

TÀI LIỆU THAM KHẢO NĂNG CAO

VẬT LÝ 10 CHO GÀ CHỌI

Dành cho học sinh thi học sinh giỏi cấp tỉnh, cấp quốc gia và Olympic quốc tế

Olympiad Physics for Grade 10 — a bilingual guide

Động học · Động lực học · Tĩnh học · Năng lượng · Động lượng · Vật rắn · Chất lưu

Định luật có dẫn giải · Ví dụ có phân tích và lời giải · Thực nghiệm

Bài tự luyện ba mức (tỉnh, quốc gia, quốc tế) có lời giải đầy đủ

Song ngữ Việt – Anh · Vietnamese – English

Phiên bản 1.0 — Tháng 10 năm 2026

<https://globalmarket.vin>

M U C L U C

C O N T E N T S

Chương 1. Thứ nguyên, ước lượng và sai số — Chapter 1. Dimensions, estimation and uncertainty	6
1.1. Đại lượng, đơn vị và thứ nguyên — <i>Quantities, units and dimensions</i>	6
1.2. Phân tích thứ nguyên: tìm dạng của định luật — <i>Dimensional analysis: finding the form of a law</i>	9
1.3. Ước lượng bậc độ lớn — <i>Order-of-magnitude estimation.....</i>	12
1.4. Phép đo, chữ số có nghĩa và sai số — <i>Measurement, significant figures and uncertainty.....</i>	14
1.5. Truyền sai số — <i>Propagation of uncertainty.....</i>	16
1.6. Đồ thị tuyến tính hóa và bình phương tối thiểu — <i>Linearised graphs and least squares</i>	21
1.7. Thiết kế phương án thí nghiệm — <i>Designing an experiment</i>	27
1.8. Tổ hợp không thứ nguyên và đồng dạng — <i>Dimensionless groups and similarity</i>	30
1.9. Bảng chiến lược: từ dấu hiệu trong đề đến công cụ — <i>Strategy table: from the sign in the problem to the tool</i>	34
1.10. Bài tự luyện — <i>Practice problems.....</i>	37
1.11. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	39
 Chương 2. Động học chất điểm chuyển động thẳng — Chapter 2. One-dimensional kinematics	 46
2.1. Hệ quy chiếu, độ dịch chuyển và quãng đường — <i>Reference frame, displacement and distance.....</i>	46
2.2. Vận tốc, tốc độ và gia tốc — <i>Velocity, speed and acceleration.....</i>	47
2.3. Đồ thị chuyển động thẳng — <i>Graphs of rectilinear motion</i>	51
2.4. Chuyển động thẳng biến đổi đều — <i>Uniformly accelerated motion.....</i>	54
2.5. Rơi tự do và ném thẳng đứng — <i>Free fall and vertical throws</i>	59
2.6. Hai vật gặp nhau và chuyển động nhiều giai đoạn — <i>Meeting problems and multi-stage motion</i>	62
2.7. Gia tốc thay đổi theo bậc thang — <i>Step-wise acceleration.....</i>	68
2.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>Strategy table and terminology</i>	72
2.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems.....</i>	74
2.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	76
 Chương 3. Chuyển động trong mặt phẳng và tính tương đối — Chapter 3. Motion in a plane and relative motion	 83
3.1. Vector vị trí, vận tốc, gia tốc trong mặt phẳng — <i>Position, velocity and acceleration vectors in a plane</i>	83
3.2. Chuyển động ném ngang — <i>Horizontal projectile motion</i>	85
3.3. Chuyển động ném xiên — <i>Oblique projectile motion</i>	88

3.4. Parabol an toàn, ném từ độ cao và ném lên mặt nghiêng — <i>Safety parabola, elevated throws and throws onto a slope</i>	92
3.5. Cộng vận tốc: qua sông, gió, mưa — <i>Adding velocities: river crossings, wind and rain</i>	99
3.6. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai vật chuyển động — <i>Closest approach of two moving bodies</i>	104
3.7. Liên kết động học: thanh cứng, dây không dẫn, ròng rọc — <i>Kinematic constraints: rigid rods, inextensible strings, pulleys</i>	107
3.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>Strategy table and glossary</i>	111
3.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	113
3.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	116

Chương 4. Động học chuyển động tròn và vật rắn — Chapter 4. Kinematics of circular motion and rigid bodies

4.1. Góc quay, tốc độ góc, chu kỳ — <i>Angle, angular speed, period</i>	122
4.2. Gia tốc hướng tâm, gia tốc tiếp tuyến và gia tốc toàn phần — <i>Centripetal, tangential and total acceleration</i>	124
4.3. Bán kính cong của quỹ đạo — <i>Radius of curvature of a path</i>	128
4.4. Chuyển động của vật rắn: tịnh tiến, quay, công thức cộng vận tốc — <i>Rigid-body motion: translation, rotation, velocity addition</i>	132
4.5. Tâm quay tức thời — <i>The instantaneous centre of rotation</i>	134
4.6. Lăn không trượt và đường cycloid — <i>Rolling without slipping and the cycloid</i>	139
4.7. Truyền động bánh răng và dây curoa — <i>Gear and belt drives</i>	146
4.8. Nhiều vật quay đều: thời điểm gặp nhau, kim đồng hồ — <i>Several uniform rotations: meeting times and clock hands</i>	148
4.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	153
4.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	155

Chương 5. Các định luật Newton và các lực cơ học — Chapter 5. Newton's laws and mechanical forces.....

5.1. Ba định luật Newton, hệ quy chiếu quán tính và khối lượng — <i>Newton's three laws, inertial frames and mass</i>	163
5.2. Tổng hợp và phân tích lực — <i>Composition and resolution of forces</i>	165
5.3. Trọng lực, phản lực pháp tuyến và lực căng dây — <i>Weight, normal force and string tension</i>	168
5.4. Lực đàn hồi của lò xo — <i>Elastic force of a spring</i>	171
5.5. Ma sát nghỉ, ma sát trượt, ma sát lăn và góc ma sát — <i>Static, kinetic and rolling friction; the friction angle</i>	174
5.6. Lực cản của chất lưu và lực nâng — <i>Fluid drag and lift</i>	180
5.7. Phương pháp giải; hệ vật nối, máy Atwood và ròng rọc động — <i>Method; connected bodies, the Atwood machine and movable pulleys</i>	182
5.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>Strategy table and glossary</i>	190
5.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	193
5.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	195

Chương 6. Động lực học nâng cao: hệ quy chiếu phi quán tính, chuyển động tròn, hấp dẫn — Chapter 6. Advanced dynamics: non-inertial frames, circular motion, gravitation	201
6.1. Hệ quy chiếu phi quán tính và lực quán tính — <i>Non-inertial frames and inertial forces</i>	201
6.2. Trọng lượng biểu kiến, thang máy và dây treo trong xe — <i>Apparent weight, lifts and a string hanging in a vehicle</i>	203
6.3. Nêm di động và vật trên nêm — <i>A movable wedge and a block on it</i>	207
6.4. Động lực học chuyển động tròn — <i>Dynamics of circular motion</i>	212
6.5. Hệ quy chiếu quay và lực li tâm — <i>Rotating frames and the centrifugal force</i>	220
6.6. Định luật vạn vật hấp dẫn, g theo độ cao và theo vĩ độ — <i>The law of gravitation, g with altitude and with latitude</i>	225
6.7. Vệ tinh, tốc độ vũ trụ cấp I và định luật Kepler III — <i>Satellites, the first cosmic speed and Kepler's third law</i>	228
6.8. Bảng chiến lược giải bài — <i>Problem-solving strategy table</i>	233
6.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	236
6.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	239
Chương 7. Tĩnh học vật rắn — Chapter 7. Statics of rigid bodies	247
7.1. Moment lực và ngẫu lực — <i>Moment of a force and couples</i>	247
7.2. Điều kiện cân bằng của vật rắn và quy tắc ba lực — <i>Equilibrium of a rigid body and the three-force rule</i>	250
7.3. Trọng tâm và khối tâm — <i>Centre of gravity and centre of mass</i>	253
7.4. Cân bằng có ma sát — <i>Equilibrium with friction</i>	258
7.5. Các dạng cân bằng và mặt chân đế — <i>Kinds of equilibrium and the base of support</i>	263
7.6. Nguyên lý công ảo ở mức sơ cấp — <i>The principle of virtual work at an elementary level</i>	266
7.7. Hệ thanh nối bản lề và giàn phẳng — <i>Hinged rod systems and plane trusses</i>	268
7.8. Chiến lược giải bài tĩnh học — <i>A strategy for statics problems</i>	272
7.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	276
7.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	278
Chương 8. Công, năng lượng và công suất — Chapter 8. Work, energy and power ...	287
8.1. Công của lực — <i>Work done by a force</i>	287
8.2. Công suất và hiệu suất — <i>Power and efficiency</i>	291
8.3. Động năng và định lý động năng — <i>Kinetic energy and the work-energy theorem</i>	292
8.4. Lực thế, thế năng và cơ năng — <i>Conservative forces, potential energy and mechanical energy</i>	294
8.5. Bốn bài toán điển hình — <i>Four standard problems</i>	299
8.6. Đường thế năng — <i>Potential-energy curves</i>	307
8.7. Chọn công cụ và những điều phải thuộc — <i>Choosing the tool and what to memorise</i>	309
8.8. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	312
8.9. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	314

