 + 2) = 10 - 3 + 5 - 2 = 10$; $(-4)\cdot(-3) = 12$; $(-4)\cdot 3 = -12$; $(-2)^3 = -8$;
 $(-2)^4 = 16$. Lũy thừa số mũ chẵn của số âm là số dương, số mũ lẻ cho số âm.

*Examples: $10 - (3 - 5 + 2) = 10 - 3 + 5 - 2 = 10$; $(-4)\cdot(-3) = 12$; $(-4)\cdot 3 = -12$; $(-2)^3 = -8$;
 $(-2)^4 = 16$. An even power of a negative number is positive; an odd power is negative.*

ĐỊNH NGHĨA 1.11 (Ước và bội trong $\mathbb{Z}$) / DEFINITION 1.11 (Factors and multiples in $\mathbb{Z}$) – Cho $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Nếu có $q \in \mathbb{Z}$ sao cho $a = b \cdot q$ thì a chia hết cho b ; b là ước và a là bội của b trong $\mathbb{Z}$. $U(a)$ trong $\mathbb{Z}$ gồm các ước dương và các số đối của chúng.

For $a, b \in \mathbb{Z}$ with $b \neq 0$: if there is $q \in \mathbb{Z}$ with $a = b \cdot q$ then a is divisible by b ; b is a factor and a is a multiple of b in $\mathbb{Z}$. The factors of a in $\mathbb{Z}$ are the positive factors and their opposites.

Ví dụ $U(6)$ trong $\mathbb{Z} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$, gồm 8 số vì mỗi ước dương kèm một số đối. Bội của 4 trong $\mathbb{Z}$: $\dots; -8; -4; 0; 4; 8; \dots$. Phép chia hết dùng quy tắc dấu như phép nhân: $(-12) : 3 = -4$; $(-12) : (-3) = 4$; $12 : (-3) = -4$.

For example the factors of 6 in $\mathbb{Z}$ are $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$, 8 numbers since each positive factor comes with its opposite. Multiples of 4 in $\mathbb{Z}$: $\dots; -8; -4; 0; 4; 8; \dots$ Exact division follows the sign rule of multiplication: $(-12) \div 3 = -4$; $(-12) \div (-3) = 4$; $12 \div (-3) = -4$.

Các bước tìm x nguyên từ tích hoặc từ ước – Steps for integer x from a product or a factor condition

1. Đưa đề về dạng (biểu thức chứa x) $\cdot$ (biểu thức chứa y) = số cố định, hoặc (biểu thức chứa x) là ước của số cố định.
Rewrite the question as (expression in x) $\cdot$ (expression in y) = a fixed number, or (expression in x) is a factor of a fixed number.
2. Liệt kê MỌI ước của số cố định trong $\mathbb{Z}$, gồm cả ước âm.
List ALL factors of the fixed number in $\mathbb{Z}$, including negative ones.
3. Với mỗi ước, giải ra x (và y). Lập bảng cho gọn.
For each factor, solve for x (and y). Use a table to stay tidy.
4. Đối chiếu điều kiện của đề (x dương, x trong khoảng...), rồi kết luận.
Check the conditions of the question (x positive, x in a range...), then conclude.

VÍ DỤ 1.13 / EXAMPLE 1.13 – Tính $A = 15 - (-6) + 2 \cdot (-4) - [12 - (3 - 9)]$.

Calculate $A = 15 - (-6) + 2 \cdot (-4) - [12 - (3 - 9)]$.

Lời giải. / Solution.

1. Trong ngoặc tròn: $3 - 9 = -6$. Trong ngoặc vuông: $12 - (-6) = 18$.
Round brackets: $3 - 9 = -6$. Square brackets: $12 - (-6) = 18$.
2. Phép nhân: $2 \cdot (-4) = -8$.
Multiplication: $2 \cdot (-4) = -8$.

3. $A = 15 + 6 + (-8) - 18 = 21 - 8 - 18 = -5$.

$$A = 15 + 6 + (-8) - 18 = 21 - 8 - 18 = -5.$$

Vậy $A = -5$.

So $A = -5$. ■

VÍ DỤ 1.14 (mức đề vào 10) / EXAMPLE 1.14 (entrance level) – a) Tìm số nguyên x sao cho $x + 3$ là ước dương của 12. b) Tìm các số nguyên x, y thỏa $(x - 2)(y + 1) = 5$.
a) Find the integers x such that $x + 3$ is a positive factor of 12. b) Find the integers x, y with $(x - 2)(y + 1) = 5$.

Lời giải. / Solution.

1. a) Ước dương của 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Vậy $x + 3 \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, suy ra $x \in \{-2; -1; 0; 1; 3; 9\}$.

a) Positive factors of 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12. So $x + 3 \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, giving $x \in \{-2; -1; 0; 1; 3; 9\}$.

2. b) $U(5) = \{1; -1; 5; -5\}$. Lập bảng cho $x - 2$ và $y + 1$ (tích bằng 5):

b) The factors of 5 are 1, -1, 5, -5. Tabulate $x - 2$ and $y + 1$ (product 5):

- $x - 2 = 1, y + 1 = 5: x = 3, y = 4$.

$x - 2 = 1, y + 1 = 5: x = 3, y = 4$.

- $x - 2 = -1, y + 1 = -5: x = 1, y = -6$.

$x - 2 = -1, y + 1 = -5: x = 1, y = -6$.

- $x - 2 = 5, y + 1 = 1: x = 7, y = 0$.

$x - 2 = 5, y + 1 = 1: x = 7, y = 0$.

- $x - 2 = -5, y + 1 = -1: x = -3, y = -2$.

$x - 2 = -5, y + 1 = -1: x = -3, y = -2$.

Vậy a) $x \in \{-2; -1; 0; 1; 3; 9\}$; b) $(x; y) \in \{(3; 4), (1; -6), (7; 0), (-3; -2)\}$.

So a) $x \in \{-2; -1; 0; 1; 3; 9\}$; b) $(x; y) \in \{(3; 4), (1; -6), (7; 0), (-3; -2)\}$. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bỏ ngoặc có dấu – đằng trước mà không đổi dấu: $10 - (3 - 5)$ bằng $10 - 3 + 5$ chứ không phải $10 - 3 - 5$.

Removing brackets after a minus sign without changing signs: $10 - (3 - 5)$ equals $10 - 3 + 5$, not $10 - 3 - 5$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chỉ lấy ước dương, bỏ ước âm khi giải tích bằng số cố định.

Using only positive factors and dropping the negative ones when a product is fixed.

NHẬN XÉT / REMARK – $(-2)^4 = 16$ nhưng $-2^4 = -16$: dấu trừ nằm ngoài lũy thừa thì không bị nâng lên lũy thừa.

$(-2)^4 = 16$ but $-2^4 = -16$: a minus sign outside the power is not raised to it.

1.6. Nâng cao: chứng minh chia hết, số chính phương, x nguyên để biểu thức nguyên – *Advanced: divisibility proofs, squares, integer x*

Câu phân loại và đề chuyên cần ba công cụ: (1) phân tích thành tích rồi chỉ ra một thừa số chia hết; (2) xét số dư khi chia cho 2, 3, 4, 5; (3) tách phần nguyên của biểu thức có dạng thương để đưa về bài tìm ước.

Top-mark and specialist questions need three tools: (1) factorise into a product and show one factor is divisible; (2) check remainders on division by 2, 3, 4, 5; (3) split off the whole part of a quotient expression to reduce to a factor-finding problem.

Chứng minh chia hết – *Proving divisibility*

1. Phân tích biểu thức thành tích các thừa số (đặt nhân tử chung, hằng đẳng thức).
Factorise the expression into a product (common factor, identities).
2. Tách số cần chia thành các số nguyên tố cùng nhau, ví dụ $6 = 2 \cdot 3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
Split the divisor into coprime parts, for example $6 = 2 \cdot 3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
3. Chứng minh biểu thức chia hết cho từng số đó (trong 2 số liên tiếp có một số chẵn; trong 3 số liên tiếp có một số chia hết cho 3; hoặc xét từng số dư).
Show the expression is divisible by each part (among 2 consecutive integers one is even; among 3 consecutive one is divisible by 3; or check each remainder).
4. Kết luận: nếu a chia hết cho m và cho n mà $\text{UCLN}(m; n) = 1$ thì a chia hết cho $m \cdot n$.
Conclude: if a is divisible by m and by n with $\text{HCF}(m; n) = 1$ then a is divisible by $m \cdot n$.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – Thấy $n^3 - n$, nghĩ ngay đến đặt n làm thừa số chung và dùng hằng đẳng thức $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. Ra ba số nguyên liên tiếp.
On seeing $n^3 - n$, take out n and use $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. This gives three consecutive integers.

VÍ DỤ 1.15 (mức chuyên) / EXAMPLE 1.15 (specialist level) – Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .
Prove that $n^3 - n$ is divisible by 6 for every integer n .

Lời giải. / *Solution.*

1. Phân tích: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$, tích của ba số nguyên liên tiếp.
Factorise: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$, a product of three consecutive integers.
2. Trong hai số liên tiếp luôn có một số chẵn, nên tích chia hết cho 2.
Among two consecutive integers one is even, so the product is divisible by 2.
3. Trong ba số liên tiếp có đúng một số chia hết cho 3 (ba số dư khác nhau 0, 1, 2 khi chia cho 3), nên tích chia hết cho 3.
Among three consecutive integers exactly one is divisible by 3 (their remainders on division by 3 are 0, 1, 2 in some order), so the product is divisible by 3.
4. $\text{UCLN}(2; 3) = 1$ nên tích chia hết cho $2 \cdot 3 = 6$.
 $\text{HCF}(2; 3) = 1$, so the product is divisible by $2 \cdot 3 = 6$.

Vậy $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

So $n^3 - n$ is divisible by 6 for every integer n . ■

Số chính phương – Square numbers

ĐỊNH NGHĨA 1.12 (Số chính phương) / DEFINITION 1.12 (Square number) – Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

A square number is the square of a natural number: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

TÍNH CHẤT 1.13 (Dấu hiệu nhận biết số chính phương) / PROPERTY 1.13 (Tests for square numbers) – Số chính phương có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6 hoặc 9, không bao giờ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8. Khi chia cho 3 số chính phương dư 0 hoặc 1; khi chia cho 4 dư 0 hoặc 1.

A square number ends in 0, 1, 4, 5, 6 or 9, never in 2, 3, 7, 8. On division by 3 a square leaves remainder 0 or 1; on division by 4 it leaves 0 or 1.

Chứng minh. / Proof.

Chia cho 3: số tự nhiên n có dạng $3k$, $3k + 1$ hoặc $3k + 2$. Bình phương lần lượt bằng $9k^2$, $9k^2 + 6k + 1$, $9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Dư 0, 1, 1.

Remainder on division by 3: n has the form $3k$, $3k + 1$ or $3k + 2$. The squares are $9k^2$, $9k^2 + 6k + 1$, $9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Remainders 0, 1, 1.

Chia cho 4: $n = 2k$ hoặc $2k + 1$. Bình phương là $4k^2$ (dư 0) hoặc $4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ (dư 1).

Remainder on division by 4: $n = 2k$ or $2k + 1$. The squares are $4k^2$ (remainder 0) or $4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ (remainder 1). ■

Ví dụ 2.026 không phải số chính phương vì chia cho 4 dư 2 ($2.026 = 4 \cdot 506 + 2$). Số 3.333 không phải số chính phương vì tận cùng 3.

For example 2,026 is not a square because it leaves remainder 2 on division by 4 ($2,026 = 4 \cdot 506 + 2$). 3,333 is not a square because it ends in 3.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – Tích bốn số liên tiếp cộng 1 trông không có gì đặc biệt. Thử $n = 1$: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$. Thử $n = 2$: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$. Đoán là chính phương. Ghép số đầu với số cuối và hai số giữa với nhau để hai tích có cùng phần $n^2 + 3n$.

The product of four consecutive numbers plus 1 looks ordinary. Try $n = 1$: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$. Try $n = 2$: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$. Guess a square. Pair the first with the last and the two middle ones so both products share the part $n^2 + 3n$.

VÍ DỤ 1.16 (mức chuyên) / EXAMPLE 1.16 (specialist level) – Chứng minh với mọi số tự nhiên n , số $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ là số chính phương.

Prove that for every natural number n , $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ is a square number.

Lời giải. / Solution.

1. Ghép: $n(n + 3) = n^2 + 3n$ và $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$.

Pair: $n(n + 3) = n^2 + 3n$ and $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$.

2. Đặt $t = n^2 + 3n$. Biểu thức bằng $t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$.

Put $t = n^2 + 3n$. The expression equals $t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$.

3. Vậy biểu thức bằng $(n^2 + 3n + 1)^2$, mà $n^2 + 3n + 1$ là số tự nhiên.

So the expression equals $(n^2 + 3n + 1)^2$, and $n^2 + 3n + 1$ is a natural number.

Kết luận: $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ là số chính phương.

Conclusion: $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ is a square number. ■

Tìm x nguyên để biểu thức nguyên – *Integer x making an expression an integer*

1. Tách phần nguyên: viết tử số thành (số nguyên)·(mẫu) + (số cố định), rồi chia từng phần cho mẫu để được (số nguyên) + (số cố định)/(mẫu).

Split off the whole part: write the numerator as (integer)·(denominator) + (fixed number), then divide each part by the denominator to get (integer) + (fixed number)/(denominator).

2. Biểu thức nguyên khi (mẫu) là ước của số cố định.

The expression is an integer when the denominator is a factor of the fixed number.

3. Liệt kê các ước (cả âm), giải ra x. Mẫu khác 0.

List the factors (including negative), solve for x. The denominator is nonzero.

4. Thế ngược vào đề gốc kiểm giá trị nguyên.

Substitute back into the original expression to check it is an integer.

VÍ DỤ 1.17 (mức đề vào 10) / EXAMPLE 1.17 (entrance level) – Tìm tất cả số nguyên x để $A = (2x + 5)/(x + 1)$ là số nguyên.

Find all integers x for which $A = (2x + 5)/(x + 1)$ is an integer.

Lời giải. / *Solution.*

1. Điều kiện $x \neq -1$. Tách: $2x + 5 = 2(x + 1) + 3$, nên $A = 2 + 3/(x + 1)$.

Condition $x \neq -1$. Split: $2x + 5 = 2(x + 1) + 3$, so $A = 2 + 3/(x + 1)$.

2. A nguyên khi $3/(x + 1)$ nguyên, tức $x + 1$ là ước của 3: $x + 1 \in \{1; -1; 3; -3\}$.

A is an integer when $3/(x + 1)$ is, that is $x + 1$ is a factor of 3: $x + 1 \in \{1; -1; 3; -3\}$.

3. Suy ra $x \in \{0; -2; 2; -4\}$, đều khác -1 .

So $x \in \{0; -2; 2; -4\}$, all different from -1 .

4. Kiểm lại: $x = 0$ cho $A = 5$; $x = -2$ cho $A = -1$; $x = 2$ cho $A = 3$; $x = -4$ cho $A = 1$.

Check: $x = 0$ gives $A = 5$; $x = -2$ gives $A = -1$; $x = 2$ gives $A = 3$; $x = -4$ gives $A = 1$.

Vậy $x \in \{-4; -2; 0; 2\}$.

So $x \in \{-4; -2; 0; 2\}$. ■

Số nguyên tố trong bài khó và chữ số tận cùng – *Primes in harder problems and last digits*

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – Ba số $p, p + 2, p + 4$ hơn kém nhau 2 nên khi chia cho 3 chúng có ba số dư khác nhau. Vậy có một số chia hết cho 3. Số đó phải bằng 3 mới là nguyên tố.

The numbers $p, p + 2, p + 4$ differ by 2, so on division by 3 their remainders are all different. Hence one of them is divisible by 3. That one must equal 3 to be prime.

VÍ DỤ 1.18 (mức chuyên) / EXAMPLE 1.18 (specialist level) – Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 2$ và $p + 4$ cũng là số nguyên tố.

Find the prime p such that $p + 2$ and $p + 4$ are also prime.

Lời giải. / Solution.

- $p = 2$: $p + 2 = 4$ là hợp số, loại. Từ đây p lẻ.
 $p = 2$: $p + 2 = 4$ is composite, rejected. From now on p is odd.
- $p = 3$: $p + 2 = 5$, $p + 4 = 7$ đều là số nguyên tố, nhận.
 $p = 3$: $p + 2 = 5$, $p + 4 = 7$ are both prime, accepted.
- $p > 3$: p không chia hết cho 3 nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$. Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3(k + 1)$ chia hết cho 3 và lớn hơn 3, là hợp số. Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 4 = 3(k + 2)$ chia hết cho 3 và lớn hơn 3, là hợp số.
 $p > 3$: p is not divisible by 3, so $p = 3k + 1$ or $p = 3k + 2$. If $p = 3k + 1$ then $p + 2 = 3(k + 1)$ is divisible by 3 and greater than 3, so composite. If $p = 3k + 2$ then $p + 4 = 3(k + 2)$ is divisible by 3 and greater than 3, so composite.

Vậy chỉ có $p = 3$.

So the only solution is $p = 3$. ■

VÍ DỤ 1.19 (mức chuyên) / EXAMPLE 1.19 (specialist level) – Tìm chữ số tận cùng của 7^{2026} .

Find the last digit of 7^{2026} .

Lời giải. / Solution.

- Tính chữ số tận cùng của các lũy thừa đầu: $7^1 = 7$ tận cùng 7; $7^2 = 49$ tận cùng 9; $7^3 = 343$ tận cùng 3; $7^4 = 2.401$ tận cùng 1; rồi lặp lại 7, 9, 3, 1 (chu kỳ 4).
Last digits of the first powers: 7^1 ends in 7; $7^2 = 49$ in 9; $7^3 = 343$ in 3; $7^4 = 2,401$ in 1; then the pattern 7, 9, 3, 1 repeats (period 4).
- $2026 = 4 \cdot 506 + 2$. Mà 7^4 tận cùng 1 nên $7^{2024} = (7^4)^{506}$ tận cùng 1.
 $2026 = 4 \cdot 506 + 2$. Since 7^4 ends in 1, $7^{2024} = (7^4)^{506}$ ends in 1.
- $7^{2026} = 7^{2024} \cdot 7^2$, chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của $1 \cdot 9 = 9$.
 $7^{2026} = 7^{2024} \cdot 7^2$ ends in the last digit of $1 \cdot 9 = 9$.

Vậy chữ số tận cùng của 7^{2026} là 9.

So the last digit of 7^{2026} is 9. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chứng minh chia hết cho 6 bằng cách thử vài giá trị n . Thử vài số không phải là chứng minh.

Proving divisibility by 6 by testing a few values of n . Testing examples is not a proof.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chia hết cho 4 và 6 rồi kết luận chia hết cho 24: sai vì ƯCLN(4; 6) = 2 $\neq$ 1 (ví dụ 12). Chỉ ghép hai số nguyên tố cùng nhau.

Divisible by 4 and 6, concluding divisible by 24: wrong since $HCF(4; 6) = 2 \neq 1$ (for example 12).

Only combine coprime divisors.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Tìm x nguyên để biểu thức nguyên mà quên ước âm hoặc quên điều kiện mẫu khác 0.

Finding integer x for an expression but forgetting negative factors or the condition denominator $\neq 0$.

NHẬN XÉT / REMARK – Bài chứng minh có tham số n mà thử $n = 1, 2$ cho ra số đẹp (25, 121) thường là dấu hiệu bình phương một biểu thức. Thử trước để đoán, rồi chứng minh tổng quát.

A proof question with parameter n where $n = 1, 2$ give nice numbers (25, 121) often hides the square of an expression. Test first to guess, then prove in general.

$$n^3 - n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \quad (1.1)$$

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2 \quad (1.2)$$

$$\text{ƯCLN}(a; b) \cdot \text{BCNN}(a; b) = a \cdot b \quad (1.3)$$

$$\text{Số ước của } p^a \cdot q^b \cdot r^c \text{ là } (a + 1)(b + 1)(c + 1) \quad (1.4)$$

1.7. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – Multiple-choice and short-answer practice

Nhiều lựa chọn: tính nhanh đáp số rồi đối chiếu; hoặc loại phương án sai (sai dấu hiệu, sai tận cùng). Đúng/sai: xét độc lập từng ý a, b, c, d, ý nào cũng cần một lí do. Trả lời ngắn: tính ra một số rồi ghi đúng số đó, không kèm chữ; nếu đề nói làm tròn thì làm tròn đúng hàng.

Multiple choice: compute the answer and match it, or eliminate wrong options (wrong test, wrong last digit). True/false: judge parts a, b, c, d independently, each with a reason. Short answer: compute one number and write just that number; if the question asks for rounding, round to the stated place.

Câu 1 / Question 1 – Số nào sau đây chia hết cho cả 2, 3 và 5? A. 1.236 B. 2.310 C. 1.505 D. 4.125

Which number is divisible by 2, 3 and 5? A. 1,236 B. 2,310 C. 1,505 D. 4,125

Câu 2 / Question 2 – ƯCLN(72; 108) bằng A. 12 B. 18 C. 36 D. 216

HCF(72; 108) equals A. 12 B. 18 C. 36 D. 216

Câu 3 / Question 3 – Giá trị của $3 - (-5) + (-2) \cdot 4$ là A. -10 B. 0 C. 16 D. 8

The value of $3 - (-5) + (-2) \cdot 4$ is A. -10 B. 0 C. 16 D. 8

Câu 4 / Question 4 – Trong các số 51, 53, 57, 59, 91 có bao nhiêu số nguyên tố? A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

How many of 51, 53, 57, 59, 91 are prime? A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 5 / Question 5 – Cho $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Mỗi khẳng định đúng hay sai? a) A có đúng ba thừa số nguyên tố khác nhau. b) A chia hết cho 45. c) A có 12 ước. d) A là bội của 16.

Let $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. True or false? a) A has exactly three distinct prime factors. b) A is divisible by 45. c) A has 12 factors. d) A is a multiple of 16.

Câu 6 / Question 6 – Cho $a = 84$ và $b = 90$. Mỗi khẳng định đúng hay sai? a) ƯCLN($a; b$) = 6. b) BCNN($a; b$) = 1.260. c) a và b nguyên tố cùng nhau. d) 12 là ước chung của a và b .

Let $a = 84$ and $b = 90$. True or false? a) $HCF(a; b) = 6$. b) $LCM(a; b) = 1,260$. c) a and b are coprime. d) 12 is a common factor of a and b .

Câu 7 / Question 7 – Một khối học sinh xếp hàng 6, hàng 8 hoặc hàng 9 đều vừa đủ. Biết số học sinh lớn hơn 150 và nhỏ hơn 250. Tính số học sinh.

A year group lines up in rows of 6, 8 or 9 with none left over. The number of students is between 150 and 250. Find it.

Câu 8 / Question 8 – Có bao nhiêu số nguyên x thỏa $-3 < x \leq 4$?

How many integers x satisfy $-3 < x \leq 4$?

Đáp án và giải thích – Answers and explanations

Câu Question	Đáp án Answer	Giải thích Explanation
1	B	2.310 tận cùng 0 (: 2 và 5), tổng chữ số 6 (: 3). A không : 5; C lẻ; D tận cùng 5 nên lẻ. <i>2,310 ends in 0 (divisible by 2 and 5), digit sum 6 (divisible by 3). A is not divisible by 5; C is odd; D ends in 5 so is odd.</i>
2	C	$72 = 2^3 \cdot 3^2$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$; ƯCLN $= 2^2 \cdot 3^2 = 36$. 216 là BCNN, nhiễu. <i>$72 = 2^3 \cdot 3^2$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$; $HCF = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. 216 is the LCM, a distractor.</i>
3	B	$3 + 5 - 8 = 0$. A sai dấu khi trừ số âm; C cộng cả -8 thành $+8$; D bỏ phép nhân. <i>$3 + 5 - 8 = 0$. A mishandles subtracting a negative; C adds 8 instead of -8; D drops the product.</i>
4	B	53 và 59 nguyên tố; $51 = 3 \cdot 17$, $57 = 3 \cdot 19$, $91 = 7 \cdot 13$. <i>53 and 59 are prime; $51 = 3 \cdot 17$, $57 = 3 \cdot 19$, $91 = 7 \cdot 13$.</i>
5	a Đ, b Đ, c S, d S <i>a T, b T, c F, d F</i>	a) Thừa số 2, 3, 5: đúng. b) $A = 360 = 45 \cdot 8$: đúng. c) Số ước $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$, sai. d) $360 : 16 = 22,5$, sai. <i>a) primes 2, 3, 5: true. b) $A = 360 = 45 \cdot 8$: true. c) Factors $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$, false. d) $360 \div 16 = 22.5$, false.</i>
6	a Đ, b Đ, c S, d S <i>a T, b T, c F, d F</i>	$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$; $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. a) ƯCLN $= 2 \cdot 3 = 6$: đúng. b) BCNN $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1.260$: đúng. c) ƯCLN $= 6 \neq 1$: sai. d) 90 không chia hết cho 12: sai. <i>$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$; $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. a) $HCF = 2 \cdot 3 = 6$: true. b) $LCM = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1,260$: true. c) $HCF = 6 \neq 1$: false. d) 90 is not divisible by 12: false.</i>
7	216	BCNN(6; 8; 9) $= 2^3 \cdot 3^2 = 72$. Bộ: 144, 216. Chỉ 216 nằm trong khoảng (150; 250). <i>$LCM(6; 8; 9) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$. Multiples: 144, 216. Only 216 lies in (150; 250).</i>
8	7	$x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$: 7 số. Lưu ý -3 bị loại (dấu $<$), 4 được lấy (dấu $\leq$). <i>$x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$: 7 numbers. Note -3 is excluded ($<$) and 4 included ($\leq$).</i>

1.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ – *Strategy table and glossary*

Gặp dấu hiệu ở cột trái thì dùng cách ở cột giữa; cột phải chỉ ví dụ làm mẫu trong chương.

When you see the sign in the left column, use the method in the middle; the right column points to the worked example.

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Cách làm <i>Method</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Tính nhanh tổng, tích <i>Quick sums and products</i>	Nhóm cặp tròn, đặt thừa số chung, đếm số số hạng <i>Group round pairs, factor, count terms</i>	1.2
Tìm x có lũy thừa <i>x with powers</i>	Đưa về cùng cơ số; nhớ $x - a = \pm b$ <i>Same base; remember $x - a = \pm b$</i>	1.4
Tìm chữ số để chia hết <i>Missing digit for divisibility</i>	Cuối: 2, 5; tổng chữ số: 3, 9 <i>Last digit: 2, 5; digit sum: 3, 9</i>	1.5
Số có phải nguyên tố; đếm ước <i>Prime test; count factors</i>	Thử đến $\sqrt{n}$; số mũ cộng 1 nhân lại <i>Test to $\sqrt{n}$; add 1 to exponents and multiply</i>	1.6, 1.7
Chia đều, nhiều nhóm nhất <i>Share equally, most groups</i>	ƯCLN <i>HCF</i>	1.10
Bao lâu lại trùng, số nhỏ nhất <i>When it coincides again</i>	BCNN <i>LCM</i>	1.11
Xếp hàng cùng dư r <i>Rows with same remainder r</i>	$n - r$ là bội chung, đối chiếu khoảng <i>$n - r$ is a common multiple, check range</i>	1.12
Số nguyên có tích hoặc ước <i>Integer product or factor</i>	Liệt kê ước cả âm, lập bảng <i>List factors including negative, tabulate</i>	1.14
Chứng minh chia hết <i>Prove divisibility</i>	Phân tích thành tích liên tiếp, xét số dư <i>Factorise to consecutive terms, check remainders</i>	1.15
Biểu thức nguyên <i>Expression is an integer</i>	Tách phần nguyên, mẫu là ước <i>Split whole part; denominator is a factor</i>	1.17

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Tập hợp	Set	Nhóm đối tượng xác định <i>A well-defined group of objects</i>
Phần tử	Element	Đối tượng thuộc tập hợp <i>An object in the set</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Tập con	Subset	Mọi phần tử của nó đều thuộc tập lớn hơn <i>All its elements lie in the larger set</i>
Tập rỗng	Empty set	Tập không có phần tử <i>A set with no elements</i>
Lũy thừa	Power	a^n = tích n thừa số a <i>a^n = product of n factors a</i>
Cơ số, số mũ	Base, exponent	Trong a^n : a là cơ số, n là số mũ <i>In a^n: a is the base, n the exponent</i>
Chia hết	Divisible	$a = b \cdot q$ với q nguyên <i>$a = b \cdot q$ with q an integer</i>
Ước	Factor (divisor)	Số chia hết số đã cho <i>A number that divides the given one</i>
Bội	Multiple	Số chia hết cho số đã cho <i>A number divisible by the given one</i>
Dấu hiệu chia hết	Divisibility test	Cách nhận biết chia hết qua chữ số <i>A digit-based way to recognise divisibility</i>
Số nguyên tố	Prime number	Lớn hơn 1, chỉ có hai ước 1 và chính nó <i>Greater than 1 with only factors 1 and itself</i>
Hợp số	Composite number	Lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước <i>Greater than 1 with more than two factors</i>
Thừa số nguyên tố	Prime factor	Ước là số nguyên tố <i>A factor that is prime</i>
Ước chung lớn nhất (ƯCLN)	Highest common factor (HCF)	Ước chung lớn nhất của các số <i>The largest common factor</i>
Bội chung nhỏ nhất (BCNN)	Lowest common multiple (LCM)	Bội chung nhỏ nhất khác 0 <i>The smallest nonzero common multiple</i>
Nguyên tố cùng nhau	Coprime	ƯCLN bằng 1 <i>HCF equal to 1</i>
Thuật toán Euclid	Euclid's algorithm	Tìm ƯCLN bằng phép chia có dư lặp lại <i>Finding the HCF by repeated division with remainder</i>
Số nguyên	Integer	Số tự nhiên và số đối của nó <i>A natural number or its opposite</i>
Số đối	Opposite number	a và $-a$ <i>a and $-a$</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Giá trị tuyệt đối	Absolute value	Khoảng cách từ số đó đến 0 <i>Distance from the number to 0</i>
Số chính phương	Square number	Bình phương của một số tự nhiên <i>The square of a natural number</i>
Số dư	Remainder	Phần còn lại trong phép chia có dư <i>What is left in division with remainder</i>

1.9. Bài tự luyện – *Practice problems*

Mức 1 – Cơ bản – *Level 1 – Basic*

Bài 1.1 / Problem 1.1 – Viết tập hợp các số tự nhiên lẻ lớn hơn 10 và nhỏ hơn 24. Tập hợp có bao nhiêu phần tử? Tính tổng các phần tử.