Chương 9. Động lượng, khối tâm và va chạm — Chapter 9. Momentum, centre of mass and collisions	322
9.1. Động lượng và xung lượng — <i>Momentum and impulse</i>	322
9.2. Bảo toàn động lượng — <i>Conservation of momentum</i>	326
9.3. Khối tâm và chuyển động của khối tâm — <i>Centre of mass and its motion</i>	329
9.4. Hệ quy chiếu khối tâm và định lý König — <i>The centre-of-mass frame and König's theorem.....</i>	337
9.5. Va chạm một chiều và hệ số phục hồi — <i>One-dimensional collisions and the coefficient of restitution.....</i>	339
9.6. Va chạm hai chiều và vật nảy nhiều lần — <i>Two-dimensional collisions and repeated bouncing</i>	344
9.7. Chuyển động bằng phản lực — <i>Jet propulsion.....</i>	350
9.8. Chiến lược giải bài động lượng — <i>Problem-solving strategy for momentum</i>	353
9.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems.....</i>	357
9.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	360
Chương 10. Động lực học vật rắn — Chapter 10. Rigid-body dynamics.....	368
10.1. Moment quán tính — <i>Moment of inertia.....</i>	368
10.2. Định lý trục song song — <i>The parallel-axis theorem</i>	371
10.3. Phương trình quay quanh trục cố định — <i>The rotation equation about a fixed axis</i>	373
10.4. Động năng quay và vật lăn — <i>Rotational kinetic energy and rolling.....</i>	377
10.5. Yo-yo và cuộn chỉ — <i>The yo-yo and the cotton reel</i>	383
10.6. Moment động lượng — <i>Angular momentum</i>	386
10.7. Từ trượt sang lăn — <i>From slipping to rolling.....</i>	391
10.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>Strategy table and terminology</i>	394
10.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems.....</i>	397
10.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	399
Chương 11. Biến dạng, áp suất và cơ học chất lưu — Chapter 11. Deformation, pressure and fluid mechanics	406
11.1. Biến dạng kéo – nén và suất Young — <i>Tension, compression and Young's modulus</i>	406
11.2. Khối lượng riêng, áp suất và áp suất chất lỏng — <i>Density, pressure and hydrostatic pressure</i>	411
11.3. Áp lực lên thành bình và đập nước — <i>Force on a vessel wall and on a dam.....</i>	417
11.4. Lực đẩy Archimedes và điều kiện nổi — <i>Archimedes' principle and floating</i>	420
11.5. Tâm nổi và ổn định của vật nổi — <i>Centre of buoyancy and stability of floating bodies</i>	423
11.6. Chất lưu chuyển động: phương trình liên tục và Bernoulli — <i>Moving fluids: continuity and Bernoulli's equation</i>	427
11.7. Torricelli, tia nước, ống Venturi và xi-phông — <i>Torricelli, jets, the Venturi tube and the siphon</i>	429
11.8. Nhận dạng đề và chọn công cụ — <i>Recognising the problem and choosing the tool</i>	435

11.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	437
11.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	440
Chương 12. Thực nghiệm và bài toán tổng hợp — Chapter 12. Experimental physics and synthesis problems	446
12.1. Cấu trúc đề thực hành và quy ước ký hiệu — <i>Structure of a practical paper and notation</i>	446
12.2. Tuyến tính hóa và bình phương tối thiểu — <i>Linearisation and least squares</i>	448
12.3. Truyền sai số và sai số hệ thống — <i>Propagation of uncertainty and systematic error</i>	450
12.4. Phương án đo gia tốc rơi tự do g — <i>Methods for measuring the free-fall acceleration g</i>	451
12.5. Ma sát, độ cứng lò xo và khối lượng riêng — <i>Friction, spring stiffness and density</i>	458
12.6. Đo moment quán tính và vận tốc viên đạn — <i>Measuring moment of inertia and bullet speed</i>	465
12.7. Bài toán tổng hợp nhiều chương — <i>Synthesis problems that chain several chapters</i>	469
12.8. Trình bày bài thực hành được chấm đủ điểm — <i>Writing a practical script that earns full marks</i>	475
12.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	480
12.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	482
Phụ lục A. Ba đề luyện thi — Appendix A. Three practice papers	490
A.1. Đề số 1: mức học sinh giỏi cấp tỉnh — <i>A.1. Paper 1: provincial level</i>	490
A.2. Đề số 2: mức học sinh giỏi quốc gia — <i>A.2. Paper 2: national level</i>	503
A.3. Đề số 3: mức Olympic quốc tế — <i>A.3. Paper 3: international Olympiad level</i>	517
Phụ lục B. Tra cứu định luật và kết quả có tên — Appendix B. Index of named laws and results	535
B.1. Bảng tra theo chương — <i>B.1. Index by chapter</i>	535
Phụ lục C. Thuật ngữ Việt – Anh — Appendix C. Vietnamese – English glossary	548
C.1. Bảng tra từ A đến Z — <i>C.1. A to Z index</i>	548
Phụ lục D. Tài liệu đọc thêm — Appendix D. Further reading	557
D.1. Sách tiếng Anh và sách giáo khoa — <i>D.1. Books in English and textbooks</i>	557

Chương 1. Thứ nguyên, ước lượng và sai số — Chapter 1.

Dimensions, estimation and uncertainty

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Dùng thứ nguyên để kiểm tra một công thức và để tìm dạng của một định luật, kể cả khi chưa biết cơ chế.
Use dimensions to test a formula and to find the form of a law before the mechanism is known.
- Ước lượng bậc độ lớn của một đại lượng từ vài số liệu quen thuộc, biết sai ở đâu thì kết quả lệch nhiều nhất.
Estimate the order of magnitude of a quantity from a few familiar numbers, and know which input moves the result most.
- Viết kết quả đo với đúng chữ số có nghĩa, tính sai số của đại lượng gián tiếp qua tổng, tích, lũy thừa.
Write a measured result with the right significant figures and find the uncertainty of an indirect quantity through sums, products and powers.
- Đưa quan hệ lũy thừa về đường thẳng, xác định hệ số góc, hệ số chặn và sai số của chúng.
Turn a power relation into a straight line and find the slope, the intercept and their uncertainties.
- Viết phương án thí nghiệm theo cấu trúc của đề thi học sinh giỏi: cơ sở, dụng cụ, các bước, xử lý số liệu, sai số.
Write an experimental plan in the structure used in olympiad papers: principle, apparatus, steps, data treatment, uncertainty.

1.1. Đại lượng, đơn vị và thứ nguyên — Quantities, units and dimensions

Quy ước ký hiệu dùng suốt sách: Δx là sai số tuyệt đối của x , $\varepsilon_x = \Delta x/|x|$ là sai số tương đối, $\bar{x}$ là giá trị trung bình. Chỉ số của các lực và năng lượng viết theo tiếng của từng ngôn ngữ: F_{ms} (tiếng Việt) và F_{fr} (tiếng Anh) cho lực ma sát, W_d và K cho động năng, W_t và U cho thế năng. Gia tốc rơi tự do lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ nếu đề không cho khác.

Notation used throughout the book: Δx is the absolute uncertainty of x , $\varepsilon_x = \Delta x/|x|$ is the relative uncertainty, $\bar{x}$ is the mean value. Subscripts on forces and energies follow each language: F_{ms} in Vietnamese and F_{fr} in English for friction, W_d and K for kinetic energy, W_t and U for potential energy. The free-fall acceleration is taken as $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ unless the problem says otherwise.

ĐỊNH NGHĨA 1.1 (Đại lượng và đơn vị SI) / DEFINITION 1.1 (Quantity and SI unit) —

Đại lượng vật lí là tính chất của một hiện tượng hay một vật mà ta đo được, kết quả đo viết bằng một số nhân với một đơn vị. Đơn vị SI cơ bản dùng trong cơ học là mét (m), kilôgam (kg), giây (s). Mọi đơn vị cơ học khác là tích hay thương của ba đơn vị này: newton $N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, joule $J = N \cdot \text{m}$, watt $W = J/s$, pascal $\text{Pa} = N/\text{m}^2$.

A physical quantity is a property of a phenomenon or a body that can be measured; a result is written as a number times a unit. The SI base units used in mechanics are the metre (m), the kilogram (kg)

and the second (s). Every other mechanical unit is a product or quotient of these three: newton $N = \text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$, joule $J = N\cdot\text{m}$, watt $W = J/\text{s}$, pascal $\text{Pa} = N/\text{m}^2$.

ĐỊNH NGHĨA 1.2 (Thứ nguyên) / DEFINITION 1.2 (Dimension) — Thứ nguyên của một đại lượng x , ký hiệu $[x]$, là tích các lũy thừa của khối lượng M , chiều dài L , thời gian T cho biết x được tạo từ ba đại lượng cơ bản nào. Chẳng hạn $[v] = LT^{-1}$, $[a] = LT^{-2}$, $[F] = MLT^{-2}$, $[E] = ML^2T^{-2}$. Đại lượng có $[x] = 1$ (mọi lũy thừa bằng 0) gọi là không thứ nguyên: góc, tỉ số hai độ dài, hệ số ma sát μ .

The dimension of a quantity x , written $[x]$, is the product of powers of mass M , length L and time T that shows how x is built from the three base quantities. For example $[v] = LT^{-1}$, $[a] = LT^{-2}$, $[F] = MLT^{-2}$, $[E] = ML^2T^{-2}$. A quantity with $[x] = 1$ (all powers zero) is dimensionless: an angle, a ratio of two lengths, the friction coefficient μ .

TÍNH CHẤT 1.3 / PROPERTY 1.3 — Nguyên tắc đồng nhất thứ nguyên. Hai vế của một đẳng thức vật lí có cùng thứ nguyên. Chỉ cộng, trừ, so sánh các đại lượng cùng thứ nguyên. Đối số của $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\lg$, $\ln$, e^x là số không thứ nguyên.

Principle of dimensional homogeneity. Both sides of a physical equation have the same dimension. Only quantities of the same dimension are added, subtracted or compared. The argument of $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\lg$, $\ln$ or e^x is a dimensionless number.

Nguyên tắc này đúng vì đơn vị đo có thể chọn tùy ý: nếu đổi mét thành centimét mà một đẳng thức bị sai thì đẳng thức ấy không mô tả quy luật của tự nhiên. Thứ nguyên chỉ ra công thức sai, không chứng nhận công thức đúng: hệ số số học (2, 1/2, π) và sự khác nhau giữa $\sin$ và $\cos$ không nằm trong thứ nguyên.

The principle holds because the choice of unit is arbitrary: if an equation fails when metres are replaced by centimetres, it cannot describe a law of nature. Dimensions expose a wrong formula but do not certify a right one: numerical factors (2, 1/2, π) and the difference between $\sin$ and $\cos$ are invisible to them.

Đại lượng <i>Quantity</i>	Thứ nguyên <i>Dimension</i>	Đơn vị SI <i>SI unit</i>
Vận tốc, tốc độ <i>Velocity, speed</i>	LT^{-1}	m/s
Gia tốc <i>Acceleration</i>	LT^{-2}	m/s^2
Lực, trọng lượng <i>Force, weight</i>	MLT^{-2}	$N = \text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$
Công, năng lượng, moment lực <i>Work, energy, torque</i>	ML^2T^{-2}	$J = N\cdot\text{m}$
Công suất <i>Power</i>	ML^2T^{-3}	$W = J/\text{s}$
Áp suất, ứng suất <i>Pressure, stress</i>	$ML^{-1}T^{-2}$	$\text{Pa} = N/\text{m}^2$
Khối lượng riêng <i>Density</i>	ML^{-3}	kg/m^3

Đại lượng <i>Quantity</i>	Thứ nguyên <i>Dimension</i>	Đơn vị SI <i>SI unit</i>
Động lượng, xung lượng <i>Momentum, impulse</i>	MLT^{-1}	$kg \cdot m/s$
Tần số, tốc độ góc <i>Frequency, angular speed</i>	T^{-1}	$Hz = s^{-1}, rad/s$
Hằng số hấp dẫn G <i>Gravitational constant G</i>	$M^{-1}L^3T^{-2}$	$N \cdot m^2/kg^2$
Hệ số căng bề mặt σ <i>Surface tension σ</i>	MT^{-2}	N/m
Độ nhớt η <i>Dynamic viscosity η</i>	$ML^{-1}T^{-1}$	$Pa \cdot s$

Tiền tố hay dùng khi đổi đơn vị: nano (n) 10^{-9} , micro (μ) 10^{-6} , milli (m) 10^{-3} , kilo (k) 10^3 , mega (M) 10^6 , giga (G) 10^9 . Khi đổi đơn vị của đại lượng có lũy thừa, lũy thừa áp cho cả hệ số đổi: $1 \text{ cm}^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$.

Prefixes met most often: nano (n) 10^{-9} , micro (μ) 10^{-6} , milli (m) 10^{-3} , kilo (k) 10^3 , mega (M) 10^6 , giga (G) 10^9 . When a quantity carries a power, the power applies to the conversion factor too: $1 \text{ cm}^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Công thức cho sẵn dạng chữ: viết thứ nguyên của từng số hạng, thay ngay vào bảng trên, rồi so hai vế. Số hạng nào lệch lũy thừa của L hay T là số hạng sai hoặc thiếu một đại lượng.

A formula given in letters: write the dimension of each term from the table above and compare both sides. A term whose power of L or T differs is wrong or is missing a quantity.

VÍ DỤ 1.1 (Loại công thức sai bằng thứ nguyên) / EXAMPLE 1.1 (Rejecting a wrong formula by dimensions) — Thời gian t để một vật bắt đầu từ nghỉ trượt hết đoạn dốc dài s , nghiêng góc α , hệ số ma sát trượt μ , được một học sinh nhớ theo ba cách: (a) $t = \sqrt{2s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))}$; (b) $t = 2s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))$; (c) $t = \sqrt{2sg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$. Cách nào có thể đúng về thứ nguyên? Có thể kết luận cách đó đúng không?

The time t for a body starting from rest to slide down a slope of length s , inclined at angle α , with sliding friction coefficient μ , is remembered by a student in three ways: (a) $t = \sqrt{2s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))}$; (b) $t = 2s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))$; (c) $t = \sqrt{2sg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$. Which can be right dimensionally? Does that make it right?

Lời giải. / Solution.

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$, μ không thứ nguyên, nên thừa số $g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ có thứ nguyên của g , tức LT^{-2} . Cần $[t] = T$.

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$ and μ are dimensionless, so $g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ has the dimension of g , LT^{-2} . We need $[t] = T$.

1. Cách (a): $[s/g] = L/(LT^{-2}) = T^2$, lấy căn được T . Đúng thứ nguyên.

Form (a): $[s/g] = L/(LT^{-2}) = T^2$, its root is T . Dimensionally correct.

2. Cách (b): $[s/g] = T^2$, không có căn nên cho T^2 . Sai.

Form (b): $[s/g] = T^2$ with no root, giving T^2 . Wrong.

3. Cách (c): $[sg] = L \cdot LT^{-2} = L^2T^{-2}$, căn là LT^{-1} (một vận tốc). Sai.

Form (c): $[sg] = L \cdot LT^{-2} = L^2T^{-2}$, its root is LT^{-1} (a speed). Wrong.

Vậy chỉ (a) qua được phép kiểm. Thử nguyên không phân biệt (a) với $t = \sqrt{s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))}$ hay với $t = \sqrt{2s/(g(\cos \alpha - \mu \sin \alpha))}$, nên (a) còn phải kiểm bằng cách khác: với $\mu = 0$, $\alpha = 90^\circ$ nó cho $t = \sqrt{2s/g}$, đúng công thức rơi tự do.

Hence only (a) passes. Dimensions cannot tell (a) from $t = \sqrt{s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))}$ or from $t = \sqrt{2s/(g(\cos \alpha - \mu \sin \alpha))}$, so (a) needs another test: for $\mu = 0$, $\alpha = 90^\circ$ it gives $t = \sqrt{2s/g}$, the free-fall formula. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Thấy hai vế cùng thứ nguyên rồi kết luận công thức đúng. Thử nguyên chỉ loại được công thức sai: thiếu hệ số 2 hay nhầm sin với cos vẫn qua.

Seeing equal dimensions on both sides and declaring the formula right. Dimensions can only reject a wrong formula: a missing factor 2 or sin mistaken for cos still passes.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Đổi đơn vị mà quên bình phương: 1 cm^2 bằng 10^{-4} m^2 , không phải 10^{-2} m^2 . 36 km/h bằng 10 m/s , không phải 36 m/s hay $3,6 \text{ m/s}$.

Converting units without squaring: 1 cm^2 is 10^{-4} m^2 , not 10^{-2} m^2 . 36 km/h is 10 m/s , not 36 m/s or 3.6 m/s .

1.2. Phân tích thứ nguyên: tìm dạng của định luật — Dimensional analysis: finding the form of a law

Khi biết đại lượng cần tìm phụ thuộc vào những đại lượng nào, thứ nguyên thường đủ để suy ra dạng công thức. Phương pháp gồm bốn bước: liệt kê các đại lượng ảnh hưởng, viết $y = C \cdot x_1^p \cdot x_2^q \cdot x_3^r$ với C không thứ nguyên, cân bằng lũy thừa của M, L, T hai vế, giải hệ.

When the quantities that a result depends on are known, dimensions are often enough to fix the form of the formula. The method has four steps: list the relevant quantities, write $y = C \cdot x_1^p \cdot x_2^q \cdot x_3^r$ with C dimensionless, equate the powers of M, L, T on both sides, solve the system.

TÍNH CHẤT 1.4 (Phân tích thứ nguyên) / PROPERTY 1.4 (Dimensional analysis) —

Nếu đại lượng y chỉ phụ thuộc vào x_1, x_2, x_3 và quan hệ có dạng tích lũy thừa $y = C \cdot x_1^p x_2^q x_3^r$, thì các lũy thừa p, q, r được xác định bởi ba phương trình (một cho mỗi M, L, T), còn C là hằng số không thứ nguyên mà thứ nguyên không cho biết. Khi có nhiều hơn ba đại lượng độc lập, hệ thiếu phương trình: phải ghép các đại lượng thành tổ hợp không thứ nguyên, và y phụ thuộc vào các tổ hợp đó qua một hàm chưa biết.

If a quantity y depends only on x_1, x_2, x_3 and the relation is a product of powers $y = C \cdot x_1^p x_2^q x_3^r$, then the powers p, q, r are fixed by three equations (one each for M, L, T), while C is a dimensionless constant that dimensions cannot supply. With more than three independent quantities the system is short of equations: the quantities must be grouped into dimensionless combinations, and y depends on them through an unknown function.

Việc chọn đúng danh sách đại lượng là phần vật lí của bài toán. Thiếu một đại lượng thì công thức sai; thừa một đại lượng thì lũy thừa của nó tự ra bằng 0 hoặc hệ vô nghiệm, đó cũng là cách phát hiện đại lượng thừa.

Choosing the list of quantities is the physics of the problem. Omit one and the formula is wrong; include an extra one and its power comes out zero or the system has no solution, which is also how a superfluous quantity is detected.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Con lắc đơn: chu kỳ có thể phụ thuộc chiều dài dây ℓ , khối lượng quả nặng m , gia tốc rơi tự do g , biên độ góc θ_0 . Biên độ góc không thứ nguyên, nên nó chỉ vào hệ số C , không vào lũy thừa. Chỉ m có chứa M : nếu m có mặt thì phương trình của M buộc lũy thừa của m bằng 0.

Simple pendulum: the period may depend on the string length ℓ , the bob mass m , the free-fall acceleration g and the angular amplitude θ_0 . The amplitude is dimensionless, so it enters the constant C , not a power. Only m contains M : if m is present, the M equation forces its power to be zero.

VÍ DỤ 1.2 (Phân tích thứ nguyên cơ bản) / EXAMPLE 1.2 (Basic dimensional analysis)

— Tìm dạng công thức chu kỳ T của con lắc đơn có dây dài ℓ , quả nặng khối lượng m , tại nơi có gia tốc rơi tự do g , dao động với biên độ nhỏ.

Find the form of the period T of a simple pendulum with string length ℓ and bob mass m , where the free-fall acceleration is g , oscillating with small amplitude.

Lời giải. / Solution.

Đặt $T = C \cdot \ell^p \cdot m^q \cdot g^r$. Thứ nguyên: $T = L^p \cdot M^q \cdot (LT^{-2})^r$.

Set $T = C \cdot \ell^p \cdot m^q \cdot g^r$. Dimensions: $T = L^p \cdot M^q \cdot (LT^{-2})^r$.

1. Lũy thừa của M : $0 = q$, nên $q = 0$. Khối lượng không có mặt.

Power of M : $0 = q$, so $q = 0$. The mass drops out.

2. Lũy thừa của T : $1 = -2r$, nên $r = -1/2$.

Power of T : $1 = -2r$, so $r = -1/2$.

3. Lũy thừa của L : $0 = p + r$, nên $p = 1/2$.

Power of L : $0 = p + r$, so $p = 1/2$.

$$T = C\sqrt{\ell/g} \quad (1.1)$$

Vậy chu kỳ tỉ lệ với căn bậc hai của chiều dài, không phụ thuộc khối lượng; hằng số C không thứ nguyên và thứ nguyên không xác định được nó (ở biên độ nhỏ $C = 2\pi$, chương Thực nghiệm và bài toán tổng hợp chỉ phát biểu).

Hence the period is proportional to the square root of the length and independent of the mass; C is dimensionless and dimensions cannot fix it (for small amplitude $C = 2\pi$, which the chapter on experiments and synthesis problems only quotes). ■

NHẬN XÉT / REMARK — Hằng số C có thể tìm bằng một lần đo: đo T tại một ℓ , tính $C = T\sqrt{g/\ell}$, rồi dùng cho mọi ℓ khác. Đây là cách dùng phân tích thứ nguyên để chuyển một thí nghiệm thành một dự đoán, như ở ví dụ 1.14.