Write the set of odd natural numbers greater than 10 and less than 24. How many elements does it have? Find their sum.

Bài 1.2 / Problem 1.2 – Tính $2^5 \cdot 3 - [(45 - 3^2 \cdot 4) : 3 + 7]$.

Calculate $2^5 \cdot 3 - [(45 - 3^2 \cdot 4) \div 3 + 7]$.

Bài 1.3 / Problem 1.3 – Tìm chữ số a để số $5a4$ chia hết cho 9.

Find the digit a such that the number $5a4$ is divisible by 9.

Bài 1.4 / Problem 1.4 – Phân tích 540 và 630 ra thừa số nguyên tố, rồi tìm ƯCLN và BCNN của hai số.

Factorise 540 and 630 into primes, then find their HCF and LCM.

Bài 1.5 / Problem 1.5 – Tính $(-15) + 28 - (-7) - 22$.

Calculate $(-15) + 28 - (-7) - 22$.

Bài 1.6 / Problem 1.6 – Một mảnh vườn hình chữ nhật dài 72 m, rộng 54 m được chia thành các ô vuông bằng nhau, không thừa. Tìm độ dài cạnh lớn nhất của ô vuông và số ô.

A rectangular plot 72 m long and 54 m wide is divided into equal squares with nothing left over. Find the largest side of a square and the number of squares.

Mức 2 – Vận dụng – *Level 2 – Applied*

Bài 1.7 / Problem 1.7 – Tìm số tự nhiên x biết $2^{x+1} + 2^x = 96$.

Find the natural number x such that $2^{x+1} + 2^x = 96$.

Bài 1.8 / Problem 1.8 – Một nhóm học sinh khi xếp hàng 4, hàng 5 hoặc hàng 6 đều dư 1 em, còn xếp hàng 7 thì vừa đủ. Biết số học sinh nhỏ hơn 400. Tìm số học sinh.

A group of students has 1 left over when lined up in rows of 4, 5 or 6, but fits exactly in rows of 7. The number is less than 400. Find it.

Bài 1.9 / Problem 1.9 – Tìm tất cả số nguyên x để $B = (3x + 10)/(x + 1)$ là số nguyên.

Find all integers x for which $B = (3x + 10)/(x + 1)$ is an integer.

Bài 1.10 / Problem 1.10 – Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $xy - 2x + y = 5$.

Find the integers x, y satisfying $xy - 2x + y = 5$.

Bài 1.11 / Problem 1.11 – Tìm hai số tự nhiên $a < b$ biết $\text{ƯCLN}(a; b) = 12$ và $a + b = 120$.

Find natural numbers $a < b$ with $\text{HCF}(a; b) = 12$ and $a + b = 120$.

Mức 3 – Nâng cao, thi chuyên – Level 3 – Advanced, specialist-school entrance

Bài 1.12 / Problem 1.12 – Chứng minh $n^5 - n$ chia hết cho 30 với mọi số nguyên n .

Prove that $n^5 - n$ is divisible by 30 for every integer n .

Bài 1.13 / Problem 1.13 – Tìm tất cả số tự nhiên n để $n^2 + 12$ là số chính phương.

Find all natural numbers n such that $n^2 + 12$ is a square number.

Bài 1.14 / Problem 1.14 – Chứng minh không có số nguyên x, y nào thỏa mãn $x^2 - y^2 = 2026$.

Prove that there are no integers x, y with $x^2 - y^2 = 2026$.

Bài 1.15 / Problem 1.15 – Tìm tất cả số nguyên dương n để $n^2 + 11$ chia hết cho $n + 3$.

Find all positive integers n such that $n^2 + 11$ is divisible by $n + 3$.

1.10. Lời giải bài tự luyện – Solutions to practice problems

Bài 1.1 – Problem 1.1

1. Số lẻ đầu tiên lớn hơn 10 là 11, số lẻ lớn nhất nhỏ hơn 24 là 23. Tập hợp là $\{11; 13; 15; 17; 19; 21; 23\}$.

The first odd number above 10 is 11 and the largest less than 24 is 23. The set is $\{11; 13; 15; 17; 19; 21; 23\}$.

2. Số phần tử: $(23 - 11) : 2 + 1 = 7$.

Number of elements: $(23 - 11) \div 2 + 1 = 7$.

3. Tổng: $(11 + 23) \cdot 7 : 2 = 119$.

Sum: $(11 + 23) \cdot 7 \div 2 = 119$.

Vậy tập hợp có 7 phần tử, tổng bằng 119.

So the set has 7 elements and the sum is 119. ■

Bài 1.2 – Problem 1.2

1. Trong ngoặc tròn: $3^2 \cdot 4 = 36$, rồi $45 - 36 = 9$.

Round brackets: $3^2 \cdot 4 = 36$, then $45 - 36 = 9$.

2. Ngoặc vuông: $9 : 3 + 7 = 3 + 7 = 10$.

Square brackets: $9 \div 3 + 7 = 3 + 7 = 10$.

3. $2^5 \cdot 3 = 32 \cdot 3 = 96$, rồi $96 - 10 = 86$.

$2^5 \cdot 3 = 32 \cdot 3 = 96$, then $96 - 10 = 86$.

Vậy giá trị biểu thức là 86.

So the value is 86. ■

Bài 1.3 – Problem 1.3

1. a là chữ số từ 0 đến 9. Tổng chữ số: $5 + a + 4 = 9 + a$, phải chia hết cho 9.
 a is a digit from 0 to 9. The digit sum $5 + a + 4 = 9 + a$ must be divisible by 9.
2. $9 + a : 9$ nên $a : 9$, mà $0 \leq a \leq 9$ nên $a = 0$ hoặc $a = 9$.
 $9 + a : 9$ gives $a : 9$, and with $0 \leq a \leq 9$ we get $a = 0$ or $a = 9$.
3. Kiểm lại: $504 : 9 = 56$ và $594 : 9 = 66$.
Check: $504 \div 9 = 56$ and $594 \div 9 = 66$.

Vậy $a = 0$ (số 504) hoặc $a = 9$ (số 594).

So $a = 0$ (the number 504) or $a = 9$ (the number 594). ■

Bài 1.4 – Problem 1.4

1. $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ và $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.
 $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ and $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.
2. ƯCLN: thừa số chung 2, 3, 5 với số mũ nhỏ nhất 1, 2, 1: $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$.
HCF: common primes 2, 3, 5 with smallest exponents 1, 2, 1: $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$.
3. BCNN: 2, 3, 5, 7 với số mũ lớn nhất 2, 3, 1, 1: $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3.780$.
LCM: 2, 3, 5, 7 with largest exponents 2, 3, 1, 1: $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3.780$.
4. Kiểm lại: $90 \cdot 3.780 = 340.200 = 540 \cdot 630$.
Check: $90 \cdot 3.780 = 340.200 = 540 \cdot 630$.

Vậy ƯCLN = 90 và BCNN = 3.780.

So HCF = 90 and LCM = 3,780. ■

Bài 1.5 – Problem 1.5

1. Bỏ ngoặc: $-15 + 28 + 7 - 22$.
Remove brackets: $-15 + 28 + 7 - 22$.
2. $-15 + 28 = 13$; $13 + 7 = 20$; $20 - 22 = -2$.
 $-15 + 28 = 13$; $13 + 7 = 20$; $20 - 22 = -2$.

Vậy giá trị bằng -2 .

So the value is -2 . ■

Bài 1.6 – Problem 1.6

1. Cạnh ô vuông là ước chung của 72 và 54. Lớn nhất nên bằng ƯCLN(72; 54).
The side is a common factor of 72 and 54. Largest, so it equals HCF(72; 54).
2. $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $54 = 2 \cdot 3^3$; ƯCLN = $2 \cdot 3^2 = 18$.
 $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $54 = 2 \cdot 3^3$; HCF = $2 \cdot 3^2 = 18$.
3. Số ô: $(72 : 18) \cdot (54 : 18) = 4 \cdot 3 = 12$.
Number of squares: $(72 \div 18) \cdot (54 \div 18) = 4 \cdot 3 = 12$.

Vậy cạnh ô vuông lớn nhất là 18 m, được 12 ô.

So the largest side is 18 m, giving 12 squares. ■

Bài 1.7 – Problem 1.7

1. $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$ nên $2^x \cdot 2 + 2^x = 2^x \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 2^x$.

$2^{x+1} = 2^x \cdot 2$, so $2^x \cdot 2 + 2^x = 2^x \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 2^x$.

2. $3 \cdot 2^x = 96$ nên $2^x = 32 = 2^5$, suy ra $x = 5$.

$3 \cdot 2^x = 96$, so $2^x = 32 = 2^5$, giving $x = 5$.

3. Kiểm lại: $2^6 + 2^5 = 64 + 32 = 96$.

Check: $2^6 + 2^5 = 64 + 32 = 96$.

Vậy $x = 5$.

So $x = 5$. ■

Bài 1.8 – Problem 1.8

1. Gọi n là số học sinh. $n - 1$ chia hết cho 4, 5, 6 nên là bội của $\text{BCNN}(4; 5; 6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Let n be the number. $n - 1$ is divisible by 4, 5, 6, so it is a multiple of $\text{LCM}(4; 5; 6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

2. $n < 400$ nên $n \in \{61; 121; 181; 241; 301; 361\}$ ($n = 60k + 1$, $k = 1$ đến 6; $k = 0$ cho $n = 1$ không hợp lý).

$n < 400$ so $n \in \{61; 121; 181; 241; 301; 361\}$ ($n = 60k + 1$, $k = 1$ to 6; $k = 0$ gives $n = 1$, not sensible).

3. Chọn số chia hết cho 7: $61 = 7 \cdot 8 + 5$; $121 = 7 \cdot 17 + 2$; $181 = 7 \cdot 25 + 6$; $241 = 7 \cdot 34 + 3$; $301 = 7 \cdot 43$; $361 = 7 \cdot 51 + 4$.

Pick the one divisible by 7: $61 = 7 \cdot 8 + 5$; $121 = 7 \cdot 17 + 2$; $181 = 7 \cdot 25 + 6$; $241 = 7 \cdot 34 + 3$; $301 = 7 \cdot 43$; $361 = 7 \cdot 51 + 4$.

Vậy có 301 học sinh.

So there are 301 students. ■

Bài 1.9 – Problem 1.9

1. Điều kiện $x \neq -1$. $3x + 10 = 3(x + 1) + 7$ nên $B = 3 + 7/(x + 1)$.

Condition $x \neq -1$. $3x + 10 = 3(x + 1) + 7$, so $B = 3 + 7/(x + 1)$.

2. B nguyên khi $x + 1$ là ước của 7: $x + 1 \in \{1; -1; 7; -7\}$, suy ra $x \in \{0; -2; 6; -8\}$.

B is an integer when $x + 1$ is a factor of 7: $x + 1 \in \{1; -1; 7; -7\}$, so $x \in \{0; -2; 6; -8\}$.

3. Kiểm lại: $x = 0$ cho $B = 10$; $x = -2$ cho $B = -4$; $x = 6$ cho $B = 4$; $x = -8$ cho $B = 2$.

Check: $x = 0$ gives $B = 10$; $x = -2$ gives $B = -4$; $x = 6$ gives $B = 4$; $x = -8$ gives $B = 2$.

Vậy $x \in \{-8; -2; 0; 6\}$.

So $x \in \{-8; -2; 0; 6\}$. ■

Bài 1.10 – Problem 1.10

1. Nhóm hạng tử: $xy + y - 2x = y(x + 1) - 2(x + 1) + 2$, nên phương trình thành $(x + 1)(y - 2) + 2 = 5$, tức $(x + 1)(y - 2) = 3$.

Group terms: $xy + y - 2x = y(x + 1) - 2(x + 1) + 2$, so the equation becomes $(x + 1)(y - 2) + 2 = 5$, that is $(x + 1)(y - 2) = 3$.

2. $U(3) = \{1; -1; 3; -3\}$. Lập các trường hợp cho $(x + 1; y - 2)$:

The factors of 3 are 1, -1, 3, -3. Cases for $(x + 1; y - 2)$:

- $(1; 3)$: $x = 0, y = 5$. $(3; 1)$: $x = 2, y = 3$.
 $(1; 3)$: $x = 0, y = 5$. $(3; 1)$: $x = 2, y = 3$.
- $(-1; -3)$: $x = -2, y = -1$. $(-3; -1)$: $x = -4, y = 1$.
 $(-1; -3)$: $x = -2, y = -1$. $(-3; -1)$: $x = -4, y = 1$.

Vậy $(x; y) \in \{(0; 5), (2; 3), (-2; -1), (-4; 1)\}$.

So $(x; y) \in \{(0; 5), (2; 3), (-2; -1), (-4; 1)\}$. ■

Bài 1.11 – Problem 1.11

1. Đặt $a = 12m, b = 12n$ với $UCLN(m; n) = 1$ và $m < n$. Từ $a + b = 120$ suy ra $12(m + n) = 120$, tức $m + n = 10$.

Put $a = 12m, b = 12n$ with $HCF(m; n) = 1$ and $m < n$. From $a + b = 120$ we get $12(m + n) = 120$, so $m + n = 10$.

2. Các cặp $(m; n)$ với $m < n, m + n = 10$: $(1; 9), (2; 8), (3; 7), (4; 6)$. Loại $(2; 8)$ và $(4; 6)$ vì $UCLN$ bằng 2.

Pairs $(m; n)$ with $m < n, m + n = 10$: $(1; 9), (2; 8), (3; 7), (4; 6)$. Reject $(2; 8)$ and $(4; 6)$ since the HCF is 2.

3. Còn $(1; 9)$ cho $(a; b) = (12; 108)$ và $(3; 7)$ cho $(a; b) = (36; 84)$.

$(1; 9)$ gives $(a; b) = (12; 108)$ and $(3; 7)$ gives $(a; b) = (36; 84)$.

Vậy $(a; b) = (12; 108)$ hoặc $(36; 84)$.

So $(a; b) = (12; 108)$ or $(36; 84)$. ■

Bài 1.12 – Problem 1.12

1. Phân tích: $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1)$.

Factorise: $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1)$.

2. Ba số nguyên liên tiếp $n - 1, n, n + 1$ có một số chẵn và một số chia hết cho 3, nên tích chia hết cho 2 và 3.

Among the three consecutive integers $n - 1, n, n + 1$ one is even and one is divisible by 3, so the product is divisible by 2 and 3.

3. Chia hết cho 5: xét n chia 5 dư 0, $\pm 1, \pm 2$. Dư 0: $n : 5$. Dư 1: $n - 1 : 5$. Dư -1: $n + 1 : 5$. Dư ± 2 : $n^2 + 1$ chia 5 dư $4 + 1 = 5$, chia hết cho 5, nên $n^2 + 1 : 5$.

Divisible by 5: take n with remainder 0, $\pm 1, \pm 2$ on division by 5. Remainder 0: $n : 5$.

Remainder 1: $n - 1 : 5$. Remainder -1: $n + 1 : 5$. Remainder ± 2 : $n^2 + 1$ has remainder $4 + 1 = 5$, divisible by 5, so $n^2 + 1 : 5$.

4. 2, 3, 5 đôi một nguyên tố cùng nhau nên tích chia hết cho $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

2, 3, 5 are pairwise coprime, so the product is divisible by $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Vậy $n^5 - n$ chia hết cho 30 với mọi số nguyên n .

So $n^5 - n$ is divisible by 30 for every integer n . ■

Bài 1.13 – Problem 1.13

1. Đặt $n^2 + 12 = m^2$ với $m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Suy ra $(m - n)(m + n) = 12$.
Put $n^2 + 12 = m^2$ with $m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Then $(m - n)(m + n) = 12$.
2. $m - n$ và $m + n$ cùng tính chẵn lẻ (hiệu của chúng $2n$ là số chẵn) và tích 12 chẵn, nên cả hai cùng chẵn.
 $m - n$ and $m + n$ have the same parity (their difference $2n$ is even) and the product 12 is even, so both are even.
3. $12 = 2 \cdot 6$ là cách duy nhất viết thành tích hai số chẵn với $m - n < m + n$. Suy ra $m - n = 2$, $m + n = 6$, nên $m = 4$, $n = 2$.
 $12 = 2 \cdot 6$ is the only way to write 12 as a product of two even numbers with $m - n < m + n$. So $m - n = 2$, $m + n = 6$, giving $m = 4$, $n = 2$.
4. Kiểm lại: $2^2 + 12 = 16 = 4^2$.
Check: $2^2 + 12 = 16 = 4^2$.

Vậy $n = 2$.

So $n = 2$. ■

Bài 1.14 – Problem 1.14

1. Giả sử có x, y . Khi đó $(x - y)(x + y) = 2026$. Hai thừa số $x - y$ và $x + y$ cùng tính chẵn lẻ (hiệu của chúng bằng $2y$ là số chẵn).
Suppose such x, y exist. Then $(x - y)(x + y) = 2026$. The two factors $x - y$ and $x + y$ have the same parity (their difference $2y$ is even).
2. Nếu cùng lẻ thì tích lẻ, mà 2026 chẵn: loại.
If both are odd the product is odd, but 2026 is even: impossible.
3. Nếu cùng chẵn thì tích chia hết cho 4, mà $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ không chia hết cho 4: loại.
If both are even the product is divisible by 4, but $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ is not: impossible.

Vậy không có số nguyên x, y nào thỏa mãn.

So no integers x, y satisfy the equation. ■

Bài 1.15 – Problem 1.15

1. Ta có $n^2 + 11 = (n + 3)(n - 3) + 20$.
We have $n^2 + 11 = (n + 3)(n - 3) + 20$.
2. $n^2 + 11$ chia hết cho $n + 3$ khi và chỉ khi 20 chia hết cho $n + 3$.
 $n^2 + 11$ is divisible by $n + 3$ if and only if 20 is divisible by $n + 3$.
3. $n \geq 1$ nên $n + 3 \geq 4$. Ước của 20 từ 4 trở lên: 4, 5, 10, 20. Suy ra $n \in \{1; 2; 7; 17\}$.
 $n \geq 1$ so $n + 3 \geq 4$. Factors of 20 that are at least 4: 4, 5, 10, 20. So $n \in \{1; 2; 7; 17\}$.
4. Kiểm lại: $12 : 4 = 3$; $15 : 5 = 3$; $60 : 10 = 6$; $300 : 20 = 15$.
Check: $12 \div 4 = 3$; $15 \div 5 = 3$; $60 \div 10 = 6$; $300 \div 20 = 15$.

Vậy $n \in \{1; 2; 7; 17\}$.

So $n \in \{1; 2; 7; 17\}$. ■

Chương 2. Phân số, số thập phân, số hữu tỉ, số thực và tỉ lệ – Chapter 2. Fractions, decimals, rationals, reals and proportion

Sau chương này em làm được – *What you will be able to do*

- Rút gọn, quy đồng, so sánh phân số và làm đúng bốn phép tính với phân số, số thập phân, số hữu tỉ.
Simplify, put over a common denominator, compare fractions and carry out the four operations on fractions, decimals and rationals.
- Giải bài toán phần trăm: giảm giá, tăng giá, tỉ số phần trăm, làm tròn theo yêu cầu đề.
Solve percentage problems: discounts, price rises, percentage ratios, rounding as the question asks.
- Phân biệt số hữu tỉ, số vô tỉ, số thực; dùng căn bậc hai số học và giá trị tuyệt đối đúng chỗ.
Tell rational, irrational and real numbers apart; use the square root and the absolute value correctly.
- Dùng tỉ lệ thức, dãy tỉ số bằng nhau, đại lượng tỉ lệ thuận và tỉ lệ nghịch để chia và tính.
Use proportions, chains of equal ratios, direct and inverse proportion to share and calculate.
- Tính tổng dãy phân số bằng cách tách hiệu, so sánh hai lũy thừa lớn.
Sum a series of fractions by splitting each term, and compare two large powers.

Kiến thức của chương ít khi thành một câu riêng trong đề tuyển sinh. Nó nằm làm bước tính bên trong câu toán thực tế, câu rút gọn và câu đọc biểu đồ, nên tính sai ở đây kéo theo mất điểm cả câu lớn.

This material is rarely a question on its own in entrance exams. It is the calculation step inside a real-life problem, a simplification question or a chart question, so a slip here costs marks across the whole question.

Dạng Type	Hay gặp ở Where it appears	Mức Level
Phần trăm, giá niêm yết, giảm giá <i>Percentages, list price, discounts</i>	Thường là ý đầu câu toán thực tế; có ở 15/18 đề <i>Usually the first part of the real-life question; in 15 of 18 papers</i>	Dễ <i>Easy</i>
Đọc tỉ lệ phần trăm trên biểu đồ <i>Reading percentages on a chart</i>	Câu thống kê (17/18 đề) <i>Statistics question (17 of 18 papers)</i>	Dễ <i>Easy</i>
Phân số, số thập phân, làm tròn <i>Fractions, decimals, rounding</i>	Bước tính trong mọi câu; đề trắc nghiệm hỏi trực tiếp <i>A step in every question; multiple-choice papers ask it directly</i>	Dễ <i>Easy</i>

Dạng Type	Hay gặp ở Where it appears	Mức Level
Tỉ lệ thuận, tỉ lệ nghịch, chia theo tỉ lệ <i>Direct and inverse proportion, sharing in a ratio</i>	Toán thực tế và lập phương trình <i>Real-life and word problems</i>	Trung bình <i>Medium</i>
Căn bậc hai số học, so sánh số thực <i>Square roots, comparing reals</i>	Câu rút gọn (16/18 đề) và câu so sánh <i>Simplification question (16 of 18 papers) and comparison</i>	Trung bình <i>Medium</i>
Tổng dãy phân số, so sánh lũy thừa, giá trị tuyệt đối nhỏ nhất <i>Fraction series, comparing powers, minimum of absolute values</i>	Đề chuyên Toán; câu cuối đề không chuyên <i>Specialist papers; last question of ordinary papers</i>	Khó <i>Hard</i>

2.1. Phân số: bằng nhau, rút gọn, so sánh, hỗn số – 2.1. Fractions: equal, simplify, compare, mixed numbers

Phân số là cách ghi một phần của một đơn vị. Muốn có $\frac{3}{4}$ cái bánh, em chia cái bánh làm 4 phần bằng nhau rồi lấy 3 phần. Số 3 đứng trên gọi là tử số. Số 4 đứng dưới gọi là mẫu số. Mẫu số cho biết chia mấy phần, tử số cho biết lấy mấy phần.

A fraction writes part of one whole. To get $\frac{3}{4}$ of a cake, cut the cake into 4 equal parts and take 3. The 3 on top is the numerator. The 4 under it is the denominator. The denominator says how many parts, the numerator says how many are taken.

ĐỊNH NGHĨA 2.1 (Phân số) / DEFINITION 2.1 (Fraction) – Phân số là biểu thức $\frac{a}{b}$, trong đó a và b là số nguyên và $b \neq 0$. Mẫu b không bao giờ bằng 0. Ví dụ: $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{7}$, $\frac{6}{(-8)}$.
A fraction is an expression $\frac{a}{b}$ where a and b are integers and $b \neq 0$. The denominator is never 0. Examples: $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{7}$, $\frac{6}{(-8)}$.

Hai phân số bằng nhau khi chúng chỉ cùng một phần của đơn vị. Chia cái bánh làm 2 phần lấy 1 phần, hay làm 4 phần lấy 2 phần, em đều được nửa cái bánh. Vậy $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Two fractions are equal when they show the same part of a whole. Cut a cake into 2 parts and take 1, or into 4 parts and take 2: you get half a cake either way. So $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

TÍNH CHẤT 2.2 (Tính chất cơ bản của phân số) / PROPERTY 2.2 (Fundamental property of fractions) – Nhân (hoặc chia) cả tử và mẫu của một phân số cho cùng một số nguyên khác 0 thì được phân số bằng nó: $\frac{a}{b} = \frac{(a \cdot m)}{(b \cdot m)}$ và $\frac{a}{b} = \frac{(a : n)}{(b : n)}$ với n là ước chung của a và b . Ví dụ: $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ và $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.
Multiply or divide both numerator and denominator by the same non-zero integer and you get an equal fraction: $\frac{a}{b} = \frac{(a \cdot m)}{(b \cdot m)}$ and $\frac{a}{b} = \frac{(a : n)}{(b : n)}$ when n divides both a and b . Examples: $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ and $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad (b \neq 0, d \neq 0) \quad (2.1)$$

Công thức (2.1) là cách nhanh nhất để kiểm hai phân số có bằng nhau không. Ví dụ $6/9$ và $10/15$: $6 \cdot 15 = 90$ và $9 \cdot 10 = 90$, hai tích bằng nhau nên $6/9 = 10/15$.

Formula (2.1) is the quickest way to test whether two fractions are equal. For $6/9$ and $10/15$: $6 \cdot 15 = 90$ and $9 \cdot 10 = 90$, so $6/9 = 10/15$.

Dạng 1. Rút gọn phân số – Type 1. Simplifying a fraction

Rút gọn là chia tử và mẫu cho cùng một số để được phân số đơn giản hơn. Phân số tối giản là phân số mà tử và mẫu không còn ước chung nào lớn hơn 1. Đề cho phân số lớn, yêu cầu viết về dạng tối giản. ƯCLN là ước chung lớn nhất, em đã học ở Chương 1 (mục 1.4).

To simplify is to divide numerator and denominator by the same number to get a simpler fraction. A fraction is in lowest terms when numerator and denominator share no common divisor above 1. The exam gives a large fraction and asks for lowest terms. HCF is the highest common factor from Chapter 1 (section 1.4).

1. Phân tích tử và mẫu ra thừa số nguyên tố, hoặc tìm ƯCLN của chúng.

Factorise numerator and denominator into primes, or find their HCF.

2. Chia cả tử và mẫu cho ƯCLN vừa tìm.

Divide both numerator and denominator by that HCF.

3. Kiểm lại: ƯCLN của tử và mẫu mới phải bằng 1. Nếu mẫu âm, đổi dấu cả tử và mẫu để mẫu dương.

Check: the new numerator and denominator must have HCF 1. If the denominator is negative, flip both signs.

VÍ DỤ 2.1 (rút gọn) / EXAMPLE 2.1 (simplify) – Rút gọn phân số $168/252$.
Simplify $168/252$.

Lời giải. / Solution.

1. Phân tích: $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ và $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Lấy mỗi số nguyên tố với số mũ nhỏ nhất:
 $\text{ƯCLN} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

Factorise: $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ and $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Take each prime to its smaller power: $\text{HCF} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

2. Chia cả hai số cho 84: $168 : 84 = 2$ và $252 : 84 = 3$.

Divide both by 84: $168 : 84 = 2$ and $252 : 84 = 3$.

3. $\text{ƯCLN}(2, 3) = 1$ nên phân số đã tối giản.

$\text{HCF}(2, 3) = 1$, so the fraction is in lowest terms.

Vậy $168/252 = 2/3$.

So $168/252 = 2/3$. ■

Dạng 2. So sánh và sắp xếp phân số – Type 2. Comparing and ordering fractions

Hai phân số cùng mẫu dương thì phân số nào có tử lớn hơn là lớn hơn. Hai phân số khác mẫu thì phải quy đồng trước. Quy đồng là đưa các phân số về cùng một mẫu, thường là

BCNN của các mẫu. Với phân số âm: số âm luôn nhỏ hơn số dương, và trong hai số âm thì số có giá trị tuyệt đối lớn hơn lại nhỏ hơn. Ví dụ $-3/4 < -2/3$ vì $9/12 > 8/12$.

With the same positive denominator, the larger numerator gives the larger fraction. With different denominators, put them over a common denominator first, usually the LCM of the denominators. Negative fractions: a negative number is below any positive one, and of two negatives the one with larger absolute value is smaller. For example $-3/4 < -2/3$ because $9/12 > 8/12$.

1. Đưa mọi mẫu về mẫu dương. Tìm BCNN của các mẫu.

Make every denominator positive. Find the LCM of the denominators.

2. Với mỗi phân số, lấy BCNN chia cho mẫu của nó được thừa số phụ, rồi nhân cả tử và mẫu với thừa số phụ.

For each fraction divide the LCM by its denominator to get a multiplier, then multiply numerator and denominator by it.

3. So sánh các tử và viết kết quả theo thứ tự đề yêu cầu.

Compare the numerators and write the result in the order asked.

VÍ DỤ 2.2 (so sánh) / EXAMPLE 2.2 (compare) – Sắp xếp các phân số $3/4$, $5/6$, $7/9$, $2/3$ theo thứ tự tăng dần.