The constant C can be found from one measurement: measure T at one ℓ , compute $C = T\sqrt{g/\ell}$, then

use it for every other ℓ . This is how dimensional analysis turns one experiment into a prediction, as in example 1.14.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Lực cản của không khí lên vật chuyển động nhanh phụ thuộc mật độ không khí ρ , diện tích mặt cắt ngang S , tốc độ v . Lực có M mà chỉ ρ mang M , nên lũy thừa của ρ phải là 1. Sau đó chỉ còn L và T để định S và v .

The air drag on a fast body depends on the air density ρ , the cross-sectional area S and the speed v . Force contains M and only ρ carries M , so the power of ρ must be 1. Only L and T then remain to fix S and v .

VÍ DỤ 1.3 (Hằng số không thứ nguyên cho trước) / EXAMPLE 1.3 (A given dimensionless constant)

— Lực cản F của không khí lên vật chuyển động nhanh phụ thuộc vào khối lượng riêng ρ của không khí, diện tích mặt cắt ngang S của vật và tốc độ v . Tìm dạng của F . Từ đó ước lượng tốc độ rơi ổn định của một giọt mưa bán kính 1,0 mm, biết hằng số không thứ nguyên của công thức là 0,25 và $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$.

The drag F of air on a fast body depends on the air density ρ , the body's cross-sectional area S and its speed v . Find the form of F . Then estimate the steady fall speed of a raindrop of radius 1.0 mm, given that the dimensionless constant of the formula is 0.25 and $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

Lời giải. / Solution.

Đặt $F = C \cdot \rho^a \cdot S^b \cdot v^c$; $[F] = \text{MLT}^{-2}$, $[\rho] = \text{ML}^{-3}$, $[S] = \text{L}^2$, $[v] = \text{LT}^{-1}$.

Set $F = C \cdot \rho^a \cdot S^b \cdot v^c$; $[F] = \text{MLT}^{-2}$, $[\rho] = \text{ML}^{-3}$, $[S] = \text{L}^2$, $[v] = \text{LT}^{-1}$.

1. M : $1 = a$. T : $-2 = -c$, nên $c = 2$. L : $1 = -3a + 2b + c = -3 + 2b + 2$, nên $b = 1$.

M : $1 = a$. T : $-2 = -c$, so $c = 2$. L : $1 = -3a + 2b + c = -3 + 2b + 2$, so $b = 1$.

$$F = C\rho S v^2 \quad (1.2)$$

Giọt mưa ổn định khi lực cản cân bằng trọng lực: $C\rho S v^2 = mg$. Khối lượng $m = (4/3)\pi r^3 \rho_n$ với $\rho_n = 1000 \text{ kg/m}^3$, diện tích $S = \pi r^2$. Với $r = 1,0 \text{ mm}$: $m \approx 4,19 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$, $S \approx 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

The drop is steady when drag balances weight: $C\rho S v^2 = mg$. The mass is $m = (4/3)\pi r^3 \rho_w$ with $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ and $S = \pi r^2$. For $r = 1.0 \text{ mm}$: $m \approx 4.19 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$, $S \approx 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

$$v = \sqrt{(mg/(C\rho S))}$$

Vậy $v \approx 6,6 \text{ m/s}$. Gấp đôi bán kính thì m tăng 8 lần, S tăng 4 lần, v tăng $\sqrt{2}$ lần, tức khoảng 9,3 m/s.

Hence $v \approx 6.6 \text{ m/s}$. Doubling the radius multiplies m by 8 and S by 4, so v grows by $\sqrt{2}$, to about 9.3 m/s. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho đại lượng thừa vào danh sách (ví dụ khối lượng quả nặng trong chu kỳ con lắc) rồi cố giữ lũy thừa khác 0. Hệ phương trình sẽ tự buộc nó bằng 0; nếu hệ vô nghiệm thì danh sách đại lượng đã sai.

Putting a superfluous quantity in the list (the bob mass in the pendulum period) and trying to keep its power nonzero. The system forces it to zero; if the system has no solution, the list of quantities is wrong.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên rằng hằng số C của phân tích thứ nguyên không do thứ nguyên quyết định: kết quả $T = C\sqrt{\ell/g}$ không cho biết T bằng bao nhiêu giây nếu chưa có một phép đo hay một lí thuyết cho C .

Forgetting that the constant C is not fixed by dimensions: $T = C\sqrt{\ell/g}$ does not give T in seconds until a measurement or a theory supplies C .

1.3. Ước lượng bậc độ lớn — Order-of-magnitude estimation

ĐỊNH NGHĨA 1.5 (Bậc độ lớn) / DEFINITION 1.5 (Order of magnitude) — Bậc độ lớn của số dương x là số mũ nguyên n sao cho 10^n gần x nhất theo thang lôgarit, tức n là số nguyên gần nhất với $\lg x$. Hai đại lượng cùng bậc độ lớn khi tỉ số của chúng nằm trong khoảng từ $1/3$ đến 3 (xấp xỉ $\sqrt{10}$). Ước lượng Fermi là tính một đại lượng chưa biết từ vài số liệu quen thuộc, mỗi số làm tròn đến bậc độ lớn hay một chữ số có nghĩa.

The order of magnitude of a positive number x is the integer n such that 10^n is nearest to x on a logarithmic scale, that is, the integer nearest to $\lg x$. Two quantities have the same order of magnitude when their ratio lies between $1/3$ and 3 (about $\sqrt{10}$). A Fermi estimate computes an unknown quantity from a few familiar numbers, each rounded to an order of magnitude or to one significant figure.

Một ước lượng Fermi là tích và thương của nhiều thừa số, nên sai số tương đối của kết quả là tổng các sai số tương đối của từng thừa số (mục 1.5). Sai lệch hai lần ở thừa số này thường bù một phần cho sai lệch ở thừa số khác, nên kết quả cuối thường đúng trong khoảng ba lần. Thừa số có lũy thừa cao (bán kính, vận tốc bình phương) cần ước lượng cẩn thận nhất.

A Fermi estimate is a product and quotient of several factors, so the relative uncertainty of the result is the sum of the relative uncertainties of the factors (section 1.5). A factor-of-two miss in one factor often partly cancels a miss in another, so the final result is usually right within a factor of three. Factors with high powers (a radius, a squared speed) deserve the most care.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Tim đập đều, tuổi thọ vài chục năm: đổi mọi thời gian ra giây hay ra phút theo cùng một đơn vị, nhân từng thừa số, giữ lại lũy thừa của 10 riêng khỏi phần thập phân để dễ kiểm.

A steady heartbeat over a lifetime of several decades: convert all times to the same unit, multiply factor by factor, and keep the power of ten apart from the decimal part so that the result is easy to check.

VÍ DỤ 1.4 (Chuỗi thừa số trong ước lượng Fermi) / EXAMPLE 1.4 (A chain of factors in a Fermi estimate) — Ước lượng số lần tim đập trong đời một người sống 75 năm, nhịp tim lúc nghỉ 70 lần/phút. Mỗi lần tim bơm khoảng 70 mL máu: tổng thể tích máu bơm trong đời bằng bao nhiêu lần thể tích một bể bơi $50\text{ m} \times 25\text{ m} \times 2\text{ m}$?

Estimate the number of heartbeats in the life of a person who lives 75 years with a resting rate of 70 beats per minute. Each beat pumps about 70 mL of blood: how many times the volume of a $50\text{ m} \times 25\text{ m} \times 2\text{ m}$ swimming pool is pumped in a lifetime?

Lời giải. / Solution.

Số phút trong một năm: $60 \cdot 24 \cdot 365 = 525\,600 \approx 5,3 \cdot 10^5$.

Minutes in a year: $60 \cdot 24 \cdot 365 = 525,600 \approx 5.3 \cdot 10^5$.

$$N = 70 \cdot 525600 \cdot 75 \approx 28 \cdot 10^8$$

Bậc độ lớn là 10^9 ($\lg N \approx 9,44$). Lượng máu: $2,8 \cdot 10^9 \cdot 70 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \approx 1,93 \cdot 10^5 \text{ m}^3$.

The order of magnitude is 10^9 ($\lg N \approx 9.44$). The blood volume is $2.8 \cdot 10^9 \cdot 70 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \approx 1.93 \cdot 10^5 \text{ m}^3$.

Bể bơi chứa $50 \cdot 25 \cdot 2 = 2500 \text{ m}^3$, nên tỉ số khoảng 77.

The pool holds $50 \cdot 25 \cdot 2 = 2500 \text{ m}^3$, so the ratio is about 77.

Vậy tim đập cỡ $3 \cdot 10^9$ lần, và lượng máu bơm trong đời cỡ 80 bể bơi. Nhịp 60 hay 80 lần/phút chỉ thay kết quả dưới 20%, nhỏ hơn mức bất định của số năm sống.

Hence the heart beats about $3 \cdot 10^9$ times, and the blood pumped in a lifetime is about 80 pools. A rate of 60 or 80 beats per minute changes the result by under 20%, less than the uncertainty in the lifespan. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Tính ngược cũng là một kiểm tra: tim bơm 70 mL mỗi lần và 70 lần mỗi phút cho 4,9 L/phút, đúng cỡ lưu lượng máu thật khi nghỉ. Một ước lượng có số liệu đầu vào sai thường lộ ra khi đối chiếu với một đại lượng khác mà ta biết.

Working backwards is also a check: 70 mL per beat at 70 beats per minute is 4.9 L/min, the right scale for resting blood flow. An estimate with a wrong input often shows itself when compared with another quantity one already knows.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Làm tròn sớm từng bước rồi nhân: làm tròn 1,4 lên 2 ở ba thừa số liên tiếp sai tới 2,9 lần. Giữ hai chữ số đến bước cuối, làm tròn một lần.

Rounding at every step before multiplying: rounding 1.4 up to 2 in three successive factors is off by 2.9 times. Keep two figures until the last step and round once.