Arrange $3/4$, $5/6$, $7/9$, $2/3$ in increasing order.

Lời giải. / Solution.

1. Các mẫu là 4, 6, 9, 3. BCNN(4, 6, 9, 3) = 36.

The denominators are 4, 6, 9, 3. LCM(4, 6, 9, 3) = 36.

2. Quy đồng: $3/4 = 27/36$; $5/6 = 30/36$; $7/9 = 28/36$; $2/3 = 24/36$.

Common denominator: $3/4 = 27/36$; $5/6 = 30/36$; $7/9 = 28/36$; $2/3 = 24/36$.

3. So sánh tử: $24 < 27 < 28 < 30$.

Compare numerators: $24 < 27 < 28 < 30$.

Vậy $2/3 < 3/4 < 7/9 < 5/6$.

So $2/3 < 3/4 < 7/9 < 5/6$. ■



Hình 2.1. Bốn phân số của Ví dụ 2.2 trên trục số: càng sang phải càng lớn

Figure 2.1. The four fractions of Example 2.2 on a number line: further right means larger

Hình 2.1 cho thấy $3/4$ và $7/9$ đứng sát nhau. Hai phân số gần nhau là chỗ dễ nhầm nhất, nên luôn quy đồng chứ không đoán bằng mắt.

Figure 2.1 shows $3/4$ and $7/9$ very close. Close fractions are where mistakes happen, so always put them over a common denominator rather than guess by eye.

Hỗn số – *Mixed numbers*

Hỗn số là số gồm phần nguyên và phần phân số, như $2\frac{3}{5}$ (đọc là hai và ba phần năm), nghĩa là $2 + \frac{3}{5}$. Đổi hỗn số ra phân số: lấy phần nguyên nhân mẫu rồi cộng tử. Với $2\frac{3}{5}$: $2 \cdot 5 + 3 = 13$, vậy $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$. Đổi ngược lại: 13 chia 5 được 2 dư 3, nên $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$.

A mixed number has a whole part and a fraction part, like $2\frac{3}{5}$ (two and three fifths), meaning $2 + \frac{3}{5}$. To change it into a fraction, multiply the whole part by the denominator and add the numerator. For $2\frac{3}{5}$: $2 \cdot 5 + 3 = 13$, so $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$. In reverse, 13 divided by 5 is 2 remainder 3, so $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$.

Khi tính toán, đổi hỗn số ra phân số rồi mới nhân, chia. Cộng hỗn số riêng phần nguyên và phần phân số dễ sai khi tổng phần phân số lớn hơn 1.

When calculating, change mixed numbers to fractions before multiplying or dividing. Adding the whole and fraction parts separately goes wrong when the fraction parts sum to more than 1.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – Tử có n , mẫu cũng có n . Em tách tử thành một bội của mẫu cộng với một số cố định: $2n + 7 = 2 \cdot (n + 1) + 5$. Khi đó phân số bằng một số nguyên cộng với $\frac{5}{(n + 1)}$. Chỉ còn hỏi khi nào $\frac{5}{(n + 1)}$ là số nguyên, tức $n + 1$ là ước của 5.

The numerator and denominator both contain n . Split the numerator into a multiple of the denominator plus a fixed number: $2n + 7 = 2 \cdot (n + 1) + 5$. The fraction then equals an integer plus $\frac{5}{(n + 1)}$. It only remains to ask when $\frac{5}{(n + 1)}$ is an integer, that is when $n + 1$ divides 5.

VÍ DỤ 2.3 (giá trị nguyên) / EXAMPLE 2.3 (integer value) – Tìm tất cả số nguyên n để phân số $(2n + 7)/(n + 1)$ có giá trị là số nguyên.

Find all integers n for which $(2n + 7)/(n + 1)$ is an integer.

Lời giải. / *Solution.*

1. Điều kiện: $n + 1 \neq 0$, tức $n \neq -1$.

Condition: $n + 1 \neq 0$, that is $n \neq -1$.

2. Tách tử: $(2n + 7)/(n + 1) = (2 \cdot (n + 1) + 5)/(n + 1) = 2 + 5/(n + 1)$.

Split: $(2n + 7)/(n + 1) = (2 \cdot (n + 1) + 5)/(n + 1) = 2 + 5/(n + 1)$.

3. Số 2 là số nguyên nên phân số nguyên khi và chỉ khi $5/(n + 1)$ nguyên, tức $(n + 1)$ là ước của 5.

Since 2 is an integer, the fraction is an integer exactly when $5/(n + 1)$ is, that is when $(n + 1)$ divides 5.

4. Ước của 5 là $-5, -1, 1, 5$. Suy ra $n + 1 \in \{-5, -1, 1, 5\}$, tức $n \in \{-6, -2, 0, 4\}$.

The divisors of 5 are $-5, -1, 1, 5$. So $n + 1 \in \{-5, -1, 1, 5\}$, that is $n \in \{-6, -2, 0, 4\}$.

5. Cả bốn giá trị đều khác -1 . Thử lại: $n = 0$ cho 7; $n = 4$ cho 3; $n = -2$ cho -3 ; $n = -6$ cho 1.

All four differ from -1 . Check: $n = 0$ gives 7; $n = 4$ gives 3; $n = -2$ gives -3 ; $n = -6$ gives 1.

Vậy $n \in \{-6, -2, 0, 4\}$.

So $n \in \{-6, -2, 0, 4\}$. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Rút gọn bằng cách gạch số giống nhau ở tử và mẫu khi chúng đang cộng, như $(2 + 5)/(2 + 7) = 5/7$. Chỉ được chia cho thừa số chung, không chia cho số hạng.

Cancelling equal numbers in numerator and denominator when they are added, as in $(2 + 5)/(2 + 7) = 5/7$. You may cancel common factors only, never terms.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – So sánh hai phân số bằng cách so tử rồi so mẫu riêng. Ví dụ $5/8$ và $3/4$ có $5 > 3$ nhưng $5/8 < 3/4$. Phải quy đồng.

Comparing fractions by comparing numerators and denominators separately. For $5/8$ and $3/4$, $5 > 3$ yet $5/8 < 3/4$. Put them over a common denominator.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $a/b = c/d \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ ($b, d \neq 0$). Phân số tối giản khi ƯCLN(tử, mẫu) = 1.

$a/b = c/d \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ ($b, d \neq 0$). A fraction is in lowest terms when $HCF(\text{numerator}, \text{denominator}) = 1$.

2.2. Bốn phép tính với phân số và hai bài toán về phân số – 2.2. The four operations on fractions and two fraction problems

Cộng và trừ cần cùng mẫu. Nhân và chia thì không cần. Em ghi bốn quy tắc sau và thử với số nhỏ.

Adding and subtracting need a common denominator. Multiplying and dividing do not. Learn the four rules and try each with small numbers.

$$a/b + c/d = (a \cdot d + b \cdot c)/(b \cdot d) \quad a/b - c/d = (a \cdot d - b \cdot c)/(b \cdot d) \quad (2.2)$$

$$(a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c)/(b \cdot d) \quad (a/b) : (c/d) = (a/b) \cdot (d/c) \quad (c \neq 0) \quad (2.3)$$

Ví dụ số nhỏ: $1/2 + 1/3 = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 1)/6 = 5/6$. Và $(2/3) \cdot (3/4) = 6/12 = 1/2$. Và $(1/2) : (1/4) = (1/2) \cdot 4 = 2$.

Small examples: $1/2 + 1/3 = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 1)/6 = 5/6$. And $(2/3) \cdot (3/4) = 6/12 = 1/2$. And $(1/2) : (1/4) = (1/2) \cdot 4 = 2$.

Muốn cộng cho nhanh, quy đồng bằng BCNN của các mẫu thay vì tích các mẫu. Muốn nhân cho nhanh, rút gọn chéo trước khi nhân: chia tử của phân số này và mẫu của phân số kia cho cùng một ước chung, như $(4/9) \cdot (3/8) = (1/3) \cdot (1/2)$ sau khi chia 4 và 8 cho 4, chia 9 và 3 cho 3. Số đối của a/b là $-a/b$. Số nghịch đảo của a/b ($a \neq 0$) là b/a , vì $(a/b) \cdot (b/a) = 1$.

To add quickly, use the LCM of the denominators rather than their product. To multiply quickly, cancel across before multiplying: divide the numerator of one fraction and the denominator of the other by a common factor, as in $(4/9) \cdot (3/8) = (1/3) \cdot (1/2)$ after dividing 4 and 8 by 4, and 9 and 3 by 3. The opposite of a/b is $-a/b$. The reciprocal of a/b ($a \neq 0$) is b/a , since $(a/b) \cdot (b/a) = 1$.

Dạng 3. Tính giá trị biểu thức, tính hợp lí – Type 3. Evaluating an expression, working smartly

Thứ tự: ngoặc trước, rồi nhân chia, rồi cộng trừ. Nếu có thừa số chung, em đặt ra ngoài ngoặc để tính cho gọn.

Order: brackets first, then multiplication and division, then addition and subtraction. If there is a common factor, take it outside a bracket to shorten the work.

1. Nhìn cả biểu thức: có thừa số chung, hay hai phân số cộng lại thành số nguyên không?

Look at the whole expression: is there a common factor, or do two fractions add to a whole number?

2. Nếu có, đặt thừa số chung ra ngoài rồi tính phần trong ngoặc.

If so, take the common factor out and evaluate the bracket.

3. Nếu không, quy đồng theo BCNN rồi cộng trừ, cuối cùng rút gọn.

If not, use the LCM, add and subtract, then simplify.

VÍ DỤ 2.4 (tính hợp lý) / EXAMPLE 2.4 (smart calculation) – Tính $B = (2/7) \cdot (5/9) + (2/7) \cdot (4/9) + 3/7$.

Evaluate $B = (2/7) \cdot (5/9) + (2/7) \cdot (4/9) + 3/7$.

Lời giải. / Solution.

1. Hai số hạng đầu có thừa số chung $2/7$. Đặt ra ngoài: $B = (2/7) \cdot (5/9 + 4/9) + 3/7$.

The first two terms share the factor $2/7$. Take it out: $B = (2/7) \cdot (5/9 + 4/9) + 3/7$.

2. Trong ngoặc: $5/9 + 4/9 = 9/9 = 1$.

In the bracket: $5/9 + 4/9 = 9/9 = 1$.

3. $B = (2/7) \cdot 1 + 3/7 = 2/7 + 3/7 = 5/7$.

$B = (2/7) \cdot 1 + 3/7 = 2/7 + 3/7 = 5/7$.

Vậy $B = 5/7$.

So $B = 5/7$. ■

Dạng 4. Hai bài toán về phân số – Type 4. Two fraction problems

Đề thực tế hay hỏi hai việc. Một: biết cả số, tìm phần của nó. Hai: biết một phần, tìm cả số. Em nhớ hai quy tắc sau và nhận ra việc nào bằng câu hỏi: đề cho "cả" hay cho "phần".

Real-life questions ask one of two things. One: know the whole, find the part. Two: know the part, find the whole. Learn the two rules and decide which applies by asking whether the exam gives the whole or the part.

Phần của số a theo phân số m/n : $a \cdot (m/n)$. Số biết m/n của nó bằng b : $b : (m/n)$. (2.4)

Ví dụ: $2/5$ của 60 là $60 \cdot 2/5 = 24$. Số mà $2/5$ của nó bằng 24 là $24 : 2/5 = 24 \cdot 5/2 = 60$.

For example: $2/5$ of 60 is $60 \cdot 2/5 = 24$. The number whose $2/5$ equals 24 is $24 : 2/5 = 24 \cdot 5/2 = 60$.

1. Gọi cả quyển, cả quãng đường hay cả số cần tìm là 1 đơn vị.

Call the whole book, the whole distance or the whole quantity 1 unit.

2. Với mỗi lần dùng một phần, tính phần đã dùng và phần còn lại, kể từ đầu.

At each stage compute the part used and the part left, starting from the beginning.

3. Tìm phân số của cả số ứng với lượng đề cho bằng số cụ thể, rồi chia lượng đó cho phân số.

Find the fraction of the whole that matches the amount given as a number, then divide the amount by the fraction.

VÍ DỤ 2.5 (hai bài toán về phân số) / EXAMPLE 2.5 (two fraction problems) – Hà đọc một quyển sách trong 3 ngày. Ngày thứ nhất đọc $\frac{2}{5}$ số trang. Ngày thứ hai đọc $\frac{3}{4}$ số trang còn lại. Ngày thứ ba đọc nốt 45 trang. Quyển sách có bao nhiêu trang?

Ha reads a book over 3 days. On day one she reads $\frac{2}{5}$ of the pages. On day two she reads $\frac{3}{4}$ of the pages still left. On day three she reads the last 45 pages. How many pages does the book have?

Lời giải. / Solution.

1. Coi cả quyển là 1. Sau ngày thứ nhất còn lại $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ quyển.
Take the whole book as 1. After day one, $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ of the book is left.
2. Ngày thứ hai đọc $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$ quyển.
On day two she reads $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$ of the book.
3. Còn lại sau hai ngày: $\frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \frac{12}{20} - \frac{9}{20} = \frac{3}{20}$ quyển.
Left after two days: $\frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \frac{12}{20} - \frac{9}{20} = \frac{3}{20}$ of the book.
4. $\frac{3}{20}$ quyển ứng với 45 trang nên cả quyển có $45 : \frac{3}{20} = 45 \cdot \frac{20}{3} = 300$ trang.
 $\frac{3}{20}$ of the book is 45 pages, so the book has $45 : \frac{3}{20} = 45 \cdot \frac{20}{3} = 300$ pages.
5. Thử lại: ngày 1 đọc 120 trang, còn 180; ngày 2 đọc 135 trang, còn 45. Đúng đề.
Check: day 1 reads 120 pages, 180 left; day 2 reads 135, 45 left. Matches the exam.

Vậy quyển sách có 300 trang.

So the book has 300 pages. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Lấy $\frac{3}{4}$ của cả quyển thay vì $\frac{3}{4}$ của phần còn lại. Chữ "còn lại" trong đề đổi cả cái đem nhân.

Taking $\frac{3}{4}$ of the whole book instead of $\frac{3}{4}$ of what is left. The words "what is left" change the quantity you multiply.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chia cho phân số mà quên đảo ngược: $4 : \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$, không phải $4 \cdot \frac{2}{3}$.

Dividing by a fraction without flipping it: $4 : \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$, not $4 \cdot \frac{2}{3}$.

2.3. Số thập phân, làm tròn, tỉ số và tỉ số phần trăm – 2.3. Decimals, rounding, ratios and percentages

Số thập phân là phân số có mẫu 10, 100, 1000... viết gọn: $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$. Phần đứng trước dấu phẩy là phần nguyên, phần sau là phần thập phân. Các chữ số sau dấu phẩy gọi lần lượt là hàng phần mười, phần trăm, phần nghìn. Với 47,2583: chữ số 2 ở hàng phần mười, 5 ở hàng phần trăm, 8 ở hàng phần nghìn.

A decimal is a fraction with denominator 10, 100, 1000... written briefly: $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$. The part before the point is the whole part, the part after is the decimal part. Digits after the

point are tenths, hundredths, thousandths in turn. In 47.2583 the 2 is tenths, the 5 hundredths, the 8 thousandths.

Cộng, trừ số thập phân: đặt dấu phẩy thẳng cột. Nhân: nhân như số nguyên rồi đếm tổng số chữ số sau dấu phẩy của hai thừa số. Chia: dời dấu phẩy của số chia và số bị chia cùng số chữ số để số chia thành số nguyên.

To add or subtract decimals, line up the points. To multiply, multiply as integers and count the total decimal places of the two factors. To divide, move the point of divisor and dividend the same number of places until the divisor is a whole number.

Làm tròn và ước lượng – Rounding and estimating

TÍNH CHẤT 2.3 (Quy tắc làm tròn) / PROPERTY 2.3 (Rounding rule) – Làm tròn đến một hàng: nhìn chữ số ngay bên phải hàng đó. Nếu chữ số ấy nhỏ hơn 5 thì giữ nguyên chữ số ở hàng làm tròn. Nếu từ 5 trở lên thì tăng chữ số ở hàng làm tròn thêm 1. Sau đó bỏ các chữ số bên phải (hoặc thay bằng 0 nếu ở phần nguyên).

To round to a place, look at the digit just to its right. If it is below 5, keep the digit in the rounding place. If it is 5 or more, raise that digit by 1. Then drop the digits to the right (or replace them by 0 in the whole part).

Ví dụ với 47,2583: làm tròn đến hàng phần mười được 47,3 (vì chữ số bên phải là 5). Đến hàng phần trăm được 47,26 (chữ số bên phải là 8). Đến hàng đơn vị được 47. Đến hàng chục được 50.

With 47.2583: to the nearest tenth gives 47.3 (the next digit is 5). To the nearest hundredth gives 47.26 (the next digit is 8). To the nearest unit gives 47. To the nearest ten gives 50.

Ước lượng là làm tròn các số trước khi tính để biết kết quả cỡ bao nhiêu. Ví dụ $48,7 \times 9,8 \approx 50 \times 10 = 500$. Kết quả máy tính ra 477,26 thì hợp lí. Nếu ra 47,726 hay 4.772,6 thì em đã sai dấu phẩy.

To estimate, round the numbers first to see roughly how big the answer is. For example $48.7 \times 9.8 \approx 50 \times 10 = 500$. A calculator answer of 477.26 is sensible. An answer of 47.726 or 4,772.6 means a misplaced point.

Tỉ số và tỉ số phần trăm – Ratios and percentages

Tỉ số của hai đại lượng cùng đơn vị a và b ($b \neq 0$) là $a : b$, tức phân số a/b . Tỉ số phần trăm là tỉ số viết với mẫu 100 và kèm kí hiệu %. Ví dụ 18 em nam trong 40 em, tỉ số nam so với cả lớp là $18/40 = 45/100 = 45\%$.

The ratio of two quantities in the same unit a and b ($b \neq 0$) is $a : b$, the fraction a/b . A percentage is a ratio written over 100 with the sign %. For example 18 boys among 40 pupils: the ratio of boys to the class is $18/40 = 45/100 = 45\%$.

$$\begin{aligned} \text{p\% của } a &= a \cdot p/100 & \text{Tỉ số phần trăm của } a \text{ so với } b &= (a/b) \cdot 100\% & \text{Số} \\ & & \text{biết p\% của nó bằng } c &: c \cdot 100/p & (2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Giá sau khi tăng p\%} &= \text{giá cũ} \cdot (1 + p/100) & \text{Giá sau khi giảm p\%} &= \text{giá cũ} \cdot (1 \\ & & & - p/100) & (2.6) \end{aligned}$$

Dạng 5. Bài toán phần trăm: giảm giá, tăng giá – Type 5. Percentage problems: discounts and price rises

Giá niêm yết là giá ghi trên nhãn trước khi giảm. Điều quyết định là giảm "so với giá nào". Giảm lần hai thường tính trên giá đã giảm lần một, không phải trên giá niêm yết.

The list price is the price on the label before any reduction. What decides the answer is "reduced from which price". A second reduction is usually taken on the price already reduced once, not on the list price.

1. Ghi rõ giá gốc của từng lần tăng hoặc giảm.

Write down the starting price for each rise or fall.

2. Mỗi lần thay giá bằng $\text{giá} \cdot (1 \pm p/100)$ theo công thức (2.6).

Each time replace the price by $\text{price} \cdot (1 \pm p/100)$ using formula (2.6).

3. Muốn biết thay đổi cuối cùng bao nhiêu phần trăm, so giá cuối với giá đầu: $(\text{giá đầu} - \text{giá cuối})/\text{giá đầu} \cdot 100\%$.

To find the overall change in percent, compare the final with the first price: $(\text{first} - \text{final})/\text{first} \cdot 100\%$.

VÍ DỤ 2.6 (giảm giá hai lần) / EXAMPLE 2.6 (two successive discounts) – Một chiếc áo niêm yết 450.000 đồng. Cửa hàng giảm 20%, rồi giảm thêm 10% trên giá đã giảm. Tính giá cuối cùng. Giá đó thấp hơn giá niêm yết bao nhiêu phần trăm?

A shirt has a list price of 450,000 dong. The shop takes off 20%, then a further 10% of the reduced price. Find the final price. By what percentage is it below the list price?

Lời giải. / Solution.

1. Sau lần giảm thứ nhất: $450.000 \cdot (1 - 0,2) = 450.000 \cdot 0,8 = 360.000$ đồng.

After the first reduction: $450,000 \cdot (1 - 0.2) = 450,000 \cdot 0.8 = 360,000$ dong.

2. Sau lần giảm thứ hai, tính trên 360.000: $360.000 \cdot (1 - 0,1) = 324.000$ đồng.

After the second, taken on 360,000: $360,000 \cdot (1 - 0.1) = 324,000$ dong.

3. Số tiền giảm tổng cộng: $450.000 - 324.000 = 126.000$ đồng.

Total reduction: $450,000 - 324,000 = 126,000$ dong.

4. Tỷ số phần trăm: $126.000/450.000 \cdot 100\% = 28\%$.

Percentage: $126,000/450,000 \cdot 100\% = 28\%$.

Vậy giá cuối cùng là 324.000 đồng, thấp hơn giá niêm yết 28% (không phải 30%).

So the final price is 324,000 dong, 28% below the list price (not 30%). ■

VÍ DỤ 2.7 (tăng rồi giảm) / EXAMPLE 2.7 (rise then fall) – Giá gạo tăng 25% so với tháng trước. Hỏi tháng này giá phải giảm bao nhiêu phần trăm để quay về giá của tháng trước?

The price of rice rose by 25% on last month. By what percentage must this month's price fall to return to last month's price?

Lời giải. / Solution.

1. Gọi giá tháng trước là 1 (đơn vị). Giá sau khi tăng là 1,25.

Call last month's price 1 (unit). After the rise it is 1.25.

2. Gọi $x\%$ là mức giảm cần tìm. Phải có $1,25 \cdot (1 - x/100) = 1$.

Let $x\%$ be the fall. We need $1.25 \cdot (1 - x/100) = 1$.

3. Suy ra $1 - x/100 = 1/1,25 = 0,8$, nên $x/100 = 0,2$ và $x = 20$.

So $1 - x/100 = 1/1.25 = 0.8$, hence $x/100 = 0.2$ and $x = 20$.

Vậy phải giảm 20%.

So it must fall by 20%. ■

NHẬN XÉT / REMARK – Tăng $p\%$ rồi giảm đúng $p\%$ không về giá cũ. Giá đổi từ 1 thành $(1 + p/100)(1 - p/100) = 1 - p^2/10.000$, nhỏ hơn 1. Vì lần giảm tính trên giá đã tăng, là số lớn hơn.

A rise of $p\%$ followed by a fall of exactly $p\%$ does not return to the old price. The price goes from 1 to $(1 + p/100)(1 - p/100) = 1 - p^2/10,000$, below 1. The fall is taken on the raised price, which is larger.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Cộng thẳng các phần trăm: giảm 20% rồi 10% không phải giảm 30%. Mỗi lần giảm có giá gốc khác nhau.

Adding percentages directly: 20% then 10% off is not 30% off. Each reduction has a different starting price.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Làm tròn quá sớm. Giữ nguyên số ở các bước giữa, chỉ làm tròn ở đáp số cuối và ghi rõ "làm tròn đến hàng nào".

Rounding too early. Keep the exact numbers in the middle steps, round only the final answer and state the place.

NHẬN XÉT / REMARK – Khi đề cho giá sau giảm và hỏi giá niêm yết, em chia chứ không nhân: giá niêm yết = giá sau giảm : $(1 - p/100)$. Ví dụ giá sau giảm 15% là 170.000 đồng thì niêm yết $170.000 : 0,85 = 200.000$ đồng.

When the exam gives the price after a discount and asks for the list price, divide, do not multiply: list price = discounted price : $(1 - p/100)$. A price of 170,000 dong after 15% off was listed at $170,000 : 0.85 = 200,000$ dong.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Giá sau tăng $p\%$ = giá cũ $\cdot (1 + p/100)$; sau giảm $p\%$ = giá cũ $\cdot (1 - p/100)$. Giảm lần hai tính trên giá đã giảm.

Price after a rise of $p\%$ = old price $\cdot (1 + p/100)$; after a fall of $p\%$ = old price $\cdot (1 - p/100)$. A second fall is taken on the reduced price.

2.4. Số hữu tỉ: lũy thừa, thứ tự phép tính, quy tắc chuyển vế – 2.4. Rational numbers: powers, order of operations, moving terms

Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số a/b với a, b nguyên và $b \neq 0$. Tập hợp các số hữu tỉ kí hiệu là $\mathbb{Q}$. Số nguyên là số hữu tỉ ($5 = 5/1$), số thập phân hữu hạn là số hữu tỉ ($0,75 = 3/4$), hỗn số cũng vậy. Mọi quy tắc cộng, trừ, nhân, chia của mục 2.2 dùng được nguyên vẹn.

A rational number can be written as a fraction a/b with integers a, b and $b \neq 0$. The set of rationals is written $\mathbb{Q}$. Integers are rational ($5 = 5/1$), finite decimals are rational ($0.75 = 3/4$), and so are mixed numbers. Every rule of section 2.2 still applies.

ĐỊNH NGHĨA 2.4 (Lũy thừa với số mũ tự nhiên) / DEFINITION 2.4 (Power with a natural exponent) – Lũy thừa bậc n của số hữu tỉ x (n là số tự nhiên lớn hơn 1) là tích của n thừa số bằng x : $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$. Quy ước $x^1 = x$ và $x^0 = 1$ ($x \neq 0$). Với $x = a/b$ thì $(a/b)^n = a^n/b^n$. Số x gọi là cơ số, n gọi là số mũ.

The power x^n of a rational x (n a natural number above 1) is the product of n factors equal to x : $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$. By convention $x^1 = x$ and $x^0 = 1$ ($x \neq 0$). For $x = a/b$, $(a/b)^n = a^n/b^n$. The number x is the base, n the exponent.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x^m)^n = x^{m \cdot n} \quad (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \quad (2.7)$$

Ví dụ số: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$. $3^5 : 3^2 = 3^3 = 27$. $(2^2)^3 = 2^6 = 64$. Dấu của lũy thừa: số âm mũ chẵn cho kết quả dương, mũ lẻ cho kết quả âm. $(-2)^4 = 16$ nhưng $(-2)^3 = -8$. Cần thận: $-2^4 = -16$ vì dấu trừ không nằm trong lũy thừa.

Numeric examples: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$. $3^5 : 3^2 = 3^3 = 27$. $(2^2)^3 = 2^6 = 64$. Signs: a negative base with even exponent gives a positive result, odd exponent a negative one. $(-2)^4 = 16$ but $(-2)^3 = -8$. Careful: $-2^4 = -16$, since the minus is not inside the power.

Dạng 6. Tính giá trị biểu thức có lũy thừa – Type 6. Evaluating expressions with powers

1. Đánh dấu thứ tự: ngoặc, rồi lũy thừa, rồi nhân chia từ trái sang phải, rồi cộng trừ.

Mark the order: brackets, then powers, then multiplication and division left to right, then addition and subtraction.

2. Tính từng lũy thừa, chú ý dấu của cơ số âm.

Evaluate each power, watching the sign of a negative base.

3. Thực hiện phép nhân chia, rồi quy đồng để cộng trừ. Rút gọn kết quả.

Do the multiplications and divisions, then use a common denominator to add and subtract. Simplify the result.

VÍ DỤ 2.8 (lũy thừa) / EXAMPLE 2.8 (powers) – Tính $B = (-1/2)^3 + (3/4) : (-3/2)^2$.

Evaluate $B = (-1/2)^3 + (3/4) : (-3/2)^2$.

Lời giải. / Solution.

1. Lũy thừa thứ nhất: $(-1/2)^3 = -1/8$ (mũ lẻ nên âm).

First power: $(-1/2)^3 = -1/8$ (odd exponent, so negative).

2. Lũy thừa thứ hai: $(-3/2)^2 = 9/4$ (mũ chẵn nên dương).

Second power: $(-3/2)^2 = 9/4$ (even exponent, so positive).

3. Phép chia: $(3/4) : (9/4) = (3/4) \cdot (4/9) = 12/36 = 1/3$.

Division: $(3/4) : (9/4) = (3/4) \cdot (4/9) = 12/36 = 1/3$.

4. Cộng: $B = -1/8 + 1/3 = -3/24 + 8/24 = 5/24$.

Add: $B = -1/8 + 1/3 = -3/24 + 8/24 = 5/24$.

Vậy $B = 5/24$.

So $B = 5/24$. ■

Quy tắc chuyển vế – *The rule for moving terms*

TÍNH CHẤT 2.5 (Quy tắc chuyển vế) / PROPERTY 2.5 (Moving terms across an equality) – Nếu $a = b$ thì $a + c = b + c$, $a - c = b - c$, và nếu $c \neq 0$ thì $a \cdot c = b \cdot c$, $a : c = b : c$.
Hệ quả: khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, phải đổi dấu số hạng đó. Ví dụ $x - 3 = 5$ thì $x = 5 + 3 = 8$.

If $a = b$ then $a + c = b + c$, $a - c = b - c$, and if $c \neq 0$ then $a \cdot c = b \cdot c$, $a : c = b : c$. Consequence: moving a term from one side of an equality to the other changes its sign. For example $x - 3 = 5$ gives $x = 5 + 3 = 8$.