Đại lượng <i>Quantity</i>	Giá trị thường dùng <i>Typical value</i>
Bán kính nguyên tử <i>Atomic radius</i>	10^{-10} m
Bước chân người lớn <i>Adult step length</i>	0,7 m <i>0.7 m</i>
Khối lượng riêng nước, không khí <i>Density of water, air</i>	10^3 kg/m^3 , $1,2 \text{ kg/m}^3$ <i>10^3 kg/m^3, 1.2 kg/m^3</i>
Áp suất khí quyển <i>Atmospheric pressure</i>	$1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ <i>$1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$</i>
Bán kính Trái Đất <i>Radius of the Earth</i>	$6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ <i>$6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$</i>
Khoảng cách Trái Đất đến Mặt Trăng <i>Earth to Moon distance</i>	$3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$ <i>$3.8 \cdot 10^8 \text{ m}$</i>
Một năm <i>One year</i>	$3,2 \cdot 10^7 \text{ s}$ <i>$3.2 \cdot 10^7 \text{ s}$</i>

Đại lượng <i>Quantity</i>	Giá trị thường dùng <i>Typical value</i>
Công suất làm việc của người <i>Sustained power of a person</i>	100 W

1.4. Phép đo, chữ số có nghĩa và sai số — *Measurement, significant figures and uncertainty*

ĐỊNH NGHĨA 1.6 (Chữ số có nghĩa) / DEFINITION 1.6 (Significant figures) — Chữ số có nghĩa của một kết quả đo là các chữ số đáng tin, kể từ chữ số khác 0 đầu tiên bên trái đến chữ số bất định cuối cùng. Số 0 đứng đầu không tính (0,0250 có 3 chữ số có nghĩa); số 0 ở cuối sau dấu phẩy tính (2,50 có 3). Khi nhân, chia: kết quả giữ số chữ số có nghĩa bằng thừa số có ít chữ số nhất. Khi cộng, trừ: kết quả giữ số chữ số thập phân bằng số hạng có ít chữ số thập phân nhất.

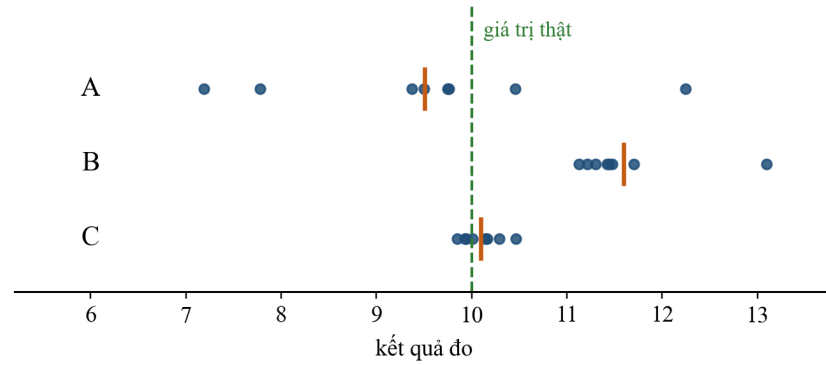
The significant figures of a measured result are the trustworthy digits, from the first nonzero digit on the left to the last uncertain digit. Leading zeros do not count (0.0250 has 3 significant figures); trailing zeros after the decimal point do (2.50 has 3). In multiplication and division the result keeps as many significant figures as the factor with the fewest. In addition and subtraction it keeps as many decimal places as the term with the fewest.

ĐỊNH NGHĨA 1.7 (Sai số tuyệt đối và tương đối) / DEFINITION 1.7 (Absolute and relative uncertainty) — Nếu đại lượng x đo được giá trị trung bình $\bar{x}$ và sai số tuyệt đối Δx thì kết quả viết $x = \bar{x} \pm \Delta x$, nghĩa là giá trị thật nằm trong khoảng từ $\bar{x} - \Delta x$ đến $\bar{x} + \Delta x$. Sai số tương đối $\epsilon_x = \Delta x / |\bar{x}|$, thường viết bằng phần trăm. Quy ước ghi: Δx làm tròn đến một chữ số có nghĩa (hai chữ số nếu chữ số đầu là 1), $\bar{x}$ làm tròn đến cùng hàng thập phân với Δx .

If the quantity x has mean $\bar{x}$ and absolute uncertainty Δx , the result is written $x = \bar{x} \pm \Delta x$, meaning the true value lies between $\bar{x} - \Delta x$ and $\bar{x} + \Delta x$. The relative uncertainty is $\epsilon_x = \Delta x / |\bar{x}|$, often given as a percentage. Convention: round Δx to one significant figure (two if the first digit is 1) and round $\bar{x}$ to the same decimal place as Δx .

ĐỊNH NGHĨA 1.8 (Sai số ngẫu nhiên, hệ thống, dụng cụ) / DEFINITION 1.8 (Random, systematic and instrument errors) — Sai số ngẫu nhiên làm các lần đo lặp lại rải quanh một giá trị, lệch về hai phía, và giảm khi lấy trung bình nhiều lần (phản ứng bấm đồng hồ, dao động của kim). Sai số hệ thống làm mọi lần đo lệch cùng một phía với cùng một độ lớn (thước giãn, đồng hồ chạy nhanh, bỏ sót bán kính quả cầu khi đo chiều dài con lắc); lấy trung bình không loại được nó. Sai số dụng cụ lấy bằng nửa độ chia nhỏ nhất của dụng cụ, hoặc bằng độ chính xác ghi trên dụng cụ.

A random error scatters repeated readings about a value, on both sides, and shrinks when many readings are averaged (reaction in timing, a flickering needle). A systematic error shifts every reading the same way by the same amount (a stretched ruler, a fast clock, forgetting the bob radius when measuring a pendulum length); averaging does not remove it. The instrument error is taken as half the smallest division, or the accuracy printed on the instrument.



Hình 1.1. Tám lần đo của một đại lượng có giá trị thật 10 (đường nét đứt); vạch cam là trung bình. A: ngẫu nhiên lớn, hệ thống nhỏ. B: ngẫu nhiên nhỏ, lệch hệ thống. C: cả hai đều nhỏ.

Figure 1.1. Eight measurements of a quantity whose true value is 10 (dashed line); the orange tick is the mean. A: large random, small systematic error. B: small random error, systematic shift. C: both small.

ĐỊNH NGHĨA 1.9 (Trung bình và độ lệch) / DEFINITION 1.9 (Mean and deviation) —

Với n lần đo $x_1, \dots, x_n$: giá trị trung bình $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$. Độ lệch trung bình $\Delta x_{ng} = (|x_1 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|)/n$. Độ lệch chuẩn mẫu $s = \sqrt{(\sum (x_i - \bar{x})^2)/(n - 1)}$; sai số chuẩn của trung bình $s/\sqrt{n}$. Sai số tuyệt đối toàn phần theo quy ước thi học sinh giỏi: $\Delta x = \Delta x_{ng} + \Delta x_{dc}$, với Δx_{dc} là sai số dụng cụ.

For n readings $x_1, \dots, x_n$: the mean is $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$. The mean deviation is $\Delta x_r = (|x_1 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|)/n$. The sample standard deviation is $s = \sqrt{(\sum (x_i - \bar{x})^2)/(n - 1)}$; the standard error of the mean is $s/\sqrt{n}$. The total absolute uncertainty in the usual olympiad convention is $\Delta x = \Delta x_r + \Delta x_{in}$, where Δx_{in} is the instrument error.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Năm số đọc đồng hồ bấm giây có độ chia 0,01 s. Tính trung bình trước, lấy từng độ lệch, rồi cộng sai số dụng cụ. Kết quả cuối viết đúng quy ước làm tròn.

Five stopwatch readings with a 0.01 s division. Compute the mean first, take each deviation, then add the instrument error. Write the final result in the rounding convention.

VÍ DỤ 1.5 (Viết kết quả đo đúng quy ước) / EXAMPLE 1.5 (Writing a measured result correctly) —

Năm lần đo thời gian một chuyển động, đồng hồ bấm giây có độ chia nhỏ nhất 0,01 s, cho: 2,31; 2,28; 2,35; 2,30; 2,33 (s). Viết kết quả $t = \bar{t} \pm \Delta t$ và nêu độ lệch chuẩn mẫu cùng sai số chuẩn của trung bình.

Five timings of a motion with a stopwatch of smallest division 0.01 s give: 2.31, 2.28, 2.35, 2.30, 2.33 (s). Write the result $t = \bar{t} \pm \Delta t$ and give the sample standard deviation and the standard error of the mean.

Lời giải. / Solution.

Trung bình $\bar{t} = 2,314$ s. Các độ lệch tuyệt đối: 0,004; 0,034; 0,036; 0,014; 0,016 (s), trung bình 0,021 s.

The mean is $\bar{t} = 2.314$ s. The absolute deviations are 0.004, 0.034, 0.036, 0.014, 0.016 (s), averaging 0.021 s.

Sai số dụng cụ lấy bằng độ chia nhỏ nhất, 0,01 s. Tổng: $\Delta t = 0,021 + 0,01 = 0,031$ s, làm tròn thành 0,03 s.

The instrument error is the smallest division, 0.01 s. Total: $\Delta t = 0.021 + 0.01 = 0.031$ s, rounded to 0.03 s.

Độ lệch chuẩn mẫu $s = 0,027$ s; sai số chuẩn $s/\sqrt{5} = 0,012$ s.

The sample standard deviation is $s = 0.027$ s; the standard error is $s/\sqrt{5} = 0.012$ s.

Vậy $t = 2,31 \pm 0,03$ s ($\varepsilon \approx 1,3\%$). Viết $2,314 \pm 0,03$ là sai quy ước vì chữ số thứ ba sau dấu phẩy nằm sau chữ số bất định.

Hence $t = 2.31 \pm 0.03$ s ($\varepsilon \approx 1.3\%$). Writing 2.314 ± 0.03 breaks the convention because the third decimal lies beyond the uncertain digit. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Sai số dụng cụ và độ lệch ngẫu nhiên cộng với nhau. Nếu năm lần đo trùng nhau hết (độ lệch 0), sai số vẫn bằng sai số dụng cụ, không bằng 0.

The instrument error and the random deviation add together. If five readings coincide (deviation 0), the uncertainty is still the instrument error, not 0.

NHẬN XÉT / REMARK — Độ lệch chuẩn s mô tả độ rải của từng lần đo và không giảm khi đo thêm; sai số chuẩn $s/\sqrt{n}$ mô tả độ tin cậy của trung bình và giảm theo $\sqrt{n}$. Đo thêm 4 lần để giảm một nửa sai số ngẫu nhiên của trung bình, nhưng không đụng tới sai số hệ thống.

The standard deviation s describes the scatter of single readings and does not shrink with more readings; the standard error $s/\sqrt{n}$ describes the reliability of the mean and shrinks as $\sqrt{n}$. Four times as many readings halve the random error of the mean but leave the systematic error untouched.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Ghi kết quả thừa chữ số: $t = 2,3140 \pm 0,03$ s. Chữ số cuối của giá trị phải cùng hàng thập phân với chữ số cuối của sai số.

Quoting surplus digits: $t = 2.3140 \pm 0.03$ s. The last digit of the value must sit in the same decimal place as the last digit of the uncertainty.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tưởng đo nhiều lần thì loại được mọi sai số. Một thước bị lệch vạch 0 cho cùng một độ lệch ở mọi lần đo: trung bình của chúng vẫn lệch.

Believing that many readings remove every error. A ruler with a shifted zero gives the same offset in every reading: their mean is still offset.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Cộng, trừ: sai số tuyệt đối cộng lại. Nhân, chia: sai số tương đối cộng lại. Lũy thừa n : sai số tương đối nhân với $|n|$.

Sum, difference: absolute uncertainties add. Product, quotient: relative uncertainties add. Power n : the relative uncertainty is multiplied by $|n|$.

1.5. Truyền sai số — Propagation of uncertainty

Đại lượng gián tiếp y tính từ các đại lượng đo trực tiếp $x_1, x_2, \dots$. Sai số của y lấy theo trường hợp xấu nhất: mọi sai số cùng đẩy y về một phía. Cách này cho sai số lớn hơn mức thống kê nhưng đơn giản và an toàn, là cách được dùng trong đề thi.

An indirect quantity y is computed from directly measured quantities $x_1, x_2, \dots$. The uncertainty of y is taken for the worst case: every error pushes y the same way. This gives a larger uncertainty than the statistical one but is simple and safe, and is the method used in olympiad papers.

ĐỊNH LÝ 1.10 (Truyền sai số) / THEOREM 1.10 (Propagation of uncertainty) — Với $a \pm \Delta a$ và $b \pm \Delta b$: (1) $y = a \pm b$ có $\Delta y = \Delta a + \Delta b$. (2) $y = ab$ hoặc $y = a/b$ có $\varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_b$. (3) $y = a^n$ có $\varepsilon_y = |n| \cdot \varepsilon_a$, với ε_a nhỏ.
For $a \pm \Delta a$ and $b \pm \Delta b$: (1) $y = a \pm b$ has $\Delta y = \Delta a + \Delta b$. (2) $y = ab$ or $y = a/b$ has $\varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_b$. (3) $y = a^n$ has $\varepsilon_y = |n| \cdot \varepsilon_a$ for small ε_a .

Chứng minh. / Proof.

(1) Giá trị lớn nhất của $a + b$ là $(a + \Delta a) + (b + \Delta b) = (a + b) + (\Delta a + \Delta b)$; giá trị nhỏ nhất là $(a + b) - (\Delta a + \Delta b)$. Với $a - b$: lớn nhất là $(a + \Delta a) - (b - \Delta b) = (a - b) + (\Delta a + \Delta b)$. Vậy trong cả hai trường hợp $\Delta y = \Delta a + \Delta b$.

(1) The largest value of $a + b$ is $(a + \Delta a) + (b + \Delta b) = (a + b) + (\Delta a + \Delta b)$, the smallest is $(a + b) - (\Delta a + \Delta b)$. For $a - b$ the largest is $(a + \Delta a) - (b - \Delta b) = (a - b) + (\Delta a + \Delta b)$. So in both cases $\Delta y = \Delta a + \Delta b$.

(2) $(a + \Delta a)(b + \Delta b) = ab(1 + \varepsilon_a)(1 + \varepsilon_b) = ab(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_a \varepsilon_b)$. Tích $\varepsilon_a \varepsilon_b$ nhỏ hơn nhiều so với $\varepsilon_a + \varepsilon_b$ nên bỏ đi: $\varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_b$. Với thương: a/b lớn nhất là $a(1 + \varepsilon_a)/(b(1 - \varepsilon_b)) \approx (a/b)(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b)$, vì $1/(1 - \varepsilon) \approx 1 + \varepsilon$ khi ε nhỏ.

(2) $(a + \Delta a)(b + \Delta b) = ab(1 + \varepsilon_a)(1 + \varepsilon_b) = ab(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_a \varepsilon_b)$. The product $\varepsilon_a \varepsilon_b$ is far smaller than $\varepsilon_a + \varepsilon_b$ and is dropped: $\varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_b$. For the quotient the largest a/b is $a(1 + \varepsilon_a)/(b(1 - \varepsilon_b)) \approx (a/b)(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b)$, since $1/(1 - \varepsilon) \approx 1 + \varepsilon$ for small ε .

(3) Với n nguyên dương, a^n là tích của n thừa số a , mỗi thừa số có sai số tương đối ε_a , nên $\varepsilon_y = n\varepsilon_a$ theo (2). Với n âm, $1/a^{|n|}$ là thương nên $\varepsilon_y = |n|\varepsilon_a$. Với n không nguyên (như $1/2$ cho căn bậc hai), dùng $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ khi ε nhỏ (phát biểu, không chứng minh ở lớp 10).

(3) For positive integer n , a^n is a product of n factors a , each with relative uncertainty ε_a , so $\varepsilon_y = n\varepsilon_a$ by (2). For negative n , $1/a^{|n|}$ is a quotient so $\varepsilon_y = |n|\varepsilon_a$. For non-integer n (such as $1/2$ for a square root) use $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ for small ε (quoted, not proved at grade 10). ■

HỆ QUẢ 1.11 / COROLLARY 1.11 — Nếu $y = C \cdot x_1^p \cdot x_2^q \cdot x_3^r$ thì $\varepsilon_y = |p|\varepsilon_1 + |q|\varepsilon_2 + |r|\varepsilon_3$, với ε_i là sai số tương đối của x_i . Hằng số chính xác C không đóng góp.
If $y = Cx_1^p \cdot x_2^q \cdot x_3^r$ then $\varepsilon_y = |p|\varepsilon_1 + |q|\varepsilon_2 + |r|\varepsilon_3$, where ε_i is the relative uncertainty of x_i . An exact constant C contributes nothing.

Chứng minh. / Proof.

Áp dụng liên tiếp (2) cho tích và (3) cho từng lũy thừa. Hằng số chính xác có sai số bằng 0.

Apply (2) to the product and (3) to each power in turn. An exact constant has zero uncertainty. ■

Khi các sai số độc lập và ngẫu nhiên, xác suất để tất cả cùng đẩy y về một phía nhỏ; sai số thống kê khi đó là căn của tổng bình phương: với $y = ab$, $\varepsilon_y = \sqrt{(\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2)}$ (phát biểu, không chứng minh). Con số này nhỏ hơn tổng ở trên; sách này và đề thi dùng tổng, trừ khi đề yêu cầu khác.

When the errors are independent and random, the chance that all push y the same way is small; the statistical uncertainty is then the root of the sum of squares: for $y = ab$, $\epsilon_y = \sqrt{(\epsilon_a^2 + \epsilon_b^2)}$ (quoted, not proved). It is smaller than the sum above; this book and olympiad papers use the sum unless told otherwise.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Khối lượng riêng của hình trụ $\rho = 4m/(\pi d^2 h)$: d xuất hiện bình phương. Trước khi tính, ước lượng sai số tương đối của m , d , h ; đại lượng có $|\text{lũy thừa}| \times$ sai số tương đối lớn nhất chi phối kết quả và là chỗ đáng cải thiện dụng cụ.
The density of a cylinder is $\rho = 4m/(\pi d^2 h)$ with d squared. Before computing, estimate the relative uncertainty of m , d , h ; the quantity with the largest $|\text{power}| \times \text{relative uncertainty}$ dominates the result and is where a better instrument pays off.

VÍ DỤ 1.6 (Đại lượng chi phối sai số) / EXAMPLE 1.6 (The dominant source of uncertainty) — Một hình trụ đồng chất: $m = 25,80 \text{ g} \pm 0,05 \text{ g}$, đường kính $d = 10,02 \text{ mm} \pm 0,02 \text{ mm}$, chiều cao $h = 38,50 \text{ mm} \pm 0,02 \text{ mm}$. Tính khối lượng riêng ρ và sai số. Đại lượng nào cần đo chính xác hơn?
A uniform cylinder: $m = 25.80 \text{ g} \pm 0.05 \text{ g}$, diameter $d = 10.02 \text{ mm} \pm 0.02 \text{ mm}$, height $h = 38.50 \text{ mm} \pm 0.02 \text{ mm}$. Find the density ρ and its uncertainty. Which quantity most needs a better measurement?

Lời giải. / Solution.

$$\rho = 4m/(\pi d^2 h) \quad (1.3)$$

Đổi $d = 1,002 \text{ cm}$, $h = 3,850 \text{ cm}$: $\rho = 4 \cdot 25,80/(\pi \cdot 1,002^2 \cdot 3,850) \approx 8,50 \text{ g/cm}^3$.

With $d = 1.002 \text{ cm}$ and $h = 3.850 \text{ cm}$: $\rho = 4 \cdot 25.80/(\pi \cdot 1.002^2 \cdot 3.850) \approx 8.50 \text{ g/cm}^3$.

1. Sai số tương đối: $\epsilon_m = 0,05/25,80 \approx 0,19\%$; $\epsilon_d = 0,02/10,02 \approx 0,20\%$, nhân lũy thừa 2 cho $0,40\%$; $\epsilon_h = 0,02/38,50 \approx 0,05\%$.

Relative uncertainties: $\epsilon_m = 0.05/25.80 \approx 0.19\%$; $\epsilon_d = 0.02/10.02 \approx 0.20\%$, times the power 2 gives 0.40% ; $\epsilon_h = 0.02/38.50 \approx 0.05\%$.

2. Cộng: $\epsilon_\rho = 0,19 + 0,40 + 0,05 \approx 0,64\%$, nên $\Delta\rho = 0,64\% \cdot 8,50 \approx 0,05 \text{ g/cm}^3$.

Add: $\epsilon_\rho = 0.19 + 0.40 + 0.05 \approx 0.64\%$, so $\Delta\rho = 0.64\% \cdot 8.50 \approx 0.05 \text{ g/cm}^3$.

Vậy $\rho = 8,50 \pm 0,05 \text{ g/cm}^3$. Đường kính chiếm khoảng 62% sai số toàn phần; thay thước kẹp bằng panme (độ chính xác 0,01 mm) giảm phần này một nửa. Nếu tính theo căn của tổng bình phương, $\epsilon_\rho \approx 0,45\%$.