1. Chuyển các số hạng chứa x về một vế, số hạng tự do về vế kia, nhớ đổi dấu.
Move terms with x to one side and constants to the other, changing signs.
2. Gộp các số hạng cùng loại: cộng các số nhân với x (hệ số của x), cộng các số không chứa x .
Combine like terms: add the numbers multiplying x (the coefficients) and add the plain numbers.
3. Chia hai vế cho số nhân với x . Thế nghiệm vào đề gốc để kiểm.
Divide both sides by the number multiplying x . Substitute the answer into the original to check.

VÍ DỤ 2.9 (chuyển vế) / EXAMPLE 2.9 (moving terms) – Tìm x biết $(2/3)x - 1/4 = 5/6 - (1/2)x$.

Find x if $(2/3)x - 1/4 = 5/6 - (1/2)x$.

Lời giải. / *Solution.*

1. Chuyển $(1/2)x$ sang vế trái và $-1/4$ sang vế phải: $(2/3)x + (1/2)x = 5/6 + 1/4$.
Move $(1/2)x$ to the left and $-1/4$ to the right: $(2/3)x + (1/2)x = 5/6 + 1/4$.
2. Gộp: $(4/6 + 3/6)x = 10/12 + 3/12$, tức $(7/6)x = 13/12$.
Combine: $(4/6 + 3/6)x = 10/12 + 3/12$, that is $(7/6)x = 13/12$.
3. Chia hai vế cho $7/6$: $x = (13/12) \cdot (6/7) = 78/84 = 13/14$.
Divide both sides by $7/6$: $x = (13/12) \cdot (6/7) = 78/84 = 13/14$.
4. Thử: vế trái $(2/3)(13/14) - 1/4 = 13/21 - 1/4 = 31/84$; vế phải $5/6 - 13/28 = 31/84$.
Hai vế bằng nhau.
Check: left side $(2/3)(13/14) - 1/4 = 13/21 - 1/4 = 31/84$; right side $5/6 - 13/28 = 31/84$. The sides agree.

Vậy $x = 13/14$.

So $x = 13/14$. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chuyển vế mà không đổi dấu. Từ $x + 3 = 5$ viết $x = 5 + 3$. Số hạng đổi vế thì đổi dấu.

Moving a term without changing its sign. From $x + 3 = 5$ writing $x = 5 + 3$. A term that changes side changes sign.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết $(-3)^2 = -9$. Cơ sở âm nằm trong ngoặc thì mũ chẵn cho kết quả dương: $(-3)^2 = 9$.

Writing $(-3)^2 = -9$. A negative base inside brackets with an even exponent gives a positive result: $(-3)^2 = 9$.

2.5. Số thập phân vô hạn tuần hoàn, số vô tỉ, số thực, giá trị tuyệt đối – 2.5.

Recurring decimals, irrational numbers, real numbers, absolute value

Chia 1 cho 3 em được 0,3333... Các chữ số lặp mãi. Số thập phân có phần lặp lại vô hạn như vậy gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn. Phần lặp lại gọi là chu kì, viết trong ngoặc: $1/3 = 0,(3)$; $7/11 = 0,(63)$; $1/6 = 0,1(6)$. Số $0,(63)$ có chu kì 63.

Divide 1 by 3 and you get 0.3333... The digits repeat for ever. A decimal with an endless repeating part is a recurring decimal. The repeating part is the period, written in brackets: $1/3 = 0.(3)$; $7/11 = 0.(63)$; $1/6 = 0.1(6)$. The number $0.(63)$ has period 63.

TÍNH CHẤT 2.6 (Số hữu tỉ và số thập phân) / PROPERTY 2.6 (Rationals and decimals)

– Mỗi số hữu tỉ viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn, và ngược lại mỗi số thập phân như vậy là một số hữu tỉ.

Every rational number can be written as a finite or recurring decimal, and conversely every such decimal is rational.

Dạng 7. Đổi số thập phân tuần hoàn ra phân số – Type 7. Writing a recurring decimal as a fraction

1. Đặt x bằng số đã cho.

Let x be the given number.

2. Nhân x với 10^k (k là số chữ số của phần không lặp) và với 10^{k+m} (m là số chữ số của chu kì), sao cho hai số mới có cùng phần lặp sau dấu phẩy.

Multiply x by 10^k (k digits before the period) and by 10^{k+m} (m digits in the period), so that the two new numbers have the same repeating tail.

3. Lấy số lớn trừ số nhỏ để phần lặp mất đi, rồi giải ra x và rút gọn.

Subtract the smaller from the larger so the repeating tail vanishes, then solve for x and simplify.

VÍ DỤ 2.10 (số thập phân tuần hoàn) / EXAMPLE 2.10 (recurring decimal) – Viết $0,(36)$ và $1,2(3)$ dưới dạng phân số tối giản.

Write $0.(36)$ and $1.2(3)$ as fractions in lowest terms.

Lời giải. / Solution.

1. Đặt $x = 0,(36)$. Chu kì có 2 chữ số nên nhân 100: $100x = 36,(36)$.

Let $x = 0.(36)$. The period has 2 digits, so multiply by 100: $100x = 36.(36)$.

2. Trừ: $100x - x = 36$, tức $99x = 36$, suy ra $x = 36/99 = 4/11$.

Subtract: $100x - x = 36$, that is $99x = 36$, so $x = 36/99 = 4/11$.

3. Đặt $y = 1,2(3)$. Nhân 10: $10y = 12,(3)$. Nhân 100: $100y = 123,(3)$.

Let $y = 1.2(3)$. Multiply by 10: $10y = 12.(3)$. Multiply by 100: $100y = 123.(3)$.

4. Trừ: $100y - 10y = 123 - 12 = 111$, tức $90y = 111$, suy ra $y = 111/90 = 37/30$.

Subtract: $100y - 10y = 123 - 12 = 111$, that is $90y = 111$, so $y = 111/90 = 37/30$.

Vậy $0,(36) = 4/11$ và $1,2(3) = 37/30$.

So $0.(36) = 4/11$ and $1.2(3) = 37/30$. ■

Số vô tỉ, căn bậc hai số học, số thực – *Irrational numbers, the square root, real numbers*

Có những số thập phân vô hạn mà các chữ số không lặp theo chu kì nào, như 1,41421356... Đó là số vô tỉ. Số vô tỉ không viết được thành phân số. Số hữu tỉ và số vô tỉ hợp lại thành tập số thực $\mathbb{R}$. Mỗi số thực ứng với đúng một điểm trên trục số.

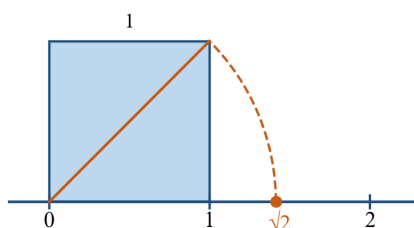
Some endless decimals have digits that never repeat in a period, like 1.41421356... These are irrational numbers. They cannot be written as a fraction. Rationals and irrationals together make the set of real numbers $\mathbb{R}$. Each real number matches exactly one point on the number line.

ĐỊNH NGHĨA 2.7 (Căn bậc hai số học) / DEFINITION 2.7 (Square root) – Căn bậc hai số học của số a không âm, kí hiệu $\sqrt{a}$, là số không âm x thỏa $x^2 = a$. Ví dụ $\sqrt{49} = 7$ vì $7 \geq 0$ và $7^2 = 49$. Số âm không có căn bậc hai. Hai số 7 và -7 đều có bình phương bằng 49, nhưng chỉ 7 là $\sqrt{49}$.

The square root $\sqrt{a}$ of a non-negative number a is the non-negative number x with $x^2 = a$. Example: $\sqrt{49} = 7$ since $7 \geq 0$ and $7^2 = 49$. A negative number has no square root. Both 7 and -7 square to 49, but only 7 is $\sqrt{49}$.

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ. Em dựng được điểm $\sqrt{2}$ trên trục số: vẽ hình vuông cạnh 1 trên đoạn từ 0 đến 1, đường chéo dài $\sqrt{2}$ theo định lí Pythagore ($1^2 + 1^2 = 2$), dùng compa quay đường chéo xuống trục số (Hình 2.2).

$\sqrt{2}$ is irrational. You can mark $\sqrt{2}$ on the number line: draw a square of side 1 on the segment from 0 to 1. Its diagonal has length $\sqrt{2}$ by Pythagoras ($1^2 + 1^2 = 2$). Swing the diagonal down onto the line with a compass (Figure 2.2).



Hình 2.2. Dựng điểm $\sqrt{2}$ trên trục số bằng đường chéo hình vuông cạnh 1

Figure 2.2. Marking $\sqrt{2}$ on the number line with the diagonal of a unit square

So sánh hai số thực có căn: nếu $a, b \geq 0$ thì $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$. Muốn so $\sqrt{50} - 3$ với 4, em chuyển về so $\sqrt{50}$ với 7. Vì $49 < 50$ nên $\sqrt{49} < \sqrt{50}$, tức $7 < \sqrt{50}$.

To compare real numbers with roots: for $a, b \geq 0$, $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$. To compare $\sqrt{50} - 3$ with 4, reduce to $\sqrt{50}$ against 7. Since $49 < 50$, $\sqrt{49} < \sqrt{50}$, that is $7 < \sqrt{50}$.

VÍ DỤ 2.11 (so sánh số thực) / EXAMPLE 2.11 (comparing reals) – So sánh $\sqrt{50} - 3$ với 4.

Compare $\sqrt{50} - 3$ with 4.

Lời giải. / Solution.

1. Chuyển 3 sang về phải: so sánh $\sqrt{50}$ với $4 + 3 = 7$.

Move 3 across: compare $\sqrt{50}$ with $4 + 3 = 7$.

2. Viết $7 = \sqrt{49}$. Vì $49 < 50$ nên $\sqrt{49} < \sqrt{50}$, tức $7 < \sqrt{50}$.

Write $7 = \sqrt{49}$. Since $49 < 50$, $\sqrt{49} < \sqrt{50}$, that is $7 < \sqrt{50}$.

3. Trừ 3 hai vế: $\sqrt{50} - 3 > 7 - 3 = 4$.

Subtract 3 from both sides: $\sqrt{50} - 3 > 7 - 3 = 4$.

Vậy $\sqrt{50} - 3 > 4$.

So $\sqrt{50} - 3 > 4$. ■

Giá trị tuyệt đối – Absolute value

Giá trị tuyệt đối của một số là khoảng cách từ số đó đến 0 trên trục số, nên luôn không âm. Kí hiệu $|x|$. $|5| = 5$ và $|-5| = 5$. Với $x \geq 0$ thì $|x| = x$. Với $x < 0$ thì $|x| = -x$. Ví dụ $|-2/3| = 2/3$. Từ định nghĩa: $|x| = k$ ($k > 0$) có hai nghiệm $x = k$ và $x = -k$.

The absolute value of a number is its distance from 0 on the number line, so it is never negative.

Written $|x|$. $|5| = 5$ and $|-5| = 5$. For $x \geq 0$, $|x| = x$. For $x < 0$, $|x| = -x$. Example: $|-2/3| = 2/3$.

From the definition, $|x| = k$ ($k > 0$) has two solutions $x = k$ and $x = -k$.

TÍNH CHẤT 2.8 (Bất đẳng thức tam giác cho giá trị tuyệt đối) / PROPERTY 2.8

(Triangle inequality for absolute values) – Với mọi số thực a, b : $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a \cdot b \geq 0$ (hai số cùng dấu hoặc một số bằng 0).

For all real a, b : $|a| + |b| \geq |a + b|$. Equality holds if and only if $a \cdot b \geq 0$ (same sign, or one of them 0).

Chứng minh. / Proof.

Hai vế đều không âm nên so bình phương của chúng:

Both sides are non-negative, so compare their squares:

$$(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot |a \cdot b| \quad (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

Vì $|a \cdot b| \geq a \cdot b$ nên $(|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2$, suy ra $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu bằng khi $|a \cdot b| = a \cdot b$, tức $a \cdot b \geq 0$.

Since $|a \cdot b| \geq a \cdot b$, $(|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2$, so $|a| + |b| \geq |a + b|$. Equality when $|a \cdot b| = a \cdot b$, that is $a \cdot b \geq 0$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – Có hai dấu giá trị tuyệt đối, mỗi cái đo khoảng cách từ x tới một điểm: x tới 2 và x tới 5. Tổng hai khoảng cách này nhỏ nhất khi x nằm giữa hai điểm. Muốn viết thành lời giải, em ghép hai biểu thức sao cho x triệt tiêu khi cộng: $(x - 2)$ và $(5 - x)$.

There are two absolute values, each a distance from x to a point: x to 2 and x to 5. The sum of the two

distances is smallest when x lies between the points. To turn this into a proof, pair the expressions so that x cancels when added: $(x - 2)$ and $(5 - x)$.

VÍ DỤ 2.12 (giá trị tuyệt đối nhỏ nhất) / EXAMPLE 2.12 (minimum with absolute values) – Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |x - 2| + |x - 5|$, và các giá trị của x để đạt giá trị đó.
Find the minimum of $A = |x - 2| + |x - 5|$, and the values of x that attain it.

Lời giải. / Solution.

1. Vì $|5 - x| = |x - 5|$ nên $A = |x - 2| + |5 - x|$.
Since $|5 - x| = |x - 5|$, $A = |x - 2| + |5 - x|$.
2. Theo tính chất 2.8: $A \geq |(x - 2) + (5 - x)| = |3| = 3$.
By property 2.8: $A \geq |(x - 2) + (5 - x)| = |3| = 3$.
3. Dấu bằng khi $(x - 2)(5 - x) \geq 0$, tức $2 \leq x \leq 5$.
Equality when $(x - 2)(5 - x) \geq 0$, that is $2 \leq x \leq 5$.
4. Thử $x = 3$: $A = 1 + 2 = 3$. Thử $x = 0$: $A = 2 + 5 = 7 > 3$.
Check $x = 3$: $A = 1 + 2 = 3$. Check $x = 0$: $A = 2 + 5 = 7 > 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 3, đạt khi và chỉ khi $2 \leq x \leq 5$.

So the minimum of A is 3, attained exactly when $2 \leq x \leq 5$. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết $\sqrt{(-9)} = -3$ hoặc $\sqrt{16} = \pm 4$. Căn bậc hai số học luôn không âm: $\sqrt{16} = 4$, và số âm không có căn.
Writing $\sqrt{(-9)} = -3$ or $\sqrt{16} = \pm 4$. The square root is always non-negative: $\sqrt{16} = 4$, and a negative has no root.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết $|x - 3| = 5$ chỉ ra một nghiệm. Phải có hai nghiệm: $x - 3 = 5$ hoặc $x - 3 = -5$, tức $x = 8$ hoặc $x = -2$.
Giving one solution of $|x - 3| = 5$. There are two: $x - 3 = 5$ or $x - 3 = -5$, that is $x = 8$ or $x = -2$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $|x| \geq 0$; $|x| = x$ khi $x \geq 0$ và $|x| = -x$ khi $x < 0$. $\sqrt{a} \geq 0$, $\sqrt{a}$ chỉ có khi $a \geq 0$.
 $|x| \geq 0$; $|x| = x$ when $x \geq 0$ and $|x| = -x$ when $x < 0$. $\sqrt{a} \geq 0$, and $\sqrt{a}$ exists only for $a \geq 0$.

2.6. Tỷ lệ thức, dãy tỉ số bằng nhau, đại lượng tỉ lệ thuận và tỉ lệ nghịch – 2.6. *Proportions, chains of equal ratios, direct and inverse proportion*

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số: $a/b = c/d$. Ví dụ $6/9 = 4/6$. Bốn số a, b, c, d gọi là các số hạng. a và d là ngoại tỉ, b và c là trung tỉ. Tính chất cơ bản: tích ngoại tỉ bằng tích trung tỉ, $a \cdot d = b \cdot c$, chính là công thức (2.1). Dùng nó để tìm số hạng chưa biết.

A proportion is an equality of two ratios: $a/b = c/d$. Example $6/9 = 4/6$. The four numbers a, b, c, d are the terms. a and d are the extremes, b and c the means. Basic property: product of extremes equals product of means, $a \cdot d = b \cdot c$, which is formula (2.1). Use it to find an unknown term.

TÍNH CHẤT 2.9 (Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau) / PROPERTY 2.9 (Property of a chain of equal ratios) – Nếu $a/b = c/d = e/f$ (với các mẫu và $b + d + f$ khác 0) thì mỗi tỉ số đó bằng $(a + c + e)/(b + d + f)$, và cũng bằng $(a - c + e)/(b - d + f)$ khi mẫu khác 0. Ví dụ $2/3 = 4/6 = 6/9 = (2 + 4 + 6)/(3 + 6 + 9) = 12/18 = 2/3$.

If $a/b = c/d = e/f$ (all denominators and $b + d + f$ non-zero) then each ratio equals $(a + c + e)/(b + d + f)$, and also $(a - c + e)/(b - d + f)$ when that denominator is non-zero. Example $2/3 = 4/6 = 6/9 = (2 + 4 + 6)/(3 + 6 + 9) = 12/18 = 2/3$.

Cách viết gọn dãy tỉ số $a/3 = b/5 = c/7$ là $a : b : c = 3 : 5 : 7$. Lúc làm bài, em đặt chung tỉ số đó bằng k . Khi đó $a = 3k$, $b = 5k$, $c = 7k$. Đề cho thêm một điều kiện để tìm k .

The short form of the chain $a/3 = b/5 = c/7$ is $a : b : c = 3 : 5 : 7$. When solving, set the common ratio to k . Then $a = 3k$, $b = 5k$, $c = 7k$. The exam adds one condition to find k .

Dạng 8. Chia một số theo tỉ lệ cho trước – Type 8. Sharing a quantity in a given ratio

1. Viết các số cần tìm theo tỉ số: $a/3 = b/5 = c/7$, đặt giá trị chung là k .

Write the unknowns in the ratio: $a/3 = b/5 = c/7$, call the common value k .

2. Biểu diễn từng số qua k : $a = 3k$, $b = 5k$, $c = 7k$.

Express each unknown through k : $a = 3k$, $b = 5k$, $c = 7k$.

3. Thế vào điều kiện của đề (tổng, hiệu, tích) để tìm k . Rồi tính từng số và thử lại.

Substitute into the exam's condition (sum, difference, product) to find k . Then compute each unknown and check.

VÍ DỤ 2.13 (dãy tỉ số bằng nhau) / EXAMPLE 2.13 (chain of ratios) – Ba số a , b , c tỉ lệ với 3, 5, 7 và $a + b + c = 60$. Tìm a , b , c .

Three numbers a , b , c are in the ratio $3 : 5 : 7$ and $a + b + c = 60$. Find a , b , c .

Lời giải. / Solution.

1. Đặt $a/3 = b/5 = c/7 = k$. Khi đó $a = 3k$, $b = 5k$, $c = 7k$.

Let $a/3 = b/5 = c/7 = k$. Then $a = 3k$, $b = 5k$, $c = 7k$.

2. $a + b + c = 3k + 5k + 7k = 15k = 60$, suy ra $k = 4$.

$a + b + c = 3k + 5k + 7k = 15k = 60$, so $k = 4$.

3. $a = 12$, $b = 20$, $c = 28$.

$a = 12$, $b = 20$, $c = 28$.

4. Thử: $12 + 20 + 28 = 60$ và $12 : 20 : 28 = 3 : 5 : 7$. Đúng.

Check: $12 + 20 + 28 = 60$ and $12 : 20 : 28 = 3 : 5 : 7$. Correct.

Vậy $(a, b, c) = (12, 20, 28)$.

So $(a, b, c) = (12, 20, 28)$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – Số b có mặt trong cả hai tỉ số, nhưng ở hai tỉ số nó ứng với 3 và 4. Phải đổi hai tỉ số sao cho b ứng với cùng một số. BCNN(3, 4) = 12 nên đưa b về 12 phần. Lúc đó cả ba số đã nằm trong một dãy tỉ số.

The number b appears in both ratios, yet it matches 3 in one and 4 in the other. Rewrite both ratios so

that b matches the same number. $LCM(3, 4) = 12$, so use 12 parts for b . All three numbers then lie in a single chain.

VÍ DỤ 2.14 (ghép hai tỉ số) / EXAMPLE 2.14 (combining two ratios) – Cho $a/b = 2/3$, $b/c = 4/5$ và $a + b + c = 140$. Tìm a , b , c .

Given $a/b = 2/3$, $b/c = 4/5$ and $a + b + c = 140$. Find a , b , c .

Lời giải. / Solution.

1. Đưa b về 12 phần: $a/b = 2/3 = 8/12$ nên $a/8 = b/12$. Và $b/c = 4/5 = 12/15$ nên $b/12 = c/15$.

Put b at 12 parts: $a/b = 2/3 = 8/12$ so $a/8 = b/12$. And $b/c = 4/5 = 12/15$ so $b/12 = c/15$.

2. Vậy $a/8 = b/12 = c/15 = (a + b + c)/(8 + 12 + 15) = 140/35 = 4$.

So $a/8 = b/12 = c/15 = (a + b + c)/(8 + 12 + 15) = 140/35 = 4$.

3. $a = 8 \cdot 4 = 32$; $b = 12 \cdot 4 = 48$; $c = 15 \cdot 4 = 60$.

$a = 8 \cdot 4 = 32$; $b = 12 \cdot 4 = 48$; $c = 15 \cdot 4 = 60$.

4. Thử: $32/48 = 2/3$; $48/60 = 4/5$; $32 + 48 + 60 = 140$. Đúng.

Check: $32/48 = 2/3$; $48/60 = 4/5$; $32 + 48 + 60 = 140$. Correct.

Vậy $(a, b, c) = (32, 48, 60)$.

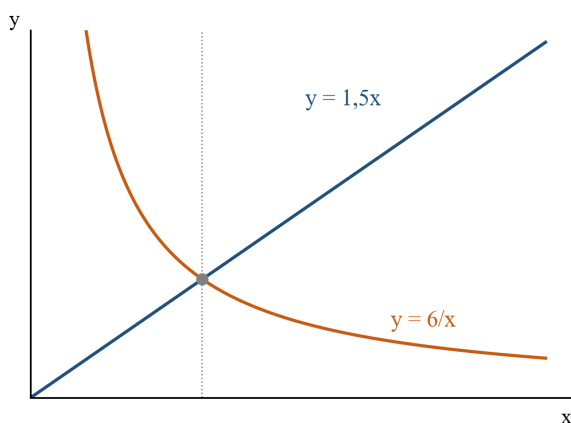
So $(a, b, c) = (32, 48, 60)$. ■

Đại lượng tỉ lệ thuận, tỉ lệ nghịch – Direct and inverse proportion

Hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận khi $y = k \cdot x$ với k là hằng số khác 0. Một đại lượng tăng gấp đôi thì đại lượng kia cũng tăng gấp đôi. Ví dụ số mét vải và số tiền mua vải. Hai đại lượng tỉ lệ nghịch khi $x \cdot y = a$ với a là hằng số khác 0, tức $y = a/x$. Một đại lượng tăng gấp đôi thì đại lượng kia giảm một nửa. Ví dụ số công nhân và số ngày làm xong cùng một việc.

Two quantities x and y are in direct proportion when $y = k \cdot x$ with k a non-zero constant. If one doubles, the other doubles. Example: metres of cloth and the price paid. They are in inverse proportion when $x \cdot y = a$ with a a non-zero constant, that is $y = a/x$. If one doubles, the other halves. Example: workers and days needed for the same job.

Tỉ lệ thuận: $x_1/x_2 = y_1/y_2$ Tỉ lệ nghịch: $x_1/x_2 = y_2/y_1$ (tức $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$)
(2.8)



Hình 2.3. Tỷ lệ thuận $y = 1,5x$ là nửa đường thẳng qua gốc; tỷ lệ nghịch $y = 6/x$ là đường cong đi xuống

Figure 2.3. Direct proportion $y = 1.5x$ is a ray through the origin; inverse proportion $y = 6/x$ is a falling curve

1. Xác định hai đại lượng và xem chúng cùng tăng (thuận) hay một tăng một giảm (nghịch).
Identify the two quantities and decide whether they rise together (direct) or one rises as the other falls (inverse).
2. Lập bảng hai dòng, ghi giá trị đã biết và ẩn.
Make a two-row table with the known values and the unknown.
3. Lập tỷ lệ thức theo (2.8) và giải. Trả lời kèm đơn vị.
Set up the proportion by (2.8) and solve. Answer with the unit.

VÍ DỤ 2.15 (tỷ lệ nghịch) / EXAMPLE 2.15 (inverse proportion) – Mười hai công nhân làm xong một công việc trong 15 ngày. Hỏi 15 công nhân (cùng năng suất) làm xong công việc đó trong bao nhiêu ngày?

Twelve workers finish a job in 15 days. How many days would 15 workers of the same pace need?

Lời giải. / Solution.

1. Nhiều công nhân hơn thì cần ít ngày hơn, nên hai đại lượng tỷ lệ nghịch (tích số người và số ngày không đổi).
More workers means fewer days, so the quantities are in inverse proportion.
2. Gọi x là số ngày cần tìm. Theo (2.8), tích hai đại lượng không đổi: $12 \cdot 15 = 15 \cdot x$.
Let x be the days. By (2.8) the product is constant: $12 \cdot 15 = 15 \cdot x$.
3. Suy ra $x = 12 \cdot 15 / 15 = 12$.
So $x = 12 \cdot 15 / 15 = 12$.
4. Thử: $12 \text{ người} \times 15 \text{ ngày} = 180 \text{ công}$; $15 \text{ người} \times 12 \text{ ngày} = 180 \text{ công}$. Đúng.
Check: $12 \text{ workers} \times 15 \text{ days} = 180 \text{ worker-days}$; $15 \text{ workers} \times 12 \text{ days} = 180$. Correct.

Vậy 15 công nhân làm xong trong 12 ngày.

So 15 workers finish in 12 days. ■

VÍ DỤ 2.16 (chia tỉ lệ nghịch) / EXAMPLE 2.16 (sharing in inverse ratio) – Chia 930 sản phẩm cho ba tổ theo tỉ lệ nghịch với 2, 3, 5. Mỗi tổ nhận bao nhiêu sản phẩm?
Share 930 items among three teams in inverse proportion to 2, 3, 5. How many does each team get?

Lời giải. / Solution.

1. Chia tỉ lệ nghịch với 2, 3, 5 nghĩa là chia tỉ lệ thuận với $1/2, 1/3, 1/5$.
Sharing in inverse proportion to 2, 3, 5 means sharing in direct proportion to $1/2, 1/3, 1/5$.
2. Quy đồng $1/2 : 1/3 : 1/5 = 15/30 : 10/30 : 6/30$, nên tỉ số là $15 : 10 : 6$.
Common denominator: $1/2 : 1/3 : 1/5 = 15/30 : 10/30 : 6/30$, so the ratio is $15 : 10 : 6$.
3. Gọi các phần là $15k, 10k, 6k$. Tổng $31k = 930$, suy ra $k = 30$.
Call the shares $15k, 10k, 6k$. Their sum is $31k = 930$, so $k = 30$.
4. Các tổ nhận $15 \cdot 30 = 450$; $10 \cdot 30 = 300$; $6 \cdot 30 = 180$ sản phẩm. Thử: $450 + 300 + 180 = 930$.
The teams get $15 \cdot 30 = 450$; $10 \cdot 30 = 300$; $6 \cdot 30 = 180$. Check: $450 + 300 + 180 = 930$.

Vậy ba tổ nhận lần lượt 450, 300, 180 sản phẩm.

So the teams get 450, 300 and 180 items respectively. ■

NHẬN XÉT / REMARK – Khi chia tỉ lệ nghịch, tổ có số thứ tự nhỏ nhất nhận nhiều nhất. Đó là cách em kiểm đáp án: tổ ứng với 2 nhận 450, nhiều hơn tổ ứng với 5 nhận 180.

When sharing inversely, the team with the smallest number gets the most. This is a quick check: the team with 2 gets 450, more than the team with 5, which gets 180.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chia theo tỉ lệ nghịch mà vẫn chia theo $2 : 3 : 5$. Phải đổi sang $1/2 : 1/3 : 1/5$ trước.

Sharing in inverse ratio but still using $2 : 3 : 5$. Convert to $1/2 : 1/3 : 1/5$ first.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm tỉ lệ thuận với tỉ lệ nghịch: tăng thêm người làm thì ngày làm phải giảm, em kiểm bằng câu hỏi "cái này tăng thì cái kia tăng hay giảm".

Mixing up direct and inverse proportion: more workers means fewer days. Ask yourself "if this goes up, does the other go up or down".

PHẢI THUỘC / MEMORISE – Tỉ lệ thuận: $y = kx$ (cùng tăng, y/x không đổi). Tỉ lệ nghịch: $x \cdot y = a$ (một tăng một giảm, tích không đổi).

Direct: $y = kx$ (rise together, y/x constant). Inverse: $x \cdot y = a$ (one rises, one falls, product constant).

2.7. Nâng cao: tổng dãy phân số và so sánh lũy thừa – 2.7. Advanced: sums of fraction series and comparing powers

Hai dạng này thường làm câu cuối của đề không chuyên và quen thuộc trong đề chuyên. Cả hai cùng một ý: biến phép tính dài thành vài số hạng còn lại.

These two types are often the last question of ordinary papers and are familiar in specialist ones. Both share one idea: turn a long calculation into a few surviving terms.

Dạng 9. Tổng dãy phân số bằng cách tách hiệu – Type 9. Summing a series of fractions by splitting

TÍNH CHẤT 2.10 (Tách hiệu hai phân số) / PROPERTY 2.10 (Splitting into a difference) – Với n, k là số nguyên dương: $1/(n \cdot (n + k)) = (1/k) \cdot (1/n - 1/(n + k))$. Khi $k = 1$: $1/(n \cdot (n + 1)) = 1/n - 1/(n + 1)$.
For positive integers n, k : $1/(n \cdot (n + k)) = (1/k) \cdot (1/n - 1/(n + k))$. With $k = 1$: $1/(n \cdot (n + 1)) = 1/n - 1/(n + 1)$.

Chứng minh. / Proof.

Quy đồng về phải:

Put the right side over a common denominator:

$$(1/k) \cdot (1/n - 1/(n + k)) = (1/k) \cdot ((n + k) - n)/(n \cdot (n + k)) = (1/k) \cdot k/(n \cdot (n + k)) = 1/(n \cdot (n + k))$$

1. Nhìn mỗi số hạng: mẫu là tích hai số cách nhau k ($k = 1, 2, 3, \dots$). Xác định k .
Look at each term: the denominator is a product of two numbers k apart ($k = 1, 2, 3, \dots$). Find k .
2. Tách từng số hạng theo tính chất 2.10, nhớ nhân thêm $1/k$.
Split each term by property 2.10, remembering the factor $1/k$.
3. Viết vài số hạng đầu và cuối ra, thấy các số hạng giữa triệt tiêu từng đôi một.
Write out the first and last few terms and see the middle ones cancel in pairs.
4. Chỉ còn số hạng đầu và cuối. Tính nốt.
Only the first and last survive. Finish the calculation.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – Mẫu mỗi số hạng là tích hai số liên tiếp: $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$ Hiệu hai phân số $1/n - 1/(n + 1)$ quy đồng lên đúng là $1/(n \cdot (n + 1))$. Nếu viết mỗi số hạng thành hiệu, số trừ của số hạng này sẽ bằng số bị trừ của số hạng sau và hai số cộng lại thành 0.
Each denominator is a product of consecutive numbers: $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$ The difference $1/n - 1/(n + 1)$ over a common denominator is exactly $1/(n \cdot (n + 1))$. Writing each term as a difference, the subtracted part of one term equals the first part of the next, and the two cancel.

VÍ DỤ 2.17 (tổng dãy phân số) / EXAMPLE 2.17 (series of fractions) – Tính $S = 1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + \dots + 1/(99 \cdot 100)$.
Evaluate $S = 1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + \dots + 1/(99 \cdot 100)$.

Lời giải. / Solution.

1. Mỗi mẫu là tích hai số liên tiếp ($k = 1$), nên $1/(n \cdot (n + 1)) = 1/n - 1/(n + 1)$.
Each denominator is a product of consecutive numbers ($k = 1$), so $1/(n \cdot (n + 1)) = 1/n - 1/(n + 1)$.
2. $S = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + \dots + (1/99 - 1/100)$.
 $S = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + \dots + (1/99 - 1/100)$.

3. Các số hạng $1/2, 1/3, \dots, 1/99$ xuất hiện một lần với dấu $-$ và một lần với dấu $+$, nên triệt tiêu.

The terms $1/2, 1/3, \dots, 1/99$ each appear once with $-$ and once with $+$, so they cancel.

4. Còn lại $S = 1 - 1/100 = 99/100$.

What remains is $S = 1 - 1/100 = 99/100$.

Vậy $S = 99/100$.

So $S = 99/100$. ■

VÍ DỤ 2.18 (tách hiệu với $k = 2$) / EXAMPLE 2.18 (splitting with $k = 2$) – Tính $S = 1/(1 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 5) + 1/(5 \cdot 7) + \dots + 1/(49 \cdot 51)$.

Evaluate $S = 1/(1 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 5) + 1/(5 \cdot 7) + \dots + 1/(49 \cdot 51)$.

Lời giải. / Solution.

1. Hai số trong mỗi mẫu hơn kém nhau 2 ($k = 2$), nên $1/(n \cdot (n + 2)) = (1/2) \cdot (1/n - 1/(n + 2))$.

The two numbers in each denominator differ by 2 ($k = 2$), so $1/(n \cdot (n + 2)) = (1/2) \cdot (1/n - 1/(n + 2))$.

2. $S = (1/2) \cdot [(1 - 1/3) + (1/3 - 1/5) + (1/5 - 1/7) + \dots + (1/49 - 1/51)]$.

$S = (1/2) \cdot [(1 - 1/3) + (1/3 - 1/5) + (1/5 - 1/7) + \dots + (1/49 - 1/51)]$.

3. Trong ngoặc vuông chỉ còn $1 - 1/51 = 50/51$.

In the square bracket only $1 - 1/51 = 50/51$ remains.

4. $S = (1/2) \cdot (50/51) = 25/51$.

$S = (1/2) \cdot (50/51) = 25/51$.

Vậy $S = 25/51$.

So $S = 25/51$. ■

Dạng 10. So sánh hai lũy thừa lớn – Type 10. Comparing two large powers

Không dùng máy tính. Ba cách thường dùng: đưa về cùng số mũ rồi so cơ số; đưa về cùng cơ số rồi so số mũ; hoặc tìm một số trung gian kẹp giữa. Nhắc lại: với số mũ cùng dương thì cơ số lớn hơn cho lũy thừa lớn hơn, và với cơ số lớn hơn 1 thì số mũ lớn hơn cho lũy thừa lớn hơn.

No calculator. Three usual ways: bring both to the same exponent and compare bases; bring both to the same base and compare exponents; or find an intermediate number in between. Recall: for the same positive exponent the larger base gives the larger power, and for a base above 1 the larger exponent gives the larger power.

1. Tìm ƯCLN của hai số mũ. Số mũ chung là ước nào đó của ƯCLN đó.

Find the HCF of the two exponents. A common exponent is a divisor of it.

2. Viết mỗi lũy thừa dưới dạng (cơ số mới)^{số mũ chung}.

Write each power as (new base)^{common exponent}.

3. So hai cơ số mới. Nếu số mũ không có ước chung lớn, tìm số trung gian.

Compare the two new bases. If the exponents have no large common divisor, look for an intermediate number.

VÍ DỤ 2.19 (cùng số mũ) / EXAMPLE 2.19 (same exponent) – So sánh 2^{300} và 3^{200} .
Compare 2^{300} and 3^{200} .

Lời giải. / Solution.

1. $\text{UCLN}(300, 200) = 100$, chọn số mũ chung 100.

$\text{HCF}(300, 200) = 100$, so take the common exponent 100.

2. $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ và $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$.

$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ and $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$.

3. Vì $8 < 9$ nên $8^{100} < 9^{100}$.

Since $8 < 9$, $8^{100} < 9^{100}$.

Vậy $2^{300} < 3^{200}$.

So $2^{300} < 3^{200}$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – Số mũ 71 và 30 nguyên tố cùng nhau (UCLN bằng 1), nên không có số mũ chung lớn hơn 1. Ta tìm số kẹp giữa. Hạ 2^{71} xuống 2^{70} (nhỏ đi): nếu 2^{70} đã lớn hơn 5^{30} thì chắc chắn 2^{71} lớn hơn 5^{30} . Hai số mũ 70 và 30 có ước chung 10.

The exponents 71 and 30 are coprime (HCF 1), so there is no common exponent above 1. We look for a number in between. Lower 2^{71} to 2^{70} (smaller): if 2^{70} already beats 5^{30} , then certainly 2^{71} beats 5^{30} . The exponents 70 and 30 have common divisor 10.

VÍ DỤ 2.20 (số trung gian) / EXAMPLE 2.20 (intermediate number) – So sánh 2^{71} và 5^{30} .
Compare 2^{71} and 5^{30} .

Lời giải. / Solution.

1. Ta có $2^{71} > 2^{70}$ (cơ số 2 lớn hơn 1, số mũ lớn hơn).

We have $2^{71} > 2^{70}$ (base above 1, larger exponent).

2. Viết $2^{70} = (2^7)^{10} = 128^{10}$ và $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$.

Write $2^{70} = (2^7)^{10} = 128^{10}$ and $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$.

3. Vì $128 > 125$ nên $128^{10} > 125^{10}$, tức $2^{70} > 5^{30}$.

Since $128 > 125$, $128^{10} > 125^{10}$, that is $2^{70} > 5^{30}$.

4. Nói lại: $2^{71} > 2^{70} > 5^{30}$.

Chaining: $2^{71} > 2^{70} > 5^{30}$.

Vậy $2^{71} > 5^{30}$.

So $2^{71} > 5^{30}$. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Tách $1/(n \cdot (n+2)) = 1/n - 1/(n+2)$ mà quên nhân $1/2$. Phải thử lại bằng số: $n = 1$ cho $1/3$, còn $1 - 1/3 = 2/3$.

Splitting $1/(n \cdot (n+2)) = 1/n - 1/(n+2)$ and forgetting the factor $1/2$. Test with numbers: $n = 1$ gives $1/3$, but $1 - 1/3 = 2/3$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đếm sai số số hạng bị triệt tiêu và viết kết quả cuối là $1 - 1/99$. Mẫu cuối cùng là 100 thì phần còn lại là $1/100$.

Miscounting the cancelled terms and ending with $1 - 1/99$. If the last denominator is 100, the surviving part is $1/100$.

NHẬN XÉT / REMARK – Với dãy cách đều k lớn hơn 1, em luôn thử n nhỏ để kiểm công thức tách. Một phép thử với $n = 1$ đủ để lộ lỗi thiếu hệ số.

For series with step k above 1, always test the splitting formula with a small n . One test with $n = 1$ is enough to expose a missing factor.

2.8. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – 2.8. Multiple-choice and short-answer practice

Có ba loại câu. Nhiều lựa chọn: chọn một đáp án đúng trong A, B, C, D. Em loại trừ phương án sai bằng cách thử một số nhỏ, hoặc ước lượng, trước khi tính đầy đủ. Đúng/sai: một câu có bốn ý a, b, c, d, mỗi ý em kết luận Đúng hoặc Sai riêng, không suy từ ý này sang ý khác. Trả lời ngắn: đáp số là một số, em ghi đúng số, theo đúng cách làm tròn đề yêu cầu, không viết thêm chữ.

There are three kinds of question. Multiple choice: pick the one right answer from A, B, C, D. Rule out wrong options by testing a small number or estimating before a full calculation. True/false: one question has four statements a, b, c, d; judge each on its own, true or false, without inferring from one to another. Short answer: the answer is a number; write exactly that number, rounded as asked, with no extra words.

Nhiều lựa chọn – Multiple choice

Câu 1. Phân số nào sau đây bằng $3/5$? A. $9/20$ B. $12/20$ C. $15/30$ D. $18/35$

Question 1. Which fraction equals $3/5$? A. $9/20$ B. $12/20$ C. $15/30$ D. $18/35$

Câu 2. Giá trị của $(-2/3)^2 : (4/3)$ là A. $-1/3$ B. $1/3$ C. 1 D. $16/27$

Question 2. The value of $(-2/3)^2 : (4/3)$ is A. $-1/3$ B. $1/3$ C. 1 D. $16/27$

Câu 3. Làm tròn 3,14159 đến hàng phần nghìn được A. 3,141 B. 3,142 C. 3,14 D. 3,1416

Question 3. 3.14159 rounded to the nearest thousandth is A. 3.141 B. 3.142 C. 3.14 D. 3.1416

Câu 4. Khẳng định đúng là A. $\sqrt{16} = \pm 4$ B. $\sqrt{(-9)} = -3$ C. $\sqrt{25} = 5$ D. $\sqrt{0,4} = 0,2$

Question 4. The true statement is A. $\sqrt{16} = \pm 4$ B. $\sqrt{(-9)} = -3$ C. $\sqrt{25} = 5$ D. $\sqrt{0.4} = 0.2$

Đúng/sai – True/false

Câu 5. Đại lượng y tỉ lệ thuận với x theo hệ số -3 , tức $y = -3x$. (a) Khi $x = 2$ thì $y = -6$. (b) Khi $y = 12$ thì $x = 4$. (c) Khi x tăng gấp đôi thì y cũng tăng gấp đôi. (d) Với $y \neq 0$, tỉ số x/y luôn bằng -3 .

Question 5. y is directly proportional to x with factor -3 , that is $y = -3x$. (a) When $x = 2$, $y = -6$. (b) When $y = 12$, $x = 4$. (c) When x doubles, y doubles too. (d) For $y \neq 0$ the ratio x/y is always -3 .

Câu 6. (a) $0,(3) = 1/3$. (b) $0,1(6) = 1/6$. (c) Số $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ. (d) Mọi số thập phân vô hạn đều là số vô tỉ.

Question 6. (a) $0.(3) = 1/3$. (b) $0.1(6) = 1/6$. (c) The number $\sqrt{2}$ is rational. (d) Every endless decimal is irrational.

Trả lời ngắn – Short answer

Câu 7. Bảy công nhân làm xong một việc trong 12 ngày. Hỏi 6 công nhân cùng năng suất làm xong việc đó trong bao nhiêu ngày?

Question 7. Seven workers finish a job in 12 days. How many days do 6 workers of the same pace need?

Câu 8. Một hình vuông có diện tích 7 cm^2 . Độ dài cạnh làm tròn đến hàng phần mười là bao nhiêu xăng-ti-mét?

Question 8. A square has area 7 cm^2 . What is the side length to the nearest tenth of a centimetre?

Câu Question	Đáp án Answer	Giải thích Explanation
1	B	$12/20 = 3/5$ (chia cho 4). Phương án A: $9/20$ có $3 \cdot 20 \neq 5 \cdot 9$. C bằng $1/2$. D: $3 \cdot 35 = 105 \neq 5 \cdot 18$. <i>$12/20 = 3/5$ (divide by 4). A: $9/20$ fails $3 \cdot 20 \neq 5 \cdot 9$. C equals $1/2$. D: $3 \cdot 35 = 105 \neq 5 \cdot 18$.</i>
2	B	$(-2/3)^2 = 4/9$; $4/9 : 4/3 = 4/9 \cdot 3/4 = 1/3$. A sai dấu vì bình phương luôn dương. D quên đảo phân số chia. <i>$(-2/3)^2 = 4/9$; $4/9 : 4/3 = 4/9 \cdot 3/4 = 1/3$. A has the wrong sign, a square is positive. D forgot to flip the divisor.</i>
3	B	Chữ số sau hàng phần nghìn là 5 nên làm tròn lên: 3,142. A cắt cụt. C làm tròn đến hàng phần trăm. D đến hàng phần chục nghìn. <i>The digit after the thousandths is 5, so round up: 3.142. A truncates. C is to hundredths. D is to ten-thousandths.</i>
4	C	$\sqrt{25} = 5$ vì $5 \geq 0$ và $5^2 = 25$. A sai vì căn số học không âm. B sai vì số âm không có căn. D sai vì $0,2^2 = 0,04$. <i>$\sqrt{25} = 5$ since $5 \geq 0$ and $5^2 = 25$. A is wrong, the root is non-negative. B is wrong, a negative has no root. D is wrong, $0.2^2 = 0.04$.</i>
5	a Đ, b S, c Đ, d S	a: $y = -3 \cdot 2 = -6$. b: $y = 12$ cho $x = -4$. c: x gấp đôi thì $y = -3 \cdot 2x$ gấp đôi. d: $x/y = -1/3$. <i>a: $y = -3 \cdot 2 = -6$. b: $y = 12$ gives $x = -4$. c: doubling x doubles y. d: $x/y = -1/3$.</i>
6	a Đ, b Đ, c S, d S	a: $x = 0,(3)$, $10x - x = 3$ nên $x = 1/3$. b: đặt $x = 0,1(6)$: $100x - 10x = 16,(6) - 1,(6) = 15$, nên $90x = 15$ và $x = 1/6$. c: $\sqrt{2}$ vô tỉ. d: số thập phân vô hạn tuần hoàn là số hữu tỉ. <i>a: $10x - x = 3$ so $x = 1/3$. b: let $x = 0.1(6)$: $100x - 10x = 16.(6) - 1.(6) = 15$, so $90x = 15$ and $x = 1/6$. c: $\sqrt{2}$ is irrational. d: a recurring decimal is rational.</i>

Câu <i>Question</i>	Đáp án <i>Answer</i>	Giải thích <i>Explanation</i>
7	14	Tỉ lệ nghịch: $7 \cdot 12 = 84$ công; $84 : 6 = 14$. Đáp số ghi 14, không cần đơn vị. <i>Inverse proportion: $7 \cdot 12 = 84$ worker-days; $84 : 6 = 14$. Write 14 with no unit.</i>
8	2,6	Cạnh $= \sqrt{7} \approx 2,6458$; làm tròn đến hàng phần mười là 2,6 vì chữ số kế tiếp là 4. <i>Side $= \sqrt{7} \approx 2.6458$; to the nearest tenth that is 2.6, since the next digit is 4.</i>

2.9. Bảng chiến lược và bảng thuật ngữ – 2.9. Strategy table and glossary

Khi gặp đề, em tìm dấu hiệu ở cột trái rồi làm theo cột giữa. Cột phải ghi số ví dụ cùng dạng.

When you meet a question, find the sign in the left column and follow the middle column. The right column gives the matching example number.

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Cách làm <i>Method</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Phân số lớn, yêu cầu tối giản <i>Large fraction, lowest terms asked</i>	Tìm ƯCLN rồi chia tử và mẫu <i>Find the HCF, divide top and bottom</i>	2.1
So sánh hoặc sắp xếp nhiều phân số <i>Compare or order several fractions</i>	Quy đồng theo BCNN, so tử <i>Use the LCM, compare numerators</i>	2.2
Tìm n nguyên để phân số nguyên <i>Integer n making a fraction an integer</i>	Tách tử, cho mẫu là ước <i>Split the numerator, the denominator divides the remainder</i>	2.3
Giảm giá, tăng giá nhiều lần <i>Several discounts or rises</i>	Nhân từng lần với $(1 \pm p/100)$ <i>Multiply each time by $(1 \pm p/100)$</i>	2.6, 2.7
Đổi số thập phân tuần hoàn <i>Recurring decimal to fraction</i>	Nhân 10^m rồi trừ cho phần lặp mất <i>Multiply by 10^m, subtract to kill the tail</i>	2.10
$ x - a + x - b $ nhỏ nhất <i>Minimum of $x - a + x - b$</i>	$ A + B \geq A + B $, dấu bằng khi $A \cdot B \geq 0$ <i>Use $A + B \geq A + B$, equality when $A \cdot B \geq 0$</i>	2.12
$a : b : c$ tỉ lệ, cho tổng <i>$a : b : c$ in a ratio, sum given</i>	Đặt k, mỗi số là bội của k <i>Set k, each number a multiple of k</i>	2.13, 2.14
Chia tỉ lệ nghịch <i>Share in inverse ratio</i>	Đổi sang nghịch đảo, quy đồng, chia <i>Switch to reciprocals, common denominator, share</i>	2.16
Tổng $1/(n(n+k))$ nhiều số hạng <i>Sum of many terms $1/(n(n+k))$</i>	Tách hiệu, triệt tiêu từng đôi <i>Split into differences, cancel in pairs</i>	2.17, 2.18

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Cách làm <i>Method</i>	Ví dụ <i>Example</i>
So sánh hai lũy thừa <i>Compare two powers</i>	Cùng số mũ, hoặc số trung gian <i>Same exponent, or an intermediate number</i>	2.19, 2.20

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Phân số	Fraction	a/b với $b \neq 0$ <i>a/b with $b \neq 0$</i>
Tử số, mẫu số	Numerator, denominator	Số trên, số dưới của phân số <i>The top and bottom numbers</i>
Phân số tối giản	Fraction in lowest terms	Tử và mẫu có ƯCLN bằng 1 <i>HCF of top and bottom is 1</i>
Rút gọn	Simplify, reduce	Chia tử và mẫu cho ước chung <i>Divide top and bottom by a common divisor</i>
Quy đồng	Put over a common denominator	Đưa về cùng mẫu <i>Give the fractions the same denominator</i>
Hỗn số	Mixed number	Phần nguyên cộng phần phân số <i>Whole part plus fraction part</i>
Số nghịch đảo	Reciprocal	b/a của a/b <i>b/a of a/b</i>
Số thập phân	Decimal	Số viết với dấu phẩy <i>A number written with a decimal point</i>
Làm tròn	Rounding	Thay số bằng số gần đúng ở một hàng <i>Replacing by an approximation at a place</i>
Tỉ số phần trăm	Percentage	Tỉ số với mẫu 100 <i>A ratio over 100</i>
Giá niêm yết	List price	Giá ghi trên nhãn trước giảm <i>The price on the label before a discount</i>
Số hữu tỉ	Rational number	Số viết được dạng a/b <i>A number that can be written a/b</i>
Lũy thừa	Power	x^n là tích của n thừa số x <i>x^n is a product of n factors x</i>
Quy tắc chuyển vế	Moving terms rule	Đổi vế thì đổi dấu <i>Change side, change sign</i>
Chu kì	Period (of a recurring decimal)	Dãy chữ số lặp lại <i>The block of repeating digits</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Số vô tỉ	Irrational number	Thập phân vô hạn không tuần hoàn <i>Endless non-recurring decimal</i>
Căn bậc hai số học	Square root	Số không âm có bình phương bằng a <i>The non-negative number whose square is a</i>
Số thực	Real number	Hữu tỉ hoặc vô tỉ <i>Rational or irrational</i>
Giá trị tuyệt đối	Absolute value	Khoảng cách tới 0 <i>Distance from 0</i>
Tỉ lệ thức	Proportion	Đẳng thức hai tỉ số <i>Equality of two ratios</i>
Tỉ lệ thuận	Direct proportion	$y = kx$
Tỉ lệ nghịch	Inverse proportion	$x \cdot y$ là hằng số <i>$x \cdot y$ is constant</i>
Dãy tỉ số bằng nhau	Chain of equal ratios	$a/b = c/d = e/f$

2.10. Bài tự luyện – Practice problems

Mức 1 – Cơ bản – Level 1 – Basic

Bài 2.1 / Problem 2.1 – Rút gọn phân số $126/210$.
Simplify $126/210$.

Bài 2.2 / Problem 2.2 – Tính $2/5 + 3/10 - 1/4$.
Evaluate $2/5 + 3/10 - 1/4$.

Bài 2.3 / Problem 2.3 – Tính $(-3/4) \cdot (8/9) + 1/3$.
Evaluate $(-3/4) \cdot (8/9) + 1/3$.

Bài 2.4 / Problem 2.4 – Lớp 9C có 45 học sinh, trong đó 9 em đạt loại giỏi. Tính tỉ số phần trăm số học sinh giỏi so với cả lớp.
Class 9C has 45 pupils, 9 of them rated excellent. Find the percentage of excellent pupils in the class.

Bài 2.5 / Problem 2.5 – Tìm x biết $x/12 = 15/18$.
Find x if $x/12 = 15/18$.

Bài 2.6 / Problem 2.6 – Mua 5 mét vải hết 350.000 đồng. Hỏi mua 8 mét vải cùng loại hết bao nhiêu tiền?
5 metres of cloth cost 350,000 dong. How much do 8 metres of the same cloth cost?

Mức 2 – Vận dụng – Level 2 – Applied

Bài 2.7 / Problem 2.7 – Tìm x biết $(2/3)x - 3/4 = (1/2)x + 5/12$.
Find x if $(2/3)x - 3/4 = (1/2)x + 5/12$.

Bài 2.8 / Problem 2.8 – Viết $0,(27)$ và $2,1(6)$ dưới dạng phân số tối giản.

Write $0,(27)$ and $2.1(6)$ as fractions in lowest terms.

Bài 2.9 / Problem 2.9 – Giá một chiếc bút tăng 40% rồi sau đó giảm 20% so với giá mới. Giá lúc đầu là 250.000 đồng. Tính giá cuối cùng và cho biết so với giá lúc đầu, giá cuối cùng thay đổi bao nhiêu phần trăm.

The price of a pen rises by 40% and is then cut by 20% of the new price. The original price is 250,000 dong. Find the final price and the overall percentage change from the original.

Bài 2.10 / Problem 2.10 – Chia 910 viên bi cho ba bạn theo tỉ lệ nghịch với 2, 3, 4. Mỗi bạn nhận bao nhiêu viên?

Share 910 marbles among three friends in inverse proportion to 2, 3, 4. How many does each get?

Bài 2.11 / Problem 2.11 – Cho $x/3 = y/4$ và $x \cdot y = 48$. Tìm x, y .

Given $x/3 = y/4$ and $x \cdot y = 48$, find x and y .

Mức 3 – Nâng cao, thi chuyên – Level 3 – Advanced, specialist-school entrance

Bài 2.12 / Problem 2.12 – Tính $S = 1/(2 \cdot 5) + 1/(5 \cdot 8) + 1/(8 \cdot 11) + \dots + 1/(32 \cdot 35)$.

Evaluate $S = 1/(2 \cdot 5) + 1/(5 \cdot 8) + 1/(8 \cdot 11) + \dots + 1/(32 \cdot 35)$.

Bài 2.13 / Problem 2.13 – So sánh 3^{34} và 5^{20} .

Compare 3^{34} and 5^{20} .

Bài 2.14 / Problem 2.14 – Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = |x - 1| + |x - 4| + |x - 7|$ và giá trị x đạt nó.

Find the minimum of $B = |x - 1| + |x - 4| + |x - 7|$ and the x that attains it.

Bài 2.15 / Problem 2.15 – Cho a, b, c khác 0 thỏa $(a + b - c)/c = (b + c - a)/a = (c + a - b)/b$. Tính $M = (a + b)(b + c)(c + a)/(a \cdot b \cdot c)$.

Let a, b, c be non-zero with $(a + b - c)/c = (b + c - a)/a = (c + a - b)/b$. Evaluate $M = (a + b)(b + c)(c + a)/(a \cdot b \cdot c)$.

2.11. Lời giải bài tự luyện – Solutions to practice problems

Bài 2.1 – Problem 2.1

1. $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ và $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, nên ƯCLN $= 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ and $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, so HCF $= 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

2. Chia cả tử và mẫu cho 42: $126 : 42 = 3$ và $210 : 42 = 5$.

Divide top and bottom by 42: $126 : 42 = 3$ and $210 : 42 = 5$.

Vậy $126/210 = 3/5$ (tối giản vì ƯCLN(3, 5) = 1).

So $126/210 = 3/5$ (lowest terms since HCF(3, 5) = 1). ■

Bài 2.2 – Problem 2.2

1. BCNN(5, 10, 4) = 20.

LCM(5, 10, 4) = 20.

2. Quy đồng: $2/5 = 8/20$; $3/10 = 6/20$; $1/4 = 5/20$.

Common denominator: $2/5 = 8/20$; $3/10 = 6/20$; $1/4 = 5/20$.

3. Tính: $8/20 + 6/20 - 5/20 = 9/20$.

Compute: $8/20 + 6/20 - 5/20 = 9/20$.

Vậy giá trị là $9/20$.

So the value is $9/20$. ■

Bài 2.3 – Problem 2.3

1. Nhân: $(-3/4) \cdot (8/9) = -24/36 = -2/3$.

Multiply: $(-3/4) \cdot (8/9) = -24/36 = -2/3$.

2. Cộng: $-2/3 + 1/3 = -1/3$.

Add: $-2/3 + 1/3 = -1/3$.

Vậy giá trị là $-1/3$.

So the value is $-1/3$. ■

Bài 2.4 – Problem 2.4

1. Tỉ số: $9/45 = 1/5$.

Ratio: $9/45 = 1/5$.

2. Đổi ra phần trăm: $1/5 \cdot 100\% = 20\%$.

As a percentage: $1/5 \cdot 100\% = 20\%$.

Vậy học sinh giỏi chiếm 20% cả lớp.

So excellent pupils make up 20% of the class. ■

Bài 2.5 – Problem 2.5

1. Tích ngoại tỉ bằng tích trung tỉ: $18 \cdot x = 12 \cdot 15 = 180$.

Product of extremes equals product of means: $18 \cdot x = 12 \cdot 15 = 180$.

2. Suy ra $x = 180 : 18 = 10$.

So $x = 180 : 18 = 10$.

3. Thử: $10/12 = 5/6$ và $15/18 = 5/6$. Đúng.

Check: $10/12 = 5/6$ and $15/18 = 5/6$. Correct.

Vậy $x = 10$.

So $x = 10$. ■

Bài 2.6 – Problem 2.6

1. Số mét vải và số tiền tỉ lệ thuận. Gọi x là số tiền cần tìm: $x/350.000 = 8/5$.

Metres and price are in direct proportion. Let x be the price: $x/350,000 = 8/5$.

2. $x = 350.000 \cdot 8/5 = 560.000$.

$x = 350,000 \cdot 8/5 = 560,000$.

Vậy 8 mét vải hết 560.000 đồng.

So 8 metres cost 560,000 dong. ■

Bài 2.7 – Problem 2.7

1. Chuyển vế: $(2/3)x - (1/2)x = 5/12 + 3/4$.
Move terms: $(2/3)x - (1/2)x = 5/12 + 3/4$.
2. Gộp: $(4/6 - 3/6)x = 5/12 + 9/12$, tức $(1/6)x = 14/12 = 7/6$.
Combine: $(4/6 - 3/6)x = 5/12 + 9/12$, that is $(1/6)x = 14/12 = 7/6$.
3. Nhân hai vế với 6: $x = 7$.
Multiply both sides by 6: $x = 7$.
4. Thử: vế trái $14/3 - 3/4 = 47/12$; vế phải $7/2 + 5/12 = 47/12$. Đúng.
Check: left $14/3 - 3/4 = 47/12$; right $7/2 + 5/12 = 47/12$. Correct.