Hence $\rho = 8.50 \pm 0.05 \text{ g/cm}^3$. The diameter supplies about 62% of the total uncertainty; a micrometer (accuracy 0.01 mm) in place of the calipers halves that share. With the root of the sum of squares, $\epsilon_\rho \approx 0.45\%$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Con lắc đơn đo g qua $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, tức $g = 4\pi^2\ell/T^2$. T nằm bình phương, nên sai số của T tính gấp đôi. Thời gian đo bằng đồng hồ bấm tay có sai số cố định cỡ 0,2 s bất kể số dao động: đo nhiều dao động làm sai số tương đối của T giảm.
A pendulum gives g through $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, that is $g = 4\pi^2\ell/T^2$. T is squared, so its uncertainty counts twice. A hand-held stopwatch has a fixed error of about 0.2 s whatever the number of swings: timing more swings reduces the relative uncertainty of T .

VÍ DỤ 1.7 (Chọn số dao động theo sai số yêu cầu) / EXAMPLE 1.7 (Choosing the number of oscillations from the required accuracy) — Đo con lắc đơn: $\ell = 0,850 \text{ m} \pm 0,001 \text{ m}$; thời gian 20 dao động toàn phần $t = 37,00 \text{ s} \pm 0,2 \text{ s}$. (a) Tính g và sai số. (b) Cần ít nhất bao nhiêu dao động để $\varepsilon_g \leq 0,8\%$ nếu ℓ và sai số của t giữ nguyên? (c) Biên độ góc 5° gây sai lệch hệ thống bao nhiêu?

A simple pendulum: $\ell = 0.850 \text{ m} \pm 0.001 \text{ m}$; the time for 20 complete oscillations is $t = 37.00 \text{ s} \pm 0.2 \text{ s}$. (a) Find g and its uncertainty. (b) How many oscillations are needed at least for $\varepsilon_g \leq 0.8\%$ if ℓ and the error of t stay the same? (c) How large is the systematic effect of a 5° amplitude?

Lời giải. / Solution.

(a) $T = t/20 = 1,850 \text{ s}$. Từ $g = 4\pi^2\ell/T^2$:

(a) $T = t/20 = 1.850 \text{ s}$. From $g = 4\pi^2\ell/T^2$:

$$\varepsilon_g = \varepsilon_\ell + 2\varepsilon_T$$

$\varepsilon_\ell = 0,001/0,850 \approx 0,12\%$; $\varepsilon_T = \varepsilon_t = 0,2/37,00 \approx 0,54\%$ (chia cho 20 không đổi sai số tương đối). Do đó $\varepsilon_g \approx 1,20\%$, $g \approx 9,80 \text{ m/s}^2$, $\Delta g \approx 0,12 \text{ m/s}^2$.

$\varepsilon_\ell = 0.001/0.850 \approx 0.12\%$; $\varepsilon_T = \varepsilon_t = 0.2/37.00 \approx 0.54\%$ (dividing by 20 leaves the relative uncertainty unchanged). So $\varepsilon_g \approx 1.20\%$, $g \approx 9.80 \text{ m/s}^2$, $\Delta g \approx 0.12 \text{ m/s}^2$.

(b) Cần $2\varepsilon_t \leq 0,8\% - 0,12\%$, tức $\varepsilon_t \leq 0,34\%$. Vì Δt cố định $0,2 \text{ s}$ nên $t \geq 0,2/0,0034 \approx 58,6 \text{ s}$, tức $N \geq 58,6/1,850$, lấy $N = 32$ dao động.

(b) We need $2\varepsilon_t \leq 0.8\% - 0.12\%$, i.e. $\varepsilon_t \leq 0.34\%$. Since Δt is fixed at 0.2 s , $t \geq 0.2/0.0034 \approx 58.6 \text{ s}$, so $N \geq 58.6/1.850$, giving $N = 32$ oscillations.

(c) Với biên độ θ_0 , chu kỳ thật lớn hơn chu kỳ biên độ nhỏ khoảng $\theta_0^2/16$ (θ_0 tính bằng rad, phát biểu). Với $5^\circ = 0,0873 \text{ rad}$, độ lớn này bằng $0,048\%$, nhỏ hơn nhiều so với ε_T ở trên, nên bỏ qua được.

(c) For amplitude θ_0 the true period exceeds the small-amplitude period by about $\theta_0^2/16$ (θ_0 in rad, quoted). For $5^\circ = 0.0873 \text{ rad}$ this is 0.048% , far below the ε_T above, so it can be neglected.

Vậy $g = 9,80 \pm 0,12 \text{ m/s}^2$; cần ít nhất 32 dao động. Dùng $N = 50$ dao động thì $t \approx 92,5 \text{ s}$, $\varepsilon_t \approx 0,22\%$ và $\varepsilon_g \approx 0,55\%$.

Hence $g = 9.80 \pm 0.12 \text{ m/s}^2$, and at least 32 oscillations are needed. With $N = 50$ oscillations $t \approx 92.5 \text{ s}$, $\varepsilon_t \approx 0.22\%$ and $\varepsilon_g \approx 0.55\%$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Sai số cố định của người bấm đồng hồ (phản ứng lúc bắt đầu và lúc dừng) không đổi theo số dao động, còn thời gian đo tăng tỉ lệ với số dao động, nên sai số tương đối giảm theo $1/N$. Cũng vì thế, giới hạn thực tế là tắt dần: đo quá lâu thì biên độ không còn nhỏ.

The fixed error of the person timing (reaction at the start and at the stop) does not change with the number of swings, while the time grows in proportion to it, so the relative uncertainty falls as $1/N$. The practical limit is damping: time for too long and the amplitude is no longer small.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai số đo gần nhau trừ cho nhau: sai số tuyệt đối cộng lại, còn hiệu thì nhỏ, nên sai số tương đối của hiệu bị phóng to.

Two close readings subtracted: the absolute uncertainties add while the difference is small, so the relative uncertainty of the difference is magnified.

VÍ DỤ 1.8 (Hiệu của hai số gần nhau) / EXAMPLE 1.8 (Difference of two nearly equal readings) — Một dây thép dài treo vật nặng. Dùng thước có sai số mỗi lần đọc 0,05 cm, chiều dài dây trước khi treo là 85,42 cm, sau khi treo là 85,61 cm. Tính độ giãn $\Delta \ell$ và sai số. Nêu cách đo để sai số tương đối dưới 1%.

A long steel wire carries a load. With a ruler whose reading error is 0.05 cm, the length is 85.42 cm before loading and 85.61 cm after. Find the extension $\Delta \ell$ and its uncertainty. Suggest a way to measure it so that the relative uncertainty is below 1%.

Lời giải. / Solution.

Mỗi chiều dài có sai số tương đối chỉ 0,06%, rất tốt. Nhưng độ giãn là hiệu của hai chiều dài.

Each length has a relative uncertainty of only 0.06%. The extension, however, is the difference of two lengths.

$$\Delta \ell = \ell_2 - \ell_1, \Delta(\Delta \ell) = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2$$

$\Delta \ell = 85,61 - 85,42 = 0,19$ cm và sai số tuyệt đối $0,05 + 0,05 = 0,10$ cm, nên $\varepsilon \approx 53\%$.

$\Delta \ell = 85.61 - 85.42 = 0.19$ cm with absolute uncertainty $0.05 + 0.05 = 0.10$ cm, so $\varepsilon \approx 53\%$.

Kết quả $\Delta \ell = 0,19 \pm 0,10$ cm gần như vô nghĩa. Muốn dưới 1% khi $\Delta \ell \approx 0,19$ cm cần sai số tuyệt đối dưới $0,0019$ cm = $0,019$ mm. Đo trực tiếp độ giãn: gắn đồng hồ so (độ chính xác 0,01 mm, đặt kim về 0 trước khi treo) vào dây hoặc dùng đòn bẩy quang học làm phóng đại độ giãn lên hàng chục lần trước khi đọc.

The result $\Delta \ell = 0.19 \pm 0.10$ cm is almost meaningless. To get below 1% for $\Delta \ell \approx 0.19$ cm the absolute uncertainty must be below 0.0019 cm = 0.019 mm. Measure the extension directly: fix a dial gauge (accuracy 0.01 mm) to the wire, or use an optical lever that magnifies the extension tens of times before it is read.

Vậy $\Delta \ell = 0,19 \pm 0,10$ cm bằng thước; đo trực tiếp bằng đồng hồ so cho sai số tương đối khoảng 0,5%.

Hence $\Delta \ell = 0.19 \pm 0.10$ cm with the ruler; direct measurement with a dial gauge gives a relative uncertainty of about 0.5%. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tính sai số của hiệu bằng cách lấy hiệu hai sai số tương đối. Với $y = a - b$, sai số TUYỆT ĐỐI cộng lại; sai số tương đối của y là $(\Delta a + \Delta b)/|a - b|$.

Finding the uncertainty of a difference by subtracting relative uncertainties. For $y = a - b$ the ABSOLUTE uncertainties add; the relative uncertainty of y is $(\Delta a + \Delta b)/|a - b|$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lấy ε của căn bậc hai bằng ε của đại lượng, hay ε của bình phương bằng ε của đại lượng. Lũy thừa n nhân sai số tương đối với $|n|$: bình phương gấp đôi, căn một nửa.

Taking the uncertainty of a square root, or of a square, equal to that of the quantity. A power n multiplies the relative uncertainty by $|n|$: squaring doubles it, the root halves it.

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b; \varepsilon(ab) = \varepsilon_a + \varepsilon_b; \varepsilon(a^n) = |n|\varepsilon_a \quad (1.4)$$

1.6. Đồ thị tuyến tính hóa và bình phương tối thiểu — *Linearised graphs and least squares*

Mắt đánh giá đường thẳng chính xác hơn đường cong, và hệ số góc, hệ số chặn đọc được trực tiếp. Vì thế mọi quan hệ lũy thừa được đưa về đường thẳng bằng cách chọn trục thích hợp. Hệ số chặn còn có ích thứ hai: nó hấp thụ sai số hệ thống không đổi (độ trễ bấm giờ, bán kính quả cầu bị bỏ sót khi đo chiều dài).

The eye judges a straight line more accurately than a curve, and its slope and intercept can be read off directly. So every power relation is brought to a line by choosing the axes suitably. The intercept has a second use: it absorbs a constant systematic error (a timing delay, a bob radius omitted from a length).