Vậy $x = 7$.

So $x = 7$. ■

Bài 2.8 – Problem 2.8

1. Đặt $x = 0,(27)$. Chu kì có 2 chữ số: $100x = 27,(27)$. Trừ: $99x = 27$, nên $x = 27/99 = 3/11$.
Let $x = 0,(27)$. The period has 2 digits: $100x = 27,(27)$. Subtract: $99x = 27$, so $x = 27/99 = 3/11$.
2. Đặt $y = 2,1(6)$. Nhân 10: $10y = 21,(6)$. Nhân 100: $100y = 216,(6)$.
Let $y = 2.1(6)$. Times 10: $10y = 21.(6)$. Times 100: $100y = 216.(6)$.
3. Trừ: $90y = 216 - 21 = 195$, nên $y = 195/90 = 13/6$.
Subtract: $90y = 216 - 21 = 195$, so $y = 195/90 = 13/6$.

Vậy $0,(27) = 3/11$ và $2,1(6) = 13/6$.

So $0,(27) = 3/11$ and $2.1(6) = 13/6$. ■

Bài 2.9 – Problem 2.9

1. Sau khi tăng 40%: $250.000 \cdot 1,4 = 350.000$ đồng.
After the 40% rise: $250,000 \cdot 1.4 = 350,000$ dong.
2. Sau khi giảm 20% trên 350.000: $350.000 \cdot 0,8 = 280.000$ đồng.
After the 20% cut on 350,000: $350,000 \cdot 0.8 = 280,000$ dong.
3. Thay đổi: $(280.000 - 250.000)/250.000 = 0,12 = 12\%$, giá cuối lớn hơn giá đầu.
Change: $(280,000 - 250,000)/250,000 = 0.12 = 12\%$, the final price is higher.

Vậy giá cuối cùng là 280.000 đồng, tăng 12% so với giá lúc đầu.

So the final price is 280,000 dong, 12% above the original. ■

Bài 2.10 – Problem 2.10

1. Chia theo tỉ lệ nghịch với 2, 3, 4 là chia theo tỉ lệ thuận với $1/2, 1/3, 1/4$.
Sharing in inverse proportion to 2, 3, 4 is sharing in direct proportion to $1/2, 1/3, 1/4$.
2. Quy đồng mẫu 12: $6/12 : 4/12 : 3/12$ nên tỉ số là $6 : 4 : 3$.
Denominator 12: $6/12 : 4/12 : 3/12$, so the ratio is $6 : 4 : 3$.

3. Các phần là $6k$, $4k$, $3k$ với $13k = 910$, suy ra $k = 70$.

The shares are $6k$, $4k$, $3k$ with $13k = 910$, so $k = 70$.

4. Ba bạn nhận 420, 280, 210 viên. Thử: $420 + 280 + 210 = 910$.

The friends get 420, 280, 210. Check: $420 + 280 + 210 = 910$.

Vậy ba bạn nhận lần lượt 420, 280, 210 viên bi.

So they get 420, 280 and 210 marbles respectively. ■

Bài 2.11 – Problem 2.11

1. Đặt $x/3 = y/4 = k$, suy ra $x = 3k$ và $y = 4k$.

Let $x/3 = y/4 = k$, so $x = 3k$ and $y = 4k$.

2. $x \cdot y = 12k^2 = 48$, nên $k^2 = 4$, tức $k = 2$ hoặc $k = -2$.

$x \cdot y = 12k^2 = 48$, so $k^2 = 4$, that is $k = 2$ or $k = -2$.

3. Với $k = 2$: $(x, y) = (6, 8)$. Với $k = -2$: $(x, y) = (-6, -8)$.

For $k = 2$: $(x, y) = (6, 8)$. For $k = -2$: $(x, y) = (-6, -8)$.

4. Thử cả hai: $6 \cdot 8 = 48$ và $(-6)(-8) = 48$, tỉ số $6/3 = 8/4 = 2$ và $-6/3 = -8/4 = -2$.

Check both: $6 \cdot 8 = 48$ and $(-6)(-8) = 48$; ratios $6/3 = 8/4 = 2$ and $-6/3 = -8/4 = -2$.

Vậy $(x, y) = (6, 8)$ hoặc $(x, y) = (-6, -8)$.

So $(x, y) = (6, 8)$ or $(x, y) = (-6, -8)$. ■

Bài 2.12 – Problem 2.12

1. Hai số trong mỗi mẫu hơn kém nhau 3 ($k = 3$): $1/(n \cdot (n + 3)) = (1/3) \cdot (1/n - 1/(n + 3))$.

The two numbers in each denominator differ by 3 ($k = 3$): $1/(n \cdot (n + 3)) = (1/3) \cdot (1/n - 1/(n + 3))$.

2. $S = (1/3) \cdot [(1/2 - 1/5) + (1/5 - 1/8) + \dots + (1/32 - 1/35)]$.

$S = (1/3) \cdot [(1/2 - 1/5) + (1/5 - 1/8) + \dots + (1/32 - 1/35)]$.

3. Các số hạng giữa triệt tiêu: $S = (1/3) \cdot (1/2 - 1/35) = (1/3) \cdot (33/70) = 11/70$.

The middle terms cancel: $S = (1/3) \cdot (1/2 - 1/35) = (1/3) \cdot (33/70) = 11/70$.

Vậy $S = 11/70$.

So $S = 11/70$. ■

Bài 2.13 – Problem 2.13

1. Hạ 3^{34} xuống 3^{30} : $3^{34} > 3^{30}$.

Lower 3^{34} to 3^{30} : $3^{34} > 3^{30}$.

2. Viết $3^{30} = (3^3)^{10} = 27^{10}$ và $5^{20} = (5^2)^{10} = 25^{10}$.

Write $3^{30} = (3^3)^{10} = 27^{10}$ and $5^{20} = (5^2)^{10} = 25^{10}$.

3. Vì $27 > 25$ nên $27^{10} > 25^{10}$, tức $3^{30} > 5^{20}$.

Since $27 > 25$, $27^{10} > 25^{10}$, that is $3^{30} > 5^{20}$.

4. Nói lại: $3^{34} > 3^{30} > 5^{20}$.

Chaining: $3^{34} > 3^{30} > 5^{20}$.

Vậy $3^{34} > 5^{20}$.

So $3^{34} > 5^{20}$. ■

Bài 2.14 – Problem 2.14

1. Ghép hai số hạng ngoài: $|x - 1| + |x - 7| = |x - 1| + |7 - x| \geq |(x - 1) + (7 - x)| = 6$.
Dấu bằng khi $1 \leq x \leq 7$.
Pair the outer terms: $|x - 1| + |x - 7| = |x - 1| + |7 - x| \geq |(x - 1) + (7 - x)| = 6$. Equality when $1 \leq x \leq 7$.
2. Số hạng giữa $|x - 4| \geq 0$, dấu bằng khi $x = 4$.
The middle term $|x - 4| \geq 0$, equality when $x = 4$.
3. Cộng lại: $B \geq 6 + 0 = 6$. Cả hai dấu bằng cùng xảy ra khi $x = 4$ (vì 4 nằm trong $[1; 7]$).
Adding: $B \geq 6 + 0 = 6$. Both equalities hold together at $x = 4$ (since 4 lies in $[1, 7]$).
4. Thử $x = 4$: $B = 3 + 0 + 3 = 6$. Thử $x = 5$: $B = 4 + 1 + 2 = 7 > 6$.
Check $x = 4$: $B = 3 + 0 + 3 = 6$. Check $x = 5$: $B = 4 + 1 + 2 = 7 > 6$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 6, đạt khi $x = 4$.

So the minimum of B is 6, attained at $x = 4$. ■

Bài 2.15 – Problem 2.15

1. Cộng 1 vào ba tỉ số: $(a + b)/c = (b + c)/a = (c + a)/b$. Gọi giá trị chung là t.
Add 1 to each ratio: $(a + b)/c = (b + c)/a = (c + a)/b$. Call the common value t.
2. Khi đó $M = [(a + b)/c] \cdot [(b + c)/a] \cdot [(c + a)/b] = t^3$.
Then $M = [(a + b)/c] \cdot [(b + c)/a] \cdot [(c + a)/b] = t^3$.
3. Trường hợp $a + b + c \neq 0$: theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, $t = [(a + b) + (b + c) + (c + a)]/(c + a + b) = 2(a + b + c)/(a + b + c) = 2$, nên $M = 8$.
Case $a + b + c \neq 0$: by the chain-of-ratios property $t = [(a + b) + (b + c) + (c + a)]/(c + a + b) = 2(a + b + c)/(a + b + c) = 2$, so $M = 8$.
4. Trường hợp $a + b + c = 0$: $a + b = -c$ nên $t = -c/c = -1$, suy ra $M = (-1)^3 = -1$.
Case $a + b + c = 0$: $a + b = -c$ so $t = -c/c = -1$, hence $M = (-1)^3 = -1$.
5. Cả hai trường hợp đều xảy ra: $a = b = c = 1$ cho $M = 8$; $a = 1, b = 1, c = -2$ cho $M = -1$ (kiểm: ba tỉ số đều bằng -2).
Both cases occur: $a = b = c = 1$ gives $M = 8$; $a = 1, b = 1, c = -2$ gives $M = -1$ (check: all three ratios equal -2).

Vậy $M = 8$ hoặc $M = -1$.

So $M = 8$ or $M = -1$. ■

Chương 3. Đa thức, hằng đẳng thức, phân tích nhân tử và phân thức – Chapter 3. Polynomials, identities, factorisation and algebraic fractions

Sau chương này em làm được – *What you will be able to do*

- Thu gọn, cộng, trừ, nhân, chia đa thức và tìm nghiệm của đa thức một biến.
Simplify, add, subtract, multiply and divide polynomials, and find roots of a polynomial in one variable.
- Nhận ra và dùng bảy hằng đẳng thức đáng nhớ theo cả hai chiều.
Recognise and use the seven standard identities in both directions.
- Phân tích đa thức thành nhân tử bằng bốn cách: đặt nhân tử chung, hằng đẳng thức, nhóm hạng tử, tách hạng tử.
Factorise a polynomial in four ways: common factor, identities, grouping, splitting a term.
- Tìm điều kiện xác định (điều kiện để mẫu khác 0), rút gọn và thực hiện bốn phép tính với phân thức đại số, đúng như trong câu rút gọn của đề thi.
Find the domain (the condition that the denominator is not 0), simplify and carry out the four operations on algebraic fractions, as in the simplification question of the exam.
- Tìm giá trị nguyên của phân thức và tính giá trị biểu thức khi biết một điều kiện cho trước.
Find integer values of a fraction and evaluate an expression when a condition is given.

Đề vào 10 dùng hằng đẳng thức, phân tích nhân tử và quy đồng phân thức ngay trong câu rút gọn, câu phương trình và câu bất đẳng thức. Câu phân loại là câu khó ở cuối một bài, dùng để tách học sinh khá giỏi.

Entrance exams use identities, factorisation and common denominators inside the simplification question, the equation question and the inequality question. A top-mark question is the hard last part of a problem, used to separate the strongest students.

Dạng bài trong đề <i>Question type</i>	Thường ở <i>Usually</i>	Mức <i>Level</i>
Rút gọn biểu thức có phân thức (và căn) <i>Simplify an expression with fractions (and roots)</i>	Phần đầu đề <i>Early in the paper</i>	Dễ đến trung bình <i>Easy to medium</i>
Phân tích đa thức thành nhân tử (trong phương trình, rút gọn) <i>Factorise (inside equations, simplification)</i>	Mọi câu đại số <i>Any algebra question</i>	Dễ <i>Easy</i>
Giá trị nguyên của biểu thức <i>Integer values of an expression</i>	Ý cuối câu rút gọn <i>Last part of the simplification</i>	Phân loại <i>Differentiating</i>
Tính giá trị biểu thức khi biết điều kiện <i>Evaluate an expression given a condition</i>	Thường là câu đại số cuối <i>Often the last algebra question</i>	Phân loại, chuyên <i>Differentiating, specialist</i>

Câu rút gọn có mặt ở 16 trong 18 đề không chuyên, thường ở phần đầu đề.

A simplification question is in 16 of the 18 non-specialist papers, usually early in the paper.

3.1. Đơn thức và đa thức nhiều biến – *Monomials and polynomials in several variables*

Biểu thức đại số là biểu thức gồm số, chữ (biến) và các phép tính, ví dụ $2x + 3y$ hay $x^2 - 5$. Ở đây chỉ xét biểu thức không có phép chia cho biến: đó là đơn thức và đa thức.

An algebraic expression is built from numbers, letters (variables) and operations, such as $2x + 3y$ or $x^2 - 5$. Here we only use expressions that do not divide by a variable: monomials and polynomials.

ĐỊNH NGHĨA 3.1 (Đơn thức) / DEFINITION 3.1 (Monomial) – Đơn thức là biểu thức chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc tích của các số và biến, trong đó mỗi biến có số mũ là số tự nhiên. Số đứng trước gọi là hệ số, phần còn lại gọi là phần biến. Ví dụ: $-6x^3y^4$ có hệ số -6 và phần biến x^3y^4 .

A monomial is a number, a variable, or a product of numbers and variables whose exponents are natural numbers. The number in front is the coefficient and the rest is the variable part. Example: $-6x^3y^4$ has coefficient -6 and variable part x^3y^4 .

ĐỊNH NGHĨA 3.2 (Bậc, đơn thức đồng dạng) / DEFINITION 3.2 (Degree, like terms) – Bậc của đơn thức (có hệ số khác 0) là tổng các số mũ của các biến. Hai đơn thức đồng dạng nếu có hệ số khác 0 và cùng phần biến. Ví dụ: $-6x^3y^4$ có bậc $3 + 4 = 7$; $2x^2y$ và $-5x^2y$ đồng dạng, còn $2x^2y$ và $2xy^2$ không đồng dạng.

The degree of a monomial (with non-zero coefficient) is the sum of the exponents of its variables. Two monomials are like terms if their coefficients are non-zero and their variable parts are equal.

Example: $-6x^3y^4$ has degree $3 + 4 = 7$; $2x^2y$ and $-5x^2y$ are like terms, but $2x^2y$ and $2xy^2$ are not.

ĐỊNH NGHĨA 3.3 (Đa thức) / DEFINITION 3.3 (Polynomial) – Đa thức là tổng của những đơn thức; mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử. Thu gọn đa thức là cộng các hạng tử đồng dạng. Bậc của đa thức đã thu gọn là bậc cao nhất của các hạng tử. Ví dụ: $4x^2y - 3xy^2 - 4$ có bậc 3.

A polynomial is a sum of monomials; each monomial in the sum is a term. To simplify a polynomial, add its like terms. The degree of a simplified polynomial is the highest degree of its terms. Example: $4x^2y - 3xy^2 - 4$ has degree 3.

Các bước thu gọn và tính giá trị đa thức – *Steps to simplify a polynomial and evaluate it*

1. Viết từng hạng tử, giữ nguyên dấu đứng trước nó.

Write out each term, keeping the sign in front of it.

2. Gạch cùng một kiểu dấu dưới các đơn thức đồng dạng (cùng phần biến).

Mark like terms with the same underline.

3. Cộng các hệ số của các hạng tử đồng dạng, giữ nguyên phần biến.

Add the coefficients of like terms and keep the variable part.

4. Muốn tính giá trị, thay số vào đa thức ĐÃ THU GỌN, đặt số âm trong ngoặc.

To evaluate, substitute into the SIMPLIFIED polynomial, putting negative numbers in brackets.

VÍ DỤ 3.1 (Nhân đơn thức) / EXAMPLE 3.1 (Multiplying monomials) – Thu gọn đơn thức $A = (-2x^2y) \cdot (3xy^3)$. Tìm hệ số, phần biến và bậc.
Simplify the monomial $A = (-2x^2y) \cdot (3xy^3)$. Find the coefficient, variable part and degree.

Lời giải. / Solution.

1. Nhân các hệ số: $(-2) \cdot 3 = -6$.

Multiply the coefficients: $(-2) \cdot 3 = -6$.

2. Nhân các phần biến, cộng số mũ của cùng một biến: $x^2 \cdot x = x^3$; $y \cdot y^3 = y^4$.

Multiply the variable parts and add the exponents of each variable: $x^2 \cdot x = x^3$; $y \cdot y^3 = y^4$.

Vậy $A = -6x^3y^4$, hệ số -6 , phần biến x^3y^4 , bậc $3 + 4 = 7$.

So $A = -6x^3y^4$: coefficient -6 , variable part x^3y^4 , degree $3 + 4 = 7$. ■

VÍ DỤ 3.2 (Thu gọn rồi thay số) / EXAMPLE 3.2 (Simplify, then substitute) – Thu gọn đa thức $P = 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + 2xy^2 - 4$ rồi tính P tại $x = 2, y = -1$.
Simplify $P = 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + 2xy^2 - 4$, then evaluate P at $x = 2, y = -1$.

Lời giải. / Solution.

1. Hạng tử đồng dạng: $3x^2y$ và x^2y ; $-5xy^2$ và $2xy^2$.

Like terms: $3x^2y$ and x^2y ; $-5xy^2$ and $2xy^2$.

2. Cộng hệ số: $3 + 1 = 4$ và $-5 + 2 = -3$. Vậy $P = 4x^2y - 3xy^2 - 4$.

Add coefficients: $3 + 1 = 4$ and $-5 + 2 = -3$. So $P = 4x^2y - 3xy^2 - 4$.

3. Thay $x = 2, y = -1$: $P = 4 \cdot 2^2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 \cdot (-1)^2 - 4 = -16 - 6 - 4 = -26$.

Substitute $x = 2, y = -1$: $P = 4 \cdot 2^2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 \cdot (-1)^2 - 4 = -16 - 6 - 4 = -26$.

Vậy $P = -26$ tại $x = 2, y = -1$.

So $P = -26$ at $x = 2, y = -1$. ■

Cộng, trừ đa thức: bỏ ngoặc rồi cộng các hạng tử đồng dạng; dấu trừ đứng trước ngoặc thì đổi dấu mọi hạng tử trong ngoặc. Ví dụ $(3x^2y - 2xy) + (x^2y + 5xy) = 4x^2y + 3xy$ và $(3x^2y - 2xy) - (x^2y + 5xy) = 2x^2y - 7xy$. Nhân đa thức: nhân từng hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia, rồi thu gọn. Ví dụ $(2x - y)(x + 3y) = 2x^2 + 6xy - xy - 3y^2 = 2x^2 + 5xy - 3y^2$.

To add or subtract polynomials, remove the brackets and add like terms; a minus sign before a bracket changes every sign inside. Example: $(3x^2y - 2xy) + (x^2y + 5xy) = 4x^2y + 3xy$ and $(3x^2y - 2xy) - (x^2y + 5xy) = 2x^2y - 7xy$. To multiply polynomials, multiply every term of one by every term of the other and simplify. Example: $(2x - y)(x + 3y) = 2x^2 + 6xy - xy - 3y^2 = 2x^2 + 5xy - 3y^2$.

Chia đa thức cho đơn thức: chia từng hạng tử của đa thức cho đơn thức, rồi cộng các thương lại. Điều kiện là mỗi hạng tử phải chia hết, nghĩa là biến nào ở đơn thức chia cũng có mặt ở hạng tử với số mũ không nhỏ hơn.

To divide a polynomial by a monomial, divide each term by the monomial and add the quotients. Each term must be divisible: every variable of the divisor must appear in the term with an exponent at least as large.

VÍ DỤ 3.3 (Chia đa thức cho đơn thức) / EXAMPLE 3.3 (Dividing by a monomial) –

Thực hiện phép chia $(12x^3y^2 - 8x^2y^3 + 4xy^2) : (4xy^2)$.

Carry out $(12x^3y^2 - 8x^2y^3 + 4xy^2) : (4xy^2)$.

Lời giải. / Solution.

1. Chia hạng tử thứ nhất: $12x^3y^2 : 4xy^2 = 3x^2$ (chia hệ số, trừ số mũ).

First term: $12x^3y^2 : 4xy^2 = 3x^2$ (divide coefficients, subtract exponents).

2. Hạng tử thứ hai: $-8x^2y^3 : 4xy^2 = -2xy$.

Second term: $-8x^2y^3 : 4xy^2 = -2xy$.

3. Hạng tử thứ ba: $4xy^2 : 4xy^2 = 1$ (không bỏ sót số 1).

Third term: $4xy^2 : 4xy^2 = 1$ (do not drop the 1).

Vậy thương là $3x^2 - 2xy + 1$.

So the quotient is $3x^2 - 2xy + 1$. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bỏ sót số 1 khi chia hai hạng tử giống nhau, hoặc viết $4xy^2 : 4xy^2 = 0$.

Dropping the 1 when dividing identical terms, or writing $4xy^2 : 4xy^2 = 0$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Cộng số mũ khi chia hoặc trừ số mũ khi nhân: nhân thì cộng mũ, chia thì trừ mũ.

Adding exponents when dividing or subtracting them when multiplying: multiply means add, divide means subtract.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Thay số âm vào mà không đặt trong ngoặc: $(-1)^2 = 1$ nhưng $-1^2 = -1$.

Substituting a negative number without brackets: $(-1)^2 = 1$ but $-1^2 = -1$.

3.2. Đa thức một biến: bậc, nghiệm và bốn phép tính – Polynomials in one variable: degree, roots and the four operations

Đa thức một biến là đa thức chỉ chứa một chữ, thường viết $P(x)$, $Q(x)$. Ta sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa giảm dần của x để dễ cộng, trừ, nhân, chia.

A polynomial in one variable contains a single letter and is usually written $P(x)$, $Q(x)$. Terms are arranged in decreasing powers of x to make adding, subtracting, multiplying and dividing easier.

ĐỊNH NGHĨA 3.4 (Bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do) / DEFINITION 3.4 (Degree, leading coefficient, constant term) – Với đa thức $P(x)$ đã thu gọn và sắp xếp: số mũ cao nhất là bậc của $P(x)$; hệ số của lũy thừa cao nhất là hệ số cao nhất; hạng tử không chứa x là hệ số tự do.

Ví dụ $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ có bậc 3, hệ số cao nhất 2, hệ số tự do -5 .

For a simplified, ordered polynomial $P(x)$: the largest exponent is the degree; the coefficient of the highest power is the leading coefficient; the term without x is the constant term. Example: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ has degree 3, leading coefficient 2, constant term -5 .

ĐỊNH NGHĨA 3.5 (Nghiệm của đa thức) / DEFINITION 3.5 (Root of a polynomial) – Số a là nghiệm của $P(x)$ nếu $P(a) = 0$. Ví dụ $x = 1$ là nghiệm của $x^2 - 3x + 2$ vì $1 - 3 + 2 = 0$.

Muốn kiểm tra a có là nghiệm không, thay $x = a$ rồi tính.

*A number a is a root of $P(x)$ if $P(a) = 0$. Example: $x = 1$ is a root of $x^2 - 3x + 2$ since $1 - 3 + 2 = 0$.
To test whether a is a root, substitute $x = a$ and compute.*

VÍ DỤ 3.4 (Cộng, trừ đa thức) / EXAMPLE 3.4 (Adding and subtracting) – Cho $A(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ và $B(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 7$. Tính $A(x) + B(x)$ và $A(x) - B(x)$.

Let $A(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ and $B(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 7$. Find $A(x) + B(x)$ and $A(x) - B(x)$.

Lời giải. / Solution.

1. Viết hai đa thức thẳng cột theo lũy thừa giảm dần: x^3 , x^2 , x , số hạng tự do.

Line up the two polynomials in decreasing powers: x^3 , x^2 , x , constant.

2. Cộng từng cột: $(2 + 1)x^3 + (-3 + 2)x^2 + (1 - 4)x + (-5 + 7) = 3x^3 - x^2 - 3x + 2$.

Add column by column: $(2 + 1)x^3 + (-3 + 2)x^2 + (1 - 4)x + (-5 + 7) = 3x^3 - x^2 - 3x + 2$.

3. Trừ từng cột, đổi dấu cả $B(x)$: $(2 - 1)x^3 + (-3 - 2)x^2 + (1 + 4)x + (-5 - 7) = x^3 - 5x^2 + 5x - 12$.

Subtract column by column, changing every sign of $B(x)$: $(2 - 1)x^3 + (-3 - 2)x^2 + (1 + 4)x + (-5 - 7) = x^3 - 5x^2 + 5x - 12$.

Vậy $A + B = 3x^3 - x^2 - 3x + 2$ và $A - B = x^3 - 5x^2 + 5x - 12$.

So $A + B = 3x^3 - x^2 - 3x + 2$ and $A - B = x^3 - 5x^2 + 5x - 12$. ■

VÍ DỤ 3.5 (Kiểm tra nghiệm) / EXAMPLE 3.5 (Testing roots) – Cho $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Trong các số 1, 2, 3, 4, số nào là nghiệm của $f(x)$?

Let $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Which of 1, 2, 3, 4 are roots of $f(x)$?

Lời giải. / Solution.

1. Tính $f(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$, nên 1 là nghiệm.

$f(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$, so 1 is a root.

2. Tính $f(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$, nên 2 là nghiệm.

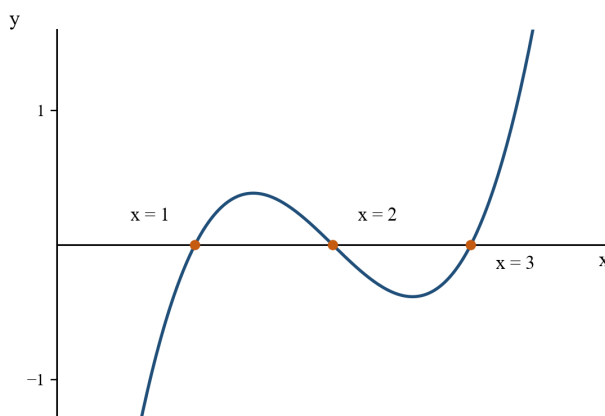
$f(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$, so 2 is a root.

3. Tính $f(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$, nên 3 là nghiệm; $f(4) = 64 - 96 + 44 - 6 = 6 \neq 0$.

$f(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$, so 3 is a root; $f(4) = 64 - 96 + 44 - 6 = 6 \neq 0$.

Vậy các nghiệm trong bốn số đã cho là 1, 2 và 3. Hình 3.1 cho thấy đồ thị cắt trục hoành đúng tại ba điểm đó.

So the roots among the four numbers are 1, 2 and 3. Figure 3.1 shows the graph crossing the x -axis at exactly those points. ■



Hình 3.1. Đồ thị $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ cắt trục hoành tại ba nghiệm
Figure 3.1. Graph of $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ meeting the x-axis at its three roots

Chia đa thức một biến cho đa thức một biến làm giống phép chia số có nhiều chữ số: chia hạng tử cao nhất, nhân ngược, trừ, hạ hạng tử xuống, lặp lại.

Dividing by a polynomial works like long division of numbers: divide the leading terms, multiply back, subtract, bring down the next term, repeat.

Các bước chia đa thức một biến – Steps for polynomial long division

1. Sắp xếp cả hai đa thức theo lũy thừa giảm dần (thiếu bậc nào thì viết 0 ở bậc đó).
Arrange both in decreasing powers (write 0 for a missing power).
2. Chia hạng tử bậc cao nhất của số bị chia cho hạng tử bậc cao nhất của số chia, được hạng tử đầu của thương.
Divide the leading term of the dividend by the leading term of the divisor to get the first term of the quotient.
3. Nhân hạng tử vừa tìm với cả số chia, trừ kết quả khỏi số bị chia (đổi dấu cả hàng).
Multiply that term by the whole divisor and subtract from the dividend (change every sign in the row).
4. Lấy hiệu làm số bị chia mới, lặp lại đến khi bậc của dư nhỏ hơn bậc của số chia.
Take the difference as the new dividend and repeat until the degree of the remainder is below that of the divisor.

VÍ DỤ 3.6 (Nhân và chia đa thức một biến) / EXAMPLE 3.6 (Multiplying and dividing)

– a) Tính $(2x^2 - x + 3)(x - 2)$. b) Chia $(6x^3 - 7x^2 - 16x + 12)$ cho $(3x - 2)$. c) Chia $(x^3 + 2x^2 - 5x + 1)$ cho $(x - 2)$, nêu dư.

a) Compute $(2x^2 - x + 3)(x - 2)$. b) Divide $(6x^3 - 7x^2 - 16x + 12)$ by $(3x - 2)$. c) Divide $(x^3 + 2x^2 - 5x + 1)$ by $(x - 2)$ and state the remainder.

Lời giải. / Solution.

1. a) Nhân từng hạng tử: $2x^2 \cdot x - 2x^2 \cdot 2 - x \cdot x + x \cdot 2 + 3 \cdot x - 3 \cdot 2 = 2x^3 - 4x^2 - x^2 + 2x + 3x - 6 = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 6$.
a) Multiply term by term: $2x^2 \cdot x - 2x^2 \cdot 2 - x \cdot x + x \cdot 2 + 3 \cdot x - 3 \cdot 2 = 2x^3 - 4x^2 - x^2 + 2x + 3x - 6 = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 6$.

2. b) $6x^3 : 3x = 2x^2$; $2x^2(3x - 2) = 6x^3 - 4x^2$; hiệu còn $-3x^2 - 16x + 12$. Tiếp: $-3x^2 : 3x = -x$; $-x(3x - 2) = -3x^2 + 2x$; hiệu còn $-18x + 12$. Tiếp: $-18x : 3x = -6$; $-6(3x - 2) = -18x + 12$; dư 0. Thương $2x^2 - x - 6$.
 b) $6x^3 : 3x = 2x^2$; $2x^2(3x - 2) = 6x^3 - 4x^2$; difference $-3x^2 - 16x + 12$. Next $-3x^2 : 3x = -x$; $-x(3x - 2) = -3x^2 + 2x$; difference $-18x + 12$. Next $-18x : 3x = -6$; $-6(3x - 2) = -18x + 12$; remainder 0. Quotient $2x^2 - x - 6$.
3. c) $x^3 : x = x^2$; $x^2(x - 2) = x^3 - 2x^2$; hiệu $4x^2 - 5x + 1$. Tiếp $4x$; $4x(x - 2) = 4x^2 - 8x$; hiệu $3x + 1$. Tiếp 3; $3(x - 2) = 3x - 6$; hiệu 7. Thương $x^2 + 4x + 3$, dư 7.
 c) $x^3 : x = x^2$; $x^2(x - 2) = x^3 - 2x^2$; difference $4x^2 - 5x + 1$. Next $4x$; $4x(x - 2) = 4x^2 - 8x$; difference $3x + 1$. Next 3; $3(x - 2) = 3x - 6$; difference 7. Quotient $x^2 + 4x + 3$, remainder 7.
4. Thử lại phần c: $(x - 2)(x^2 + 4x + 3) + 7 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 + 7 = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$.
 Dư 7 đúng bằng giá trị của đa thức tại $x = 2$: $8 + 8 - 10 + 1 = 7$.
 Check part c: $(x - 2)(x^2 + 4x + 3) + 7 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 + 7 = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$. The remainder 7 equals the value at $x = 2$: $8 + 8 - 10 + 1 = 7$. ■

NHẬN XÉT / REMARK – Chia cho $(x - a)$ thì dư bằng giá trị của đa thức tại $x = a$. Vì vậy đa thức chia hết cho $(x - a)$ khi và chỉ khi a là nghiệm. Chương 15 trình bày kỹ định lý này (định lý Bézout) ở mức chuyên.

Dividing by $(x - a)$ leaves a remainder equal to the value of the polynomial at $x = a$. So a polynomial is divisible by $(x - a)$ exactly when a is a root. Chapter 15 treats this fully (Bézout's theorem) at specialist level.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Quên đổi dấu cả hàng khi trừ trong phép chia: $-(-4x^2) = +4x^2$, không phải $-4x^2$.

Forgetting to change every sign when subtracting in long division: $-(-4x^2) = +4x^2$, not $-4x^2$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Bỏ trống bậc thiếu khi chia: $x^3 + 1$ phải viết $x^3 + 0x^2 + 0x + 1$.

Leaving a missing power blank in long division: $x^3 + 1$ must be written $x^3 + 0x^2 + 0x + 1$.

3.3. Bảy hằng đẳng thức đáng nhớ – The seven standard identities

Hằng đẳng thức là đẳng thức đúng với mọi giá trị của các chữ. Bảy hằng đẳng thức sau dùng để khai triển nhanh một tích, và đọc ngược lại để phân tích đa thức thành nhân tử. Em cần thuộc cả hai chiều.

An identity is an equality that holds for all values of the letters. The seven identities that follow expand a product quickly and, read backwards, factorise a polynomial. You need both directions by heart.

ĐỊNH LÝ 3.6 (Bình phương của một tổng) / THEOREM 3.6 (Square of a sum) – Với mọi số a, b : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ví dụ: $(10 + 3)^2 = 169 = 100 + 60 + 9$.

For all numbers a, b : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Example: $(10 + 3)^2 = 169 = 100 + 60 + 9$.

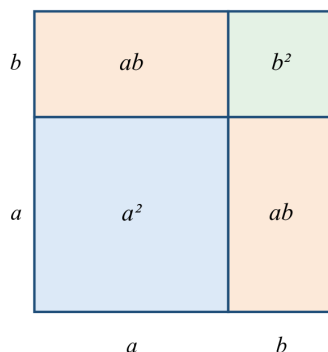
Chứng minh. / Proof.

Nhân hai thừa số giống nhau rồi gộp hạng tử đồng dạng:

Multiply the two equal factors and collect like terms:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (3.1)$$

■



Hình 3.2. Hình vuông cạnh $a + b$ gồm hai hình vuông a^2 , b^2 và hai hình chữ nhật ab

Figure 3.2. A square of side $a + b$ made of squares a^2 , b^2 and two rectangles ab

ĐỊNH LÝ 3.7 (Bình phương của một hiệu) / THEOREM 3.7 (Square of a difference) –

Với mọi số a , b : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Ví dụ: $(10 - 3)^2 = 49 = 100 - 60 + 9$.

For all numbers a , b : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Example: $(10 - 3)^2 = 49 = 100 - 60 + 9$.

ĐỊNH LÝ 3.8 (Hiệu hai bình phương) / THEOREM 3.8 (Difference of two squares) –

Với mọi số a , b : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Ví dụ: $10^2 - 3^2 = 91 = 7 \cdot 13$.

For all numbers a , b : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Example: $10^2 - 3^2 = 91 = 7 \cdot 13$.

ĐỊNH LÝ 3.9 (Lập phương của một tổng, một hiệu) / THEOREM 3.9 (Cube of a sum, of a difference) –

Với mọi số a , b : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ và $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Ví dụ: $(2 + 1)^3 = 27 = 8 + 12 + 6 + 1$ và $(3 - 1)^3 = 8 = 27 - 27 + 9 - 1$.

For all numbers a , b : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ and $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Example: $(2 + 1)^3 = 27 = 8 + 12 + 6 + 1$ and $(3 - 1)^3 = 8 = 27 - 27 + 9 - 1$.

ĐỊNH LÝ 3.10 (Tổng, hiệu hai lập phương) / THEOREM 3.10 (Sum, difference of two cubes) –

Với mọi số a , b : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ và $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Ví dụ: $2^3 + 1^3 = 9 = 3 \cdot (4 - 2 + 1)$ và $3^3 - 1^3 = 26 = 2 \cdot (9 + 3 + 1)$.

For all numbers a , b : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ and $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Example: $2^3 + 1^3 = 9 = 3 \cdot (4 - 2 + 1)$ and $3^3 - 1^3 = 26 = 2 \cdot (9 + 3 + 1)$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ · $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ · $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ · $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$. Dấu ở thừa số thứ hai của hai lập phương: tổng thì ab mang dấu trừ, hiệu thì ab mang dấu cộng.

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ · $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ · $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ · $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$. In the second factor of the cubes: for a sum the ab term is negative, for a difference it is positive.

VÍ DỤ 3.7 (Tính nhanh bằng hằng đẳng thức) / EXAMPLE 3.7 (Quick computation with identities) – Tính nhanh: a) 102^2 ; b) $98 \cdot 102$; c) $1001^2 - 999^2$; d) 99^3 .
Compute quickly: a) 102^2 ; b) $98 \cdot 102$; c) $1001^2 - 999^2$; d) 99^3 .

Lời giải. / Solution.

1. a) Tách $102 = 100 + 2$: $102^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 = 10.000 + 400 + 4 = 10.404$.
a) Split $102 = 100 + 2$: $102^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 = 10,000 + 400 + 4 = 10,404$.
2. b) $98 = 100 - 2$, $102 = 100 + 2$: tích bằng $100^2 - 2^2 = 10.000 - 4 = 9.996$.
b) $98 = 100 - 2$, $102 = 100 + 2$: the product is $100^2 - 2^2 = 10,000 - 4 = 9,996$.
3. c) Hiệu hai bình phương: $(1001 - 999)(1001 + 999) = 2 \cdot 2000 = 4000$.
c) Difference of squares: $(1001 - 999)(1001 + 999) = 2 \cdot 2000 = 4000$.
4. d) $99 = 100 - 1$: $99^3 = 100^3 - 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1 - 1 = 1.000.000 - 30.000 + 300 - 1 = 970.299$.
d) $99 = 100 - 1$: $99^3 = 100^3 - 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1 - 1 = 1,000,000 - 30,000 + 300 - 1 = 970,299$. ■

VÍ DỤ 3.8 (Khai triển và rút gọn) / EXAMPLE 3.8 (Expand and simplify) – Rút gọn $A = (x - 2)^3 - (x + 1)(x^2 - x + 1) + 6x^2$.
Simplify $A = (x - 2)^3 - (x + 1)(x^2 - x + 1) + 6x^2$.

Lời giải. / Solution.

1. Khai triển lập phương của một hiệu: $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
Expand the cube of a difference: $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
2. Nhận ra tổng hai lập phương: $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$.
Spot the sum of two cubes: $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$.
3. Thay vào và thu gọn: $A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 - 1 + 6x^2 = 12x - 9$.
Substitute and simplify: $A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 - 1 + 6x^2 = 12x - 9$.

Vậy $A = 12x - 9$.

So $A = 12x - 9$. ■

Nhiều bài cho biết tổng và tích của hai số chứ không cho từng số. Khi đó đừng đi tìm hai số, hãy biến đổi biểu thức về tổng $x + y$ và tích xy bằng hằng đẳng thức: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ và $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$.

Many problems give the sum and product of two numbers but not the numbers. Do not look for the numbers: rewrite the expression through the sum $x + y$ and product xy using $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ and $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$.

VÍ DỤ 3.9 (Biết tổng và tích) / EXAMPLE 3.9 (Given sum and product) – a) Cho $x + y = 5$ và $xy = 6$. Tính $x^2 + y^2$, $(x - y)^2$, $x^3 + y^3$. b) Cho $a + b = 1$. Tính $a^3 + b^3 + 3ab$.
a) Given $x + y = 5$ and $xy = 6$, find $x^2 + y^2$, $(x - y)^2$, $x^3 + y^3$. b) Given $a + b = 1$, find $a^3 + b^3 + 3ab$.

Lời giải. / Solution.

1. a) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 25 - 12 = 13$.

a) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 25 - 12 = 13$.

2. $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 25 - 24 = 1$.

$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 25 - 24 = 1$.

3. $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 125 - 3 \cdot 6 \cdot 5 = 35$.

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 125 - 3 \cdot 6 \cdot 5 = 35$.

4. b) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 1 - 3ab$, vì $a + b = 1$.

b) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 1 - 3ab$, since $a + b = 1$.

5. Cộng thêm $3ab$: $a^3 + b^3 + 3ab = 1 - 3ab + 3ab = 1$.

Add $3ab$: $a^3 + b^3 + 3ab = 1 - 3ab + 3ab = 1$.

Vậy các giá trị là 13, 1, 35 và 1. Kiểm bằng $x, y = 2, 3$: $4 + 9 = 13$, $(2 - 3)^2 = 1$, $8 + 27 = 35$.

So the values are 13, 1, 35 and 1. Check with $x, y = 2, 3$: $4 + 9 = 13$, $(2 - 3)^2 = 1$, $8 + 27 = 35$.



LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết $(a + b)^2 = a^2 + b^2$: thiếu hạng tử giữa $2ab$.
Thử $a = 1, b = 1$ sẽ thấy $4 \neq 2$.

Writing $(a + b)^2 = a^2 + b^2$: the middle term $2ab$ is missing. Try $a = 1, b = 1$ and see $4 \neq 2$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhầm dấu trong $(a - b)^3$: dấu xen kẽ $+-+ -$;
hạng tử đầu a^3 dương, hạng tử cuối b^3 âm.

Wrong signs in $(a - b)^3$: the signs alternate $+-+ -$; a^3 is positive and b^3 is negative.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Viết $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$ (sai dấu của ab) hoặc coi $a^2 - ab + b^2$ là bình phương của một hiệu.

Writing $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$ (wrong sign of ab) or treating $a^2 - ab + b^2$ as a square of a difference.

3.4. Phân tích đa thức thành nhân tử – Factorising polynomials

Phân tích đa thức thành nhân tử là viết đa thức đó thành tích của những đa thức đơn giản hơn. Ví dụ $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Đây là phép biến đổi ngược của khai triển; em dùng nó khi rút gọn phân thức và giải phương trình.

To factorise a polynomial is to write it as a product of simpler polynomials. Example: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. It is the reverse of expanding; you use it when simplifying fractions and solving equations.

Bốn cách và thứ tự thử – Four methods and the order to try them

1. Đặt nhân tử chung: tìm ƯCLN (ước chung lớn nhất) của các hệ số và các biến có mặt ở mọi hạng tử, rồi đặt ra ngoài ngoặc. Ví dụ $6x^2y - 9xy^2 = 3xy(2x - 3y)$.

Common factor: find the HCF (highest common factor) of the coefficients and the variables present in every term, and take it out. Example $6x^2y - 9xy^2 = 3xy(2x - 3y)$.

2. Dùng hằng đẳng thức: đếm số hạng tử. Hai hạng tử gọi hiệu hai bình phương hoặc tổng, hiệu hai lập phương; ba hạng tử gọi bình phương của tổng, hiệu.
Use an identity: count the terms. Two terms suggest a difference of squares or a sum or difference of cubes; three terms suggest a square of a sum or difference.
3. Nhóm hạng tử: ghép các hạng tử thành nhóm sao cho sau khi đặt nhân tử chung ở mỗi nhóm, các nhóm còn lại cùng một nhân tử.
Grouping: pair terms so that after taking out a common factor from each group, the groups share one factor.
4. Tách hạng tử: với $ax^2 + bx + c$, tách $bx = b_1x + b_2x$ sao cho $b_1 \cdot b_2 = a \cdot c$ và $b_1 + b_2 = b$, rồi nhóm.
Splitting a term: for $ax^2 + bx + c$, split $bx = b_1x + b_2x$ with $b_1 \cdot b_2 = a \cdot c$ and $b_1 + b_2 = b$, then group.
5. Kiểm lại: nhân các nhân tử ra, phải được đa thức ban đầu. Mỗi nhân tử còn phân tích tiếp được thì phân tích tiếp.
Check: multiply the factors out to get the original. Keep factorising any factor that can still be split.

VÍ DỤ 3.10 (Bốn cách phân tích) / EXAMPLE 3.10 (The four methods) – Phân tích thành nhân tử: a) $6x^2y - 9xy^2$; b) $x^2 - 4x + 4 - y^2$; c) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$; d) $8x^3 - 27$.

Factorise: a) $6x^2y - 9xy^2$; b) $x^2 - 4x + 4 - y^2$; c) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$; d) $8x^3 - 27$.

Lời giải. / Solution.

1. a) ƯCLN của 6 và 9 là 3, biến chung là x và y một lần: $6x^2y - 9xy^2 = 3xy(2x - 3y)$.
a) HCF of 6 and 9 is 3, and x and y appear in both: $6x^2y - 9xy^2 = 3xy(2x - 3y)$.
2. b) Ba hạng tử đầu là bình phương của một hiệu: $x^2 - 4x + 4 - y^2 = (x - 2)^2 - y^2$ (hiệu hai bình phương) $= (x - 2 - y)(x - 2 + y)$.
b) The first three terms are a square of a difference: $x^2 - 4x + 4 - y^2 = (x - 2)^2 - y^2$ (difference of squares) $= (x - 2 - y)(x - 2 + y)$.
3. c) Nhóm hai hạng tử đầu và hai hạng tử cuối: $x^2(x - 2) - 9(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 9) = (x - 2)(x - 3)(x + 3)$.
c) Group the first two and the last two: $x^2(x - 2) - 9(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 9) = (x - 2)(x - 3)(x + 3)$.
4. d) $8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$.
d) $8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$.

Kiểm lại câu a: $3xy(2x - 3y) = 6x^2y - 9xy^2$, đúng đa thức đầu bài.

Check part a: $3xy(2x - 3y) = 6x^2y - 9xy^2$, the original polynomial. ■

VÍ DỤ 3.11 (Tách hạng tử) / EXAMPLE 3.11 (Splitting a term) – Phân tích thành nhân tử:

a) $x^2 - 5x + 6$; b) $2x^2 + 5x - 3$.

Factorise: a) $x^2 - 5x + 6$; b) $2x^2 + 5x - 3$.

Lời giải. / Solution.

1. a) Cần hai số có tổng -5 và tích $1 \cdot 6 = 6$: đó là -2 và -3 . Tách $-5x = -2x - 3x$.
a) Look for two numbers with sum -5 and product $1 \cdot 6 = 6$: they are -2 and -3 . Split $-5x = -2x - 3x$.
 2. $x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$.
 $x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$.
 3. b) Cần hai số có tổng 5 và tích $2 \cdot (-3) = -6$: đó là 6 và -1 . Tách $5x = 6x - x$.
b) Look for two numbers with sum 5 and product $2 \cdot (-3) = -6$: they are 6 and -1 . Split $5x = 6x - x$.
 4. $2x^2 + 6x - x - 3 = 2x(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(2x - 1)$.
 $2x^2 + 6x - x - 3 = 2x(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(2x - 1)$.
- Vậy $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ và $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$.
So $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ and $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$. ■

VÍ DỤ 3.12 (Phân tích để giải phương trình) / EXAMPLE 3.12 (Factorise to solve) – Giải phương trình: a) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$; b) $2x^2 + 5x - 3 = 0$.
Solve: a) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$; b) $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Lời giải. / Solution.

1. a) Phân tích vế trái (ví dụ trước): $(x - 2)(x - 3)(x + 3) = 0$.
a) Factorise the left side (previous example): $(x - 2)(x - 3)(x + 3) = 0$.
2. Một tích bằng 0 khi có ít nhất một thừa số bằng 0: $x = 2$ hoặc $x = 3$ hoặc $x = -3$.
A product is 0 when at least one factor is 0: $x = 2$ or $x = 3$ or $x = -3$.
3. b) $(2x - 1)(x + 3) = 0$ nên $x = 1/2$ hoặc $x = -3$.
b) $(2x - 1)(x + 3) = 0$, so $x = 1/2$ or $x = -3$.
4. Thử lại: $2 \cdot (1/4) + 5/2 - 3 = 0$ và $2 \cdot 9 - 15 - 3 = 0$.
Check: $2 \cdot (1/4) + 5/2 - 3 = 0$ and $2 \cdot 9 - 15 - 3 = 0$.

Vậy a) tập nghiệm $\{-3; 2; 3\}$; b) tập nghiệm $\{-3; 1/2\}$.

So a) the solution set is $\{-3; 2; 3\}$; b) the solution set is $\{-3; 1/2\}$. ■

Hai cách phân tích hiếm gặp hơn nhưng xuất hiện ở câu phân loại: thêm bớt cùng một hạng tử để tạo hiệu hai bình phương, và dùng chính hằng đẳng thức để chứng minh một số là hợp số.

Two less common methods appear in differentiating questions: adding and subtracting the same term to create a difference of squares, and using an identity to show a number is composite.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – $x^4 + 4$ không có nhân tử chung và không phải hiệu hai bình phương. Ta thấy $x^4 = (x^2)^2$ và $4 = 2^2$. Bình phương $(x^2 + 2)^2$ có hạng tử giữa $4x^2$ mà đề không có, nên cộng thêm $4x^2$ và trừ đi $4x^2$ để đủ một bình phương. Phần dư $-4x^2$ cũng là bình phương $(2x)^2$.

$x^4 + 4$ has no common factor and is not a difference of squares. Note $x^4 = (x^2)^2$ and $4 = 2^2$. The square $(x^2 + 2)^2$ has a middle term $4x^2$ that the expression lacks, so add and subtract $4x^2$ to complete a square. The leftover $-4x^2$ is also a square, $(2x)^2$.

VÍ DỤ 3.13 (Thêm bớt hạng tử) / EXAMPLE 3.13 (Adding and subtracting a term) – a)
Phân tích $x^4 + 4$ và $x^4 + x^2 + 1$. b) Chứng minh $n^4 + 4$ là hợp số với mọi số nguyên $n > 1$.
a) Factorise $x^4 + 4$ and $x^4 + x^2 + 1$. b) Prove that $n^4 + 4$ is composite for every integer $n > 1$.

Lời giải. / Solution.

1. a) $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$.
a) $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$.
2. $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.
 $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.
3. b) Theo câu a), $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$.
b) By part a), $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$.
4. Thừa số thứ hai: $n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1 \geq 1 + 1 = 2$ khi $n \geq 2$. Thừa số thứ nhất lớn hơn thừa số thứ hai và cũng ≥ 2 .
Second factor: $n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1 \geq 1 + 1 = 2$ when $n \geq 2$. The first factor is larger and also ≥ 2 .

Tích của hai số nguyên đều ≥ 2 là hợp số. Vậy $n^4 + 4$ là hợp số với $n > 1$ ($n = 2$: $20 = 10 \cdot 2$).

A product of two integers both ≥ 2 is composite. So $n^4 + 4$ is composite for $n > 1$ ($n = 2$: $20 = 10 \cdot 2$). ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Đặt nhân tử chung mà quên dấu: $-x - 2 = -(x + 2)$, không phải $-(x - 2)$. Kiểm bằng cách nhân lại.

Taking out a common factor with the wrong sign: $-x - 2 = -(x + 2)$, not $-(x - 2)$. Check by multiplying back.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Nhóm hạng tử nhưng hai nhóm không ra cùng nhân tử, rồi vẫn ghi kết quả. Khi đó phải đổi cách nhóm.

Grouping terms but getting different factors in the two groups, then writing a result anyway. Change the grouping instead.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Dừng khi còn nhân tử phân tích được: $(x - 2)(x^2 - 9)$ chưa xong, phải viết tiếp $(x - 3)(x + 3)$.

Stopping while a factor can still be split: $(x - 2)(x^2 - 9)$ is not finished; continue to $(x - 3)(x + 3)$.

3.5. Phân thức đại số: điều kiện xác định và rút gọn – Algebraic fractions: domain and simplification

Phân thức đại số là biểu thức dạng A/B , trong đó A và B là đa thức và B khác đa thức không. Ví dụ $(x + 1)/(x - 2)$ và $3/(x^2 + 1)$. A gọi là tử thức, B gọi là mẫu thức. Số nguyên và đa thức cũng là phân thức (mẫu bằng 1).

An algebraic fraction has the form A/B , where A and B are polynomials and B is not the zero polynomial. Examples: $(x + 1)/(x - 2)$ and $3/(x^2 + 1)$. A is the numerator and B the denominator. Numbers and polynomials are fractions too (denominator 1).

ĐỊNH NGHĨA 3.11 (Điều kiện xác định) / DEFINITION 3.11 (Domain condition) – Điều kiện xác định (ĐKXD) của phân thức A/B là điều kiện để $B \neq 0$, tức là để phân thức có nghĩa. Ví dụ phân thức $5/(x-2)$ có ĐKXD $x \neq 2$, vì $x = 2$ làm mẫu bằng 0.

The domain condition of A/B is the condition $B \neq 0$, which makes the fraction meaningful. Example: $5/(x-2)$ requires $x \neq 2$, because $x = 2$ makes the denominator 0.

TÍNH CHẤT 3.12 (Tính chất cơ bản của phân thức) / PROPERTY 3.12 (Basic property of fractions) – Tính chất cơ bản: $A/B = (A \cdot M)/(B \cdot M)$ với M là đa thức khác 0, và $A/B = (A : N)/(B : N)$ với N là nhân tử chung của A và B . Hai phân thức A/B và C/D bằng nhau khi $A \cdot D = B \cdot C$. Quy tắc đổi dấu: $A/B = (-A)/(-B)$.

Basic property: $A/B = (A \cdot M)/(B \cdot M)$ for a non-zero polynomial M , and $A/B = (A : N)/(B : N)$ for a common factor N of A and B . Two fractions A/B and C/D are equal when $A \cdot D = B \cdot C$. Sign rule: $A/B = (-A)/(-B)$.

Các bước rút gọn phân thức – Steps to simplify a fraction

1. Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (mục 3.4).
Factorise numerator and denominator (section 3.4).
2. Viết ĐKXD: mọi nhân tử của mẫu ban đầu khác 0. Ghi điều kiện NGAY, trước khi rút gọn.
Write the domain condition: every factor of the original denominator is non-zero. Write it BEFORE simplifying.
3. Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung. Nhân tử đối nhau như $(x-2)$ và $(2-x)$ thì đổi dấu: $2-x = -(x-2)$.
Divide numerator and denominator by the common factor. Opposite factors like $(x-2)$ and $(2-x)$ differ by a sign: $2-x = -(x-2)$.
4. Kết luận phân thức rút gọn kèm ĐKXD.
State the simplified fraction together with the domain condition.

VÍ DỤ 3.14 (Điều kiện xác định và rút gọn) / EXAMPLE 3.14 (Domain and simplification) – a) Tìm ĐKXD của $(x+1)/(x^2-4x+3)$. b) Rút gọn $(x^2-9)/(x^2-6x+9)$. c) Rút gọn $(x^2-4)/(2-x)$.

a) Find the domain condition of $(x+1)/(x^2-4x+3)$. b) Simplify $(x^2-9)/(x^2-6x+9)$. c) Simplify $(x^2-4)/(2-x)$.

Lời giải. / Solution.

1. a) Phân tích mẫu: $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$. Mẫu khác 0 khi $x \neq 1$ và $x \neq 3$.
a) Factorise the denominator: $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$. It is non-zero when $x \neq 1$ and $x \neq 3$.
2. b) Tử $(x-3)(x+3)$, mẫu $(x-3)^2$; ĐKXD $x \neq 3$. Chia cho $(x-3)$: kết quả $(x+3)/(x-3)$.
b) Numerator $(x-3)(x+3)$, denominator $(x-3)^2$; $x \neq 3$. Divide by $(x-3)$: the result is $(x+3)/(x-3)$.
3. c) Tử $(x-2)(x+2)$, mẫu $2-x = -(x-2)$; ĐKXD $x \neq 2$. Chia cho $(x-2)$: kết quả $-(x+2)$.

c) Numerator $(x - 2)(x + 2)$, denominator $2 - x = -(x - 2)$; $x \neq 2$. Divide by $(x - 2)$: the result is $-(x + 2)$.

Vậy a) $x \neq 1$ và $x \neq 3$; b) $(x + 3)/(x - 3)$ với $x \neq 3$; c) $-x - 2$ với $x \neq 2$.

So a) $x \neq 1$ and $x \neq 3$; b) $(x + 3)/(x - 3)$ for $x \neq 3$; c) $-x - 2$ for $x \neq 2$. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Gạch số hạng thay vì gạch nhân tử: $(x + 2)/2$ không bằng $x + 1$. Chỉ được chia tử và mẫu cho nhân tử của CẢ tử lẫn mẫu.

Cancelling terms instead of factors: $(x + 2)/2$ is not $x + 1$. Only cancel factors of the WHOLE numerator and the WHOLE denominator.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Rút gọn xong mới tìm ĐKXĐ từ phân thức mới: ở câu c) chỉ nhìn $-(x + 2)$ thì mất điều kiện $x \neq 2$ của đề gốc.

Finding the domain condition after simplifying: in part c) looking only at $-(x + 2)$ loses the condition $x \neq 2$ of the original.

3.6. Bốn phép tính với phân thức và bài rút gọn tổng hợp – The four operations on fractions and the combined simplification

Cộng, trừ, nhân, chia phân thức làm giống phân số, chỉ khác là tử và mẫu là đa thức nên phải phân tích thành nhân tử trước. Cùng mẫu thì cộng hoặc trừ tử, giữ mẫu: $A/C + B/C = (A + B)/C$. Khác mẫu thì quy đồng. Nhân thì tử nhân tử, mẫu nhân mẫu: $(A/B) \cdot (C/D) = (A \cdot C)/(B \cdot D)$. Chia thì nhân với phân thức nghịch đảo: $(A/B) : (C/D) = (A \cdot D)/(B \cdot C)$, với C khác 0.

Adding, subtracting, multiplying and dividing fractions works as for numbers, except that numerators and denominators are polynomials, so factorise first. With equal denominators add or subtract numerators: $A/C + B/C = (A + B)/C$. Otherwise use a common denominator. To multiply, multiply numerators and denominators: $(A/B) \cdot (C/D) = (A \cdot C)/(B \cdot D)$. To divide, multiply by the reciprocal: $(A/B) : (C/D) = (A \cdot D)/(B \cdot C)$, with C non-zero.

Các bước cộng, trừ phân thức khác mẫu – Steps for adding and subtracting fractions with different denominators

1. Phân tích mọi mẫu thành nhân tử và viết ĐKXĐ.
Factorise every denominator and write the domain condition.
2. Mẫu thức chung (MTC) gồm mọi nhân tử xuất hiện, mỗi nhân tử lấy số mũ lớn nhất.
Ví dụ mẫu $x - 1$, $x + 1$, $x^2 - 1$ có MTC $(x - 1)(x + 1)$.
The common denominator contains every factor that appears, each with its highest power.
Example: denominators $x - 1$, $x + 1$, $x^2 - 1$ have common denominator $(x - 1)(x + 1)$.
3. Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử còn thiếu để mẫu thành MTC.
Multiply numerator and denominator of each fraction by the missing factor to reach the common denominator.
4. Cộng hoặc trừ các tử (đặt tử trừ trong ngoặc), thu gọn tử, phân tích tử rồi rút gọn.
Add or subtract the numerators (bracket a subtracted numerator), simplify, factorise and cancel.

VÍ DỤ 3.15 (Cộng, trừ phân thức) / EXAMPLE 3.15 (Adding and subtracting) – Rút gọn

$$Q = (x+1)/(x-1) - (x-1)/(x+1) + 4/(x^2-1).$$

$$\text{Simplify } Q = (x+1)/(x-1) - (x-1)/(x+1) + 4/(x^2-1).$$

Lời giải. / Solution.