TÍNH CHẤT 1.12 / PROPERTY 1.12 — Tuyến tính hóa. Quan hệ giữa hai đại lượng được vẽ thành đường thẳng $Y = aX + b$ bằng cách đặt Y và X là các hàm của đại lượng đo, sao cho hệ số góc a và hệ số chặn b chứa các hằng số cần tìm (xem bảng dưới). Với $y = Cx^n$, vẽ $\lg y$ theo $\lg x$: hệ số góc là n , hệ số chặn là $\lg C$.

Linearisation. A relation between two quantities is drawn as a straight line $Y = aX + b$ by letting Y and X be functions of the measured quantities, so that the slope a and the intercept b contain the constants wanted (see the table). For $y = Cx^n$, plot $\lg y$ against $\lg x$: the slope is n and the intercept is $\lg C$.

Quan hệ <i>Relation</i>	Vẽ Y theo X <i>Plot Y against X</i>	Hệ số góc <i>Slope</i>	Hệ số chặn <i>Intercept</i>
$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$	T^2 theo ℓ <i>T^2 against ℓ</i>	$4\pi^2/g$	0 ($b > 0$ nếu ℓ thiếu bán kính <i>$b > 0$ if ℓ omits the radius</i>)
$s = s_0 + at^2/2$	s theo t^2 <i>s against t^2</i>	$a/2$	s_0
$v^2 = v_0^2 + 2as$	v^2 theo s <i>v^2 against s</i>	$2a$	v_0^2
$s = v(t - \tau)$	s theo t <i>s against t</i>	v	$-v\tau$
$s = \frac{1}{2}g(t - \tau)^2$	$\sqrt{s}$ theo t <i>$\sqrt{s}$ against t</i>	$\sqrt{g/2}$	$-\tau\sqrt{g/2}$
$F = Cv^n$	$\lg F$ theo $\lg v$ <i>$\lg F$ against $\lg v$</i>	n	$\lg C$
$y = Ae^{kx}$	$\ln y$ theo x <i>$\ln y$ against x</i>	k	$\ln A$

ĐỊNH LÝ 1.13 (Bình phương tối thiểu) / THEOREM 1.13 (Least squares) — Với n điểm (x_i, y_i) , đường thẳng $y = ax + b$ làm tổng bình phương độ lệch dọc $\Sigma(y_i - ax_i - b)^2$ nhỏ nhất có $a = \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \Sigma(x_i - \bar{x})^2$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$. Nếu đường thẳng buộc đi qua gốc ($y = ax$) thì $a = \Sigma x_i y_i / \Sigma x_i^2$. Sai số chuẩn của hệ số góc (phát biểu, không chứng minh): $s_a = \sqrt{(\Sigma(y_i - ax_i - b)^2 / (n - 2)) / \Sigma(x_i - \bar{x})^2}$.

For n points (x_i, y_i) , the line $y = ax + b$ that minimises the sum of squared vertical deviations $\Sigma(y_i - ax_i - b)^2$ has $a = \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \Sigma(x_i - \bar{x})^2$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$. If the line is forced through the origin ($y = ax$) then $a = \Sigma x_i y_i / \Sigma x_i^2$. The standard error of the slope (quoted, not proved) is $s_a = \sqrt{(\Sigma(y_i - ax_i - b)^2 / (n - 2)) / \Sigma(x_i - \bar{x})^2}$.

Chứng minh. / Proof.

Đặt $u_i = x_i - \bar{x}$, $w_i = y_i - \bar{y}$; khi đó $\Sigma u_i = 0$ và $\Sigma w_i = 0$. Viết đường thẳng dạng $w = au + c$ (với $c = b + a\bar{x} - \bar{y}$). Tổng bình phương độ lệch:

Put $u_i = x_i - \bar{x}$ and $w_i = y_i - \bar{y}$; then $\Sigma u_i = 0$ and $\Sigma w_i = 0$. Write the line as $w = au + c$ (with $c = b + a\bar{x} - \bar{y}$). The sum of squared deviations is:

$$\Sigma(w_i - au_i - c)^2 = \Sigma(w_i - au_i)^2 - 2c\Sigma(w_i - au_i) + nc^2$$

Số hạng giữa bằng 0 vì $\Sigma w_i = \Sigma u_i = 0$. Còn lại $\Sigma(w - au)^2 + nc^2$: nhỏ nhất khi $c = 0$, nghĩa là đường đi qua điểm $(\bar{x}, \bar{y})$, tức $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

The middle term is zero because $\Sigma w_i = \Sigma u_i = 0$. What remains is $\Sigma(w - au)^2 + nc^2$, smallest when $c = 0$, that is the line passes through $(\bar{x}, \bar{y})$, so $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

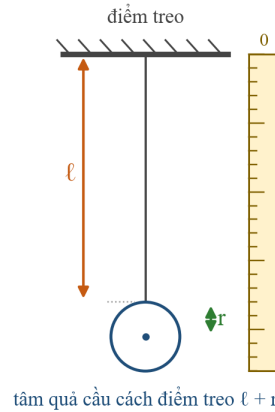
$$\Sigma(w - au)^2 = a^2 \Sigma u^2 - 2a \Sigma uw + \Sigma w^2$$

Đây là tam thức bậc hai của a với hệ số bậc hai $\Sigma u^2 > 0$, nhỏ nhất tại đỉnh $a = \Sigma uw / \Sigma u^2$. Trường hợp qua gốc làm y hết với x , y thay cho u , w và không có số hạng c .

This is a quadratic in a with leading coefficient $\Sigma u^2 > 0$, smallest at the vertex $a = \Sigma uw / \Sigma u^2$. The case through the origin is the same with x, y in place of u, w and no term c . ■

ĐỊNH LÝ 1.14 (Hai đường biên) / THEOREM 1.14 (Extreme-lines method) — Sai số của hệ số góc theo đồ thị tay. Vẽ các thanh sai số, rồi vẽ hai đường thẳng cực biên đi qua mọi thanh sai số: một đường dốc nhất, một đường thoải nhất. Hệ số góc là hệ số góc của đường tốt nhất, sai số $\Delta a = (a_{\max} - a_{\min})/2$. Phương pháp này cho sai số lớn hơn s_a và an toàn hơn.

Uncertainty of the slope from a hand graph. Draw the error bars, then draw two extreme lines that pass through all of them: a steepest one and a shallowest one. The slope is that of the best line and $\Delta a = (a_{\max} - a_{\min})/2$. The method gives a larger uncertainty than s_a and is safer.



Hình 1.2. Sơ đồ đo con lắc: thước đặt dọc dây, vạch 0 ở điểm treo. Chiều dài ℓ đọc đến mép trên quả cầu cách tâm một khoảng r , nên chiều dài hiệu dụng là $\ell + r$.

Figure 1.2. Pendulum set-up: a ruler beside the string with its zero at the suspension point. The length ℓ is read to the top of the bob, a distance r from its centre, so the effective length is $\ell + r$.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho tám điểm (ℓ, T) đo từ mép trên quả cầu. Biết $T^2 = (4\pi^2/g)(\ell + r)$: vẽ T^2 theo ℓ được đường thẳng có hệ số chặn dương. Hệ số góc cho g ; tỉ số hệ số chặn/hệ số góc cho r . Tính g riêng từng điểm thì mang theo sai số hệ thống.
The problem gives eight points (ℓ, T) measured to the top of the bob. Since $T^2 = (4\pi^2/g)(\ell + r)$, plotting T^2 against ℓ gives a line with a positive intercept. The slope gives g ; intercept over slope gives r . Computing g point by point carries the systematic error along.

VÍ DỤ 1.9 / EXAMPLE 1.9 — Một học sinh đo chu kỳ con lắc đơn với tám chiều dài, mỗi lần bấm giờ 20 dao động (sai số 0,2 s), chiều dài đo từ điểm treo đến mép trên quả cầu (hình 1.2). Số liệu trong bảng dưới. Tính g bằng đồ thị T^2 theo ℓ , ước lượng sai số bằng hai đường biên, tìm bán kính quả cầu r , và so với g tính riêng từng điểm.

A student measures the period of a simple pendulum at eight lengths, timing 20 oscillations each time (error 0.2 s), with each length measured from the suspension point to the top of the bob (figure 1.2). The data are in the table below. Find g from the graph of T^2 against ℓ , estimate its uncertainty with two extreme lines, find the bob radius r , and compare with g computed point by point.

ℓ (m)	t_{20} (s)	$T = t_{20}/20$ (s)	T^2 (s ²)	$g = 4\pi^2\ell/T^2$ (m/s ²)
0,30 0.30	22,57 22.57	1,129 1.129	1,274 1.274	9,30 9.30
0,40 0.40	25,96 25.96	1,298 1.298	1,685 1.685	9,37 9.37
0,50 0.50	28,85 28.85	1,443 1.443	2,081 2.081	9,49 9.49
0,60 0.60	31,32 31.32	1,566 1.566	2,452 2.452	9,66 9.66
0,70 0.70	34,05 34.05	1,702 1.702	2,899 2.899	9,53 9.53

ℓ (m)	t_{20} (s)	$T = t_{20}/20$ (s)	T^2 (s ²)	$g = 4\pi^2\ell/T^2$ (m/s ²)
0,80 <i>0.80</i>	36,29 <i>36.29</i>	1,815 <i>1.815</i>	3,292 <i>3.292</i>	9,59 <i>9.59</i>
0,90 <i>0.90</i>	38,33 <i>38.33</i>	1,916 <i>1.916</i>	3,673 <i>3.673</i>	9,67 <i>9.67</i>
1,00 <i>1.00</i>	40,51 <i>40.51</i>	2,026 <i>2.026</i>	4,103 <i>4.103</i>	9,62 <i>9.62</i>

Lời giải. / Solution.

Sai số của T là $0,2/20 = 0,01$ s, nên thanh sai số của T^2 là $\pm 2T\Delta T$ (rộng $0,02T$), dài ra khi T lớn (hình 1.3).

The error of T is $0.2/20 = 0.01$ s, so the error bar of T^2 is $\pm 2T\Delta T$ (width $0.02T$), growing with T (figure 1.3).

1. Bình phương tối thiểu cho hệ số góc $a = 4,027$ s²/m ($s_a = 0,025$) và hệ số chặn $b = 0,065$ s².

Least squares gives the slope $a = 4.027$ s²/m ($s_a = 0.025$) and the intercept $b = 0.065$ s².

2. Từ $a = 4\pi^2/g$: $g = 