1. Mẫu: $x-1, x+1, x^2-1 = (x-1)(x+1)$. ĐKXĐ: $x \neq 1$ và $x \neq -1$. MTC là $(x-1)(x+1)$.

Denominators: $x-1, x+1, x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Domain: $x \neq 1$ and $x \neq -1$. Common denominator $(x-1)(x+1)$.

2. Quy đồng: $Q = [(x+1)^2 - (x-1)^2 + 4]/[(x-1)(x+1)]$.

$$\text{Common denominator: } Q = [(x+1)^2 - (x-1)^2 + 4]/[(x-1)(x+1)].$$

3. Tử: $(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1) + 4 = 4x + 4 = 4(x+1)$.

$$\text{Numerator: } (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1) + 4 = 4x + 4 = 4(x+1).$$

4. Chia cho $(x+1)$: $Q = 4/(x-1)$.

$$\text{Cancel } (x+1): Q = 4/(x-1).$$

Vậy $Q = 4/(x-1)$ với $x \neq 1$ và $x \neq -1$.

So $Q = 4/(x-1)$ for $x \neq 1$ and $x \neq -1$. ■

VÍ DỤ 3.16 (Nhân, chia phân thức) / EXAMPLE 3.16 (Multiplying and dividing) – Rút gọn

$$R = (x^2 - 4)/(x^2 + 2x + 1) : (x-2)/(x+1).$$

$$\text{Simplify } R = (x^2 - 4)/(x^2 + 2x + 1) : (x-2)/(x+1).$$

Lời giải. / Solution.

1. Phân tích: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ và $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. ĐKXĐ: $x \neq -1$.

$$\text{Factorise: } x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \text{ and } x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2. \text{ Domain: } x \neq -1.$$

2. Phân thức chia là $(x-2)/(x+1)$ phải khác 0, nên thêm điều kiện $x \neq 2$.

The divisor $(x-2)/(x+1)$ must be non-zero, which adds the condition $x \neq 2$.

3. Nhân nghịch đảo: $R = [(x-2)(x+2)/(x+1)^2] \cdot [(x+1)/(x-2)]$.

$$\text{Multiply by the reciprocal: } R = [(x-2)(x+2)/(x+1)^2] \cdot [(x+1)/(x-2)].$$

4. Chia tử và mẫu cho $(x-2)(x+1)$: $R = (x+2)/(x+1)$.

$$\text{Cancel } (x-2)(x+1): R = (x+2)/(x+1).$$

Vậy $R = (x+2)/(x+1)$ với $x \neq -1$ và $x \neq 2$.

So $R = (x+2)/(x+1)$ for $x \neq -1$ and $x \neq 2$. ■

Câu rút gọn của đề vào 10 thường gộp mọi phép tính rồi hỏi thêm ba ý: tính giá trị tại một điểm, tìm x để biểu thức bằng một số cho trước, tìm x nguyên để biểu thức nguyên. Mỗi ý có bước riêng, ví dụ sau đi đủ cả bốn ý.

The simplification question usually combines all operations and then asks three more parts: a value at a point, the x giving a stated value, the integer x giving an integer value. Each part has its own steps; the next example goes through all four.

VÍ DỤ 3.17 (Bài rút gọn đủ bốn ý) / EXAMPLE 3.17 (A full four-part simplification) –

Cho $A = [(x+1)/(x-2) - (x-1)/(x+2)] : 3/(x+2)$. a) Rút gọn A. b) Tính A tại $x = 4$. c) Tìm x để $A = 3$. d) Tìm số nguyên x để A là số nguyên.

Let $A = [(x+1)/(x-2) - (x-1)/(x+2)] : 3/(x+2)$. a) Simplify A. b) Find A at $x = 4$. c) Find x with $A = 3$. d) Find the integers x for which A is an integer.

Lời giải. / Solution.

1. a) ĐKXĐ: $x \neq 2$ và $x \neq -2$. Quy đồng trong ngoặc, MTC $(x-2)(x+2)$: tử $(x+1)(x+2) - (x-1)(x-2) = (x^2 + 3x + 2) - (x^2 - 3x + 2) = 6x$.
a) Domain: $x \neq 2$ and $x \neq -2$. Common denominator $(x-2)(x+2)$ inside the bracket: numerator $(x+1)(x+2) - (x-1)(x-2) = (x^2 + 3x + 2) - (x^2 - 3x + 2) = 6x$.
2. Chia: $A = [6x/((x-2)(x+2))] \cdot [(x+2)/3] = 2x/(x-2)$.
Divide: $A = [6x/((x-2)(x+2))] \cdot [(x+2)/3] = 2x/(x-2)$.
3. b) $x = 4$ thỏa ĐKXĐ: $A = 2 \cdot 4/(4-2) = 4$.
b) $x = 4$ satisfies the domain: $A = 2 \cdot 4/(4-2) = 4$.
4. c) $2x/(x-2) = 3 \Rightarrow 2x = 3x - 6 \Rightarrow x = 6$. Đối chiếu ĐKXĐ: $6 \neq \pm 2$, nhận.
c) $2x/(x-2) = 3 \Rightarrow 2x = 3x - 6 \Rightarrow x = 6$. Check the domain: $6 \neq \pm 2$, accepted.
5. d) Tách phần nguyên: $2x/(x-2) = 2 + 4/(x-2)$. A nguyên khi $(x-2)$ là ước của 4: $x-2 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$, tức $x \in \{3; 1; 4; 0; 6; -2\}$.
d) Split off the integer part: $2x/(x-2) = 2 + 4/(x-2)$. A is an integer when $(x-2)$ divides 4: $x-2 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$, so $x \in \{3; 1; 4; 0; 6; -2\}$.
6. Đối chiếu ĐKXĐ: loại $x = -2$.
Check the domain: reject $x = -2$.

Vậy a) $A = 2x/(x-2)$; b) $A = 4$; c) $x = 6$; d) $x \in \{0; 1; 3; 4; 6\}$.

So a) $A = 2x/(x-2)$; b) $A = 4$; c) $x = 6$; d) $x \in \{0; 1; 3; 4; 6\}$. ■

NHẬN XÉT / REMARK – Mỗi lần tìm được giá trị x , phải đối chiếu ĐKXĐ. Ở ý d) giá trị $x = -2$ cho $A = 1$ nhưng bị loại, vì ban đầu mẫu $x+2$ bằng 0.

Every time you find a value of x , check it against the domain. In part d) $x = -2$ would give $A = 1$ but is rejected, because the original denominator $x+2$ is 0 there.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Trừ phân thức mà quên đặt ngoặc cho tử: $a/c - (b+d)/c = (a-b-d)/c$, không phải $(a-b+d)/c$.

Subtracting fractions without brackets around the numerator: $a/c - (b+d)/c = (a-b-d)/c$, not $(a-b+d)/c$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Chia phân thức mà không viết thêm điều kiện cho phân thức chia khác 0.

Dividing by a fraction without adding the condition that the divisor is non-zero.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Giải xong phương trình ở ý c) không đối chiếu ĐKXĐ, nhận cả nghiệm làm mẫu bằng 0.

Solving part c) without checking the domain and accepting a root that makes a denominator 0.

PHẢI THUỘC / MEMORISE – $(A/B) : (C/D) = (A \cdot D)/(B \cdot C)$, điều kiện B, C, D khác 0.

Phép trừ: $a/c - b/c = (a - b)/c$. Đổi dấu: $a - b = -(b - a)$.

$(A/B) : (C/D) = (A \cdot D)/(B \cdot C)$, with B, C, D non-zero. Subtraction: $a/c - b/c = (a - b)/c$. Sign change: $a - b = -(b - a)$.

3.7. Nâng cao: giá trị nguyên và biểu thức có điều kiện – Advanced: integer values and expressions with a condition

Các bước tìm x nguyên để phân thức nguyên – Steps to find integer x making a fraction an integer

1. Viết ĐKXĐ. Chia tử cho mẫu để tách $A/B = (\text{đa thức nguyên}) + (\text{số})/B$.
Write the domain. Divide to split $A/B = (\text{integer polynomial}) + (\text{constant})/B$.
2. Với x nguyên, phần đa thức là số nguyên, nên A/B nguyên khi và chỉ khi $(\text{số})/B$ nguyên, tức số đó chia hết cho B (B là ước của số đó).
For integer x the polynomial part is an integer, so A/B is an integer exactly when $(\text{constant})/B$ is, that is the constant is divisible by B (B is a divisor of it).
3. Liệt kê mọi ước (cả ước âm), giải x từ $B = \text{ước}$, đối chiếu ĐKXĐ và thử lại một hai giá trị.
List all divisors (negatives too), solve for x from $B = \text{divisor}$, check the domain and test one or two values.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – Tử $x^2 + x + 2$ bậc 2, mẫu $x - 1$ bậc 1: chia ra được phần đa thức. Vì $x^2 + x = x(x - 1) + 2x = x(x - 1) + 2(x - 1) + 2$, tử bằng $(x - 1)(x + 2) + 4$. Phần còn lại $4/(x - 1)$ là số, nên chỉ cần $x - 1$ là ước của 4.

The numerator $x^2 + x + 2$ has degree 2 and the denominator $x - 1$ degree 1, so division gives a polynomial part. Since $x^2 + x = x(x - 1) + 2x = x(x - 1) + 2(x - 1) + 2$, the numerator is $(x - 1)(x + 2) + 4$. The remainder $4/(x - 1)$ is a constant over the denominator, so $x - 1$ only needs to divide 4.

VÍ DỤ 3.18 (Giá trị nguyên của phân thức) / EXAMPLE 3.18 (Integer values of a fraction) – Tìm các số nguyên x để $B = (x^2 + x + 2)/(x - 1)$ là số nguyên.

Find the integers x for which $B = (x^2 + x + 2)/(x - 1)$ is an integer.

Lời giải. / Solution.

1. ĐKXĐ: $x \neq 1$. Chia: $x^2 + x + 2 = (x - 1)(x + 2) + 4$, nên $B = x + 2 + 4/(x - 1)$.
Domain: $x \neq 1$. Divide: $x^2 + x + 2 = (x - 1)(x + 2) + 4$, so $B = x + 2 + 4/(x - 1)$.
2. x nguyên thì $x + 2$ nguyên, nên B nguyên khi $4/(x - 1)$ nguyên, tức $(x - 1)$ là ước của 4.
x integer makes $x + 2$ an integer, so B is an integer when $4/(x - 1)$ is, that is $(x - 1)$ divides 4.
3. Ước của 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Suy ra $x - 1 = 1; -1; 2; -2; 4; -4$ và $x = 2; 0; 3; -1; 5; -3$.
Divisors of 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. So $x - 1 = 1; -1; 2; -2; 4; -4$ and $x = 2; 0; 3; -1; 5; -3$.
4. Cả sáu giá trị khác 1. Thử $x = 3$: $B = (9 + 3 + 2)/2 = 7$, nguyên.
All six values differ from 1. Test $x = 3$: $B = (9 + 3 + 2)/2 = 7$, an integer.

Vậy $x \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$.

So $x \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$. ■

Dạng thứ hai: đề cho một điều kiện như $x + 1/x = 3$ hay $a + b + c = 0$ rồi bắt tính giá trị. Đừng giải tìm biến. Hãy bình phương, lập phương điều kiện, hoặc thay một biến bằng biểu thức của các biến còn lại.

The second type gives a condition such as $x + 1/x = 3$ or $a + b + c = 0$ and asks for a value. Do not solve for the variables. Square or cube the condition, or replace one variable by an expression in the others.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – Đề cho $x + 1/x$ và hỏi $x^2 + 1/x^2$. Bình phương $x + 1/x$ sinh ra hai hạng tử x^2 và $1/x^2$, cộng với hạng tử giữa $2 \cdot x \cdot (1/x) = 2$ là một hằng số. Từ đó $x^2 + 1/x^2$ tính được ngay; muốn lập phương thì thêm một lần nhân với $x + 1/x$.

We know $x + 1/x$ and want $x^2 + 1/x^2$. Squaring $x + 1/x$ produces x^2 and $1/x^2$, plus the middle term $2 \cdot x \cdot (1/x) = 2$, a constant. So $x^2 + 1/x^2$ follows at once; for cubes multiply once more by $x + 1/x$.

VÍ DỤ 3.19 (Biết $x + 1/x$) / EXAMPLE 3.19 (Given $x + 1/x$) – Cho $x \neq 0$ và $x + 1/x = 3$.

Tính $x^2 + 1/x^2$, $x^3 + 1/x^3$ và $x^4 + 1/x^4$.

Given $x \neq 0$ and $x + 1/x = 3$, find $x^2 + 1/x^2$, $x^3 + 1/x^3$ and $x^4 + 1/x^4$.

Lời giải. / Solution.

1. $(x + 1/x)^2 = x^2 + 2 + 1/x^2$, nên $x^2 + 1/x^2 = 9 - 2 = 7$.

$(x + 1/x)^2 = x^2 + 2 + 1/x^2$, so $x^2 + 1/x^2 = 9 - 2 = 7$.

2. $(x + 1/x)^3 = x^3 + 3(x + 1/x) + 1/x^3$, nên $x^3 + 1/x^3 = 27 - 3 \cdot 3 = 18$.

$(x + 1/x)^3 = x^3 + 3(x + 1/x) + 1/x^3$, so $x^3 + 1/x^3 = 27 - 3 \cdot 3 = 18$.

3. $(x^2 + 1/x^2)^2 = x^4 + 2 + 1/x^4$, nên $x^4 + 1/x^4 = 49 - 2 = 47$.

$(x^2 + 1/x^2)^2 = x^4 + 2 + 1/x^4$, so $x^4 + 1/x^4 = 49 - 2 = 47$.

Vậy 7, 18 và 47. Giá trị x thỏa đề có tồn tại, ví dụ $x = (3 + \sqrt{5})/2$, khi đó $1/x = (3 - \sqrt{5})/2$.

So 7, 18 and 47. Such an x exists, for example $x = (3 + \sqrt{5})/2$, and then $1/x = (3 - \sqrt{5})/2$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS – Ba mẫu $b^2 + c^2 - a^2$, $c^2 + a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$ trông không liên quan. Điều kiện $a + b + c = 0$ cho $a = -(b + c)$. Bình phương hai vế: $a^2 = b^2 + 2bc + c^2$, nên mỗi mẫu rút thành -2 nhân tích hai biến còn lại.

The three denominators $b^2 + c^2 - a^2$, $c^2 + a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$ look unrelated. The condition $a + b + c = 0$ gives $a = -(b + c)$. Squaring: $a^2 = b^2 + 2bc + c^2$, so each denominator becomes -2 times the product of the other two variables.

VÍ DỤ 3.20 (Biết $a + b + c = 0$) / EXAMPLE 3.20 (Given $a + b + c = 0$) – Cho a, b, c khác 0 và $a + b + c = 0$. a) Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. b) Tính $S = 1/(b^2 + c^2 - a^2) + 1/(c^2 + a^2 - b^2) + 1/(a^2 + b^2 - c^2)$.

Let a, b, c be non-zero with $a + b + c = 0$. a) Prove $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. b) Find $S = 1/(b^2 + c^2 - a^2) + 1/(c^2 + a^2 - b^2) + 1/(a^2 + b^2 - c^2)$.

Lời giải. / Solution.

1. a) Từ $a + b = -c$: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = -c^3 + 3abc$.
 a) From $a + b = -c$: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = -c^3 + 3abc$.
 2. Chuyển $-c^3$ sang trái: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
 Move $-c^3$ to the left: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
 3. b) $a = -(b + c)$ nên $a^2 = b^2 + 2bc + c^2$, suy ra $b^2 + c^2 - a^2 = -2bc$. Tương tự $c^2 + a^2 - b^2 = -2ca$ và $a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$; cả ba khác 0.
 b) $a = -(b + c)$ gives $a^2 = b^2 + 2bc + c^2$, so $b^2 + c^2 - a^2 = -2bc$. Similarly $c^2 + a^2 - b^2 = -2ca$ and $a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$; all three are non-zero.
 4. $S = -1/(2bc) - 1/(2ca) - 1/(2ab) = -(a + b + c)/(2abc) = 0$.
 $S = -1/(2bc) - 1/(2ca) - 1/(2ab) = -(a + b + c)/(2abc) = 0$.
- Vậy $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $S = 0$.
 So $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ and $S = 0$. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Giải ra x rồi thay vào thay vì dùng điều kiện: nhiều bài chỉ có nghiệm vô tỉ hoặc không có nghiệm thực, thay số dễ sai.

Solving for x and substituting instead of using the condition: many such problems have irrational roots or none, and substituting invites errors.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE – Ở câu giá trị nguyên, chỉ lấy ước dương của hằng số và bỏ ước âm.

In integer-value questions, taking only the positive divisors of the constant and forgetting the negative ones.

Bảng chiến lược – Strategy table

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Cách làm <i>Method</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Mẫu là $x^2 - a^2$ hay $x^2 + bx + c$ <i>Denominator is $x^2 - a^2$ or $x^2 + bx + c$</i>	Phân tích mẫu, ghi ĐKXD trước <i>Factorise, write the domain first</i>	3.14
Hai phân thức khác mẫu <i>Fractions with different denominators</i>	Quy đồng bằng MTC, trừ thì đặt ngoặc tử <i>Common denominator; bracket a subtracted numerator</i>	3.15
Có dấu chia giữa hai phân thức <i>Division of two fractions</i>	Nhân nghịch đảo, thêm điều kiện chia khác 0 <i>Multiply by reciprocal, add divisor $\neq 0$</i>	3.16
Tìm x để phân thức nguyên <i>Find x for an integer value</i>	Tách phần nguyên, mẫu là ước hằng số <i>Split integer part, denominator divides the constant</i>	3.17, 3.18
Bốn hạng tử, không có nhân tử chung <i>Four terms, no common factor</i>	Nhóm hai hạng tử một <i>Group in pairs</i>	3.10

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Cách làm <i>Method</i>	Ví dụ <i>Example</i>
x^4 + hằng số <i>x^4 plus a constant</i>	Thêm bớt để có hiệu hai bình phương <i>Add and subtract to get a difference of squares</i>	3.13
Cho biết $x + y$ và xy <i>Sum and product given</i>	Biểu diễn qua tổng và tích <i>Express through sum and product</i>	3.9
Cho $x + 1/x$ hoặc $a + b + c = 0$ <i>$x + 1/x$ or $a + b + c = 0$ given</i>	Bình phương, lập phương; thay một biến <i>Square, cube; substitute a variable</i>	3.19, 3.20
Chia đa thức cho $x - a$, hỏi dư <i>Remainder on dividing by $x - a$</i>	Dư bằng giá trị tại $x = a$ <i>Remainder equals the value at $x = a$</i>	3.6

3.8. Luyện câu hỏi trắc nghiệm – Multiple-choice and short-answer practice

Câu nhiều lựa chọn: rút gọn hoặc khai triển rồi so với đáp án, hoặc loại phương án sai bằng cách thử một giá trị cụ thể của x (thử $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$). Câu đúng/sai: xét từng ý riêng, mỗi ý cần một phép tính ngắn. Câu trả lời ngắn: chỉ ghi đáp số, không cần trình bày, nhưng phải tính đủ; ghi rõ khi đề yêu cầu làm tròn.

Multiple choice: simplify or expand and compare, or eliminate options by trying a specific value of x (try $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$). True/false: judge each statement separately, each needs a short calculation. Short answer: write only the number, no working, but compute fully; follow any rounding instruction.

Phần I. Nhiều lựa chọn – Part I. Multiple choice

Câu 1. Khai triển $(x - 3)^2$ được:

Question 1. Expanding $(x - 3)^2$ gives:

- A. $x^2 - 9$
A. $x^2 - 9$
- B. $x^2 - 6x + 9$
B. $x^2 - 6x + 9$
- C. $x^2 + 6x + 9$
C. $x^2 + 6x + 9$
- D. $x^2 - 3x + 9$
D. $x^2 - 3x + 9$

Câu 2. Điều kiện xác định của $5/(x^2 - 4x)$ là:

Question 2. The domain condition of $5/(x^2 - 4x)$ is:

- A. $x \neq 4$
A. $x \neq 4$

- B. $x \neq 0$
B. $x \neq 0$
- C. $x \neq 0$ và $x \neq 4$
C. $x \neq 0$ and $x \neq 4$
- D. $x \neq 2$ và $x \neq -2$
D. $x \neq 2$ and $x \neq -2$

Câu 3. Bậc của đa thức $3x^2y^3 - x^4 + 5y$ là:

Question 3. The degree of $3x^2y^3 - x^4 + 5y$ is:

- A. 4
A. 4
- B. 5
B. 5
- C. 3
C. 3
- D. 6
D. 6

Câu 4. Với $x \neq \pm 1$, rút gọn $(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)$ được:

Question 4. For $x \neq \pm 1$, $(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)$ simplifies to:

- A. $(x + 1)/(x - 1)$
A. $(x + 1)/(x - 1)$
- B. $x - 1$
B. $x - 1$
- C. $1/(x + 1)$
C. $1/(x + 1)$
- D. $(x - 1)/(x + 1)$
D. $(x - 1)/(x + 1)$

Phần II. Đúng hoặc sai – Part II. True or false

Câu 5. Cho $x + y = 4$ và $xy = 1$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

Question 5. Let $x + y = 4$ and $xy = 1$. Are the statements true or false?

- a) $x^2 + y^2 = 14$.
a) $x^2 + y^2 = 14$.
- b) $(x - y)^2 = 20$.
b) $(x - y)^2 = 20$.
- c) $x^3 + y^3 = 52$.
c) $x^3 + y^3 = 52$.
- d) $x^4 + y^4 = 196$.
d) $x^4 + y^4 = 196$.

Câu 6. Cho $A = (x + 2)/(x^2 - 4)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

Question 6. Let $A = (x + 2)/(x^2 - 4)$. Are the statements true or false?

- a) ĐKXD của A là $x \neq 2$.
a) The domain of A is $x \neq 2$.
- b) $A = 1/(x - 2)$ với $x \neq \pm 2$.
b) $A = 1/(x - 2)$ for $x \neq \pm 2$.
- c) Tại $x = 3$, $A = 1$.
c) At $x = 3$, $A = 1$.
- d) A nguyên với x nguyên chỉ khi $x = 3$.
d) For integer x , A is an integer only when $x = 3$.

Phần III. Trả lời ngắn – Part III. Short answer

Câu 7. Tính giá trị của $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ tại $x = -2$.

Question 7. Find $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ at $x = -2$.

Câu 8. Tính tổng các số nguyên x để $(3x + 7)/(x + 2)$ là số nguyên.

Question 8. Find the sum of the integers x for which $(3x + 7)/(x + 2)$ is an integer.

Đáp án và giải thích – Answers and explanations

Câu Q	Đáp án Key	Vì sao đúng, phương án nhiễu sai ở đâu Why it is right, where the distractors fail
1	B	$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$. A quên hạng tử giữa; C sai dấu; D lấy ab thay cho 2ab. $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$. A drops the middle term; C has the wrong sign; D uses ab for 2ab.
2	C	$x^2 - 4x = x(x - 4) \neq 0$ cần cả hai. A, B thiếu một điều kiện; D là của $x^2 - 4$. $x^2 - 4x = x(x - 4) \neq 0$ needs both. A and B miss one condition; D belongs to $x^2 - 4$.
3	B	$3x^2y^3$ có bậc 5, x^4 bậc 4, $5y$ bậc 1: lấy bậc cao nhất 5. $3x^2y^3$ has degree 5, x^4 degree 4, $5y$ degree 1: take the highest, 5.
4	D	$(x - 1)(x + 1)/(x + 1)^2 = (x - 1)/(x + 1)$. A là nghịch đảo; B, C chia sai. $(x - 1)(x + 1)/(x + 1)^2 = (x - 1)/(x + 1)$. A is the reciprocal; B and C cancel wrongly.
5	Đ, S, Đ, S T, F, T, F	$x^2 + y^2 = 16 - 2 = 14$ đúng; $(x - y)^2 = 16 - 4 = 12$ nên b sai; $x^3 + y^3 = 64 - 12 = 52$ đúng; $x^4 + y^4 = 14^2 - 2 = 194$ nên d sai. $x^2 + y^2 = 16 - 2 = 14$ true; $(x - y)^2 = 16 - 4 = 12$ so b is false; $x^3 + y^3 = 64 - 12 = 52$ true; $x^4 + y^4 = 14^2 - 2 = 194$ so d is false.
6	S, Đ, Đ, S F, T, T, F	Mẫu $(x - 2)(x + 2)$ nên cần $x \neq \pm 2$, a sai; $A = 1/(x - 2)$ đúng; $x = 3$ cho 1 đúng; $x - 2 = \pm 1$ cho $x = 3$ hoặc $x = 1$, nên d sai. The denominator $(x - 2)(x + 2)$ needs $x \neq \pm 2$, so a is false; $A = 1/(x - 2)$ is true; $x = 3$ gives 1, true; $x - 2 = \pm 1$ gives $x = 3$ or $x = 1$, so d is false.

Câu	Đáp án <i>Key</i>	Vì sao đúng, phương án nhiễu sai ở đâu <i>Why it is right, where the distractors fail</i>
7	11	$-8 + 8 + 10 + 1 = 11$. $-8 + 8 + 10 + 1 = 11$.
8	-4	$(3x + 7)/(x + 2) = 3 + 1/(x + 2)$; $x + 2 = \pm 1$ cho $x = -1$ hoặc -3 , tổng -4 . $(3x + 7)/(x + 2) = 3 + 1/(x + 2)$; $x + 2 = \pm 1$ gives $x = -1$ or -3 , sum -4 .

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Biểu thức đại số	Algebraic expression	gồm số, chữ và phép tính <i>built from numbers, letters, operations</i>
Đơn thức	Monomial	tích của số và các biến <i>product of a number and variables</i>
Hệ số	Coefficient	số đứng trước phần biến <i>the number in front of the variable part</i>
Phần biến	Variable part	các chữ kèm số mũ <i>the letters with exponents</i>
Bậc của đơn thức	Degree of a monomial	tổng các số mũ <i>sum of exponents</i>
Đơn thức đồng dạng	Like terms	cùng phần biến <i>same variable part</i>
Đa thức	Polynomial	tổng các đơn thức <i>sum of monomials</i>
Hạng tử	Term	một đơn thức trong tổng <i>one monomial in the sum</i>
Thu gọn	Simplify	cộng các hạng tử đồng dạng <i>add like terms</i>
Hệ số cao nhất	Leading coefficient	hệ số của lũy thừa lớn nhất <i>coefficient of the highest power</i>
Hệ số tự do	Constant term	hạng tử không chứa biến <i>the term without a variable</i>
Nghiệm của đa thức	Root of a polynomial	giá trị làm đa thức bằng 0 <i>value making the polynomial 0</i>
Hằng đẳng thức	Identity	đẳng thức đúng với mọi giá trị <i>equality true for all values</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Phân tích thành nhân tử	Factorise	viết thành tích <i>write as a product</i>
Nhân tử chung	Common factor	thừa số có mặt ở mọi hạng tử <i>factor in every term</i>
Phân thức đại số	Algebraic fraction	A/B với A, B là đa thức <i>A/B with A, B polynomials</i>
Tử thức, mẫu thức	Numerator, denominator	trên và dưới vạch phân số <i>above and below the fraction bar</i>
Điều kiện xác định	Domain condition	điều kiện để mẫu khác 0 <i>condition for the denominator to be non-zero</i>
Mẫu thức chung	Common denominator	mẫu chia hết cho mọi mẫu đã cho <i>a denominator divisible by all given ones</i>
Phân thức nghịch đảo	Reciprocal fraction	A/B đảo thành B/A <i>A/B turned into B/A</i>
Rút gọn	Cancel, simplify	chia tử, mẫu cho nhân tử chung <i>divide numerator and denominator by a common factor</i>
Ước	Divisor	số chia hết một số cho trước <i>a number dividing a given one</i>

3.9. Bài tự luyện – Practice problems

Mức 1 – Cơ bản – Level 1 – Basic

Bài 3.1 / Problem 3.1 – Thu gọn $M = 2x^2y - 3xy^2 + 5x^2y + xy^2$ rồi tính M tại $x = 1, y = -2$.
Simplify $M = 2x^2y - 3xy^2 + 5x^2y + xy^2$, then find M at $x = 1, y = -2$.

Bài 3.2 / Problem 3.2 – Chứng minh $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 - 24x = 0$ với mọi x.
Prove $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 - 24x = 0$ for every x.

Bài 3.3 / Problem 3.3 – Phân tích thành nhân tử: a) $9x^2 - 16$; b) $x^3 + 8$; c) $x^2 + 7x + 12$; d) $ax - ay + 2x - 2y$.
Factorise: a) $9x^2 - 16$; b) $x^3 + 8$; c) $x^2 + 7x + 12$; d) $ax - ay + 2x - 2y$.

Bài 3.4 / Problem 3.4 – Giải phương trình: a) $x^2 - 7x + 10 = 0$; b) $x^3 - 4x = 0$.
Solve: a) $x^2 - 7x + 10 = 0$; b) $x^3 - 4x = 0$.

Bài 3.5 / Problem 3.5 – Tìm ĐKXD và rút gọn $(x^2 - 25)/(x^2 + 10x + 25)$.
Find the domain condition and simplify $(x^2 - 25)/(x^2 + 10x + 25)$.

Bài 3.6 / Problem 3.6 – Tính nhanh: a) $201^2 - 199^2$; b) $97 \cdot 103$.
Compute quickly: a) $201^2 - 199^2$; b) $97 \cdot 103$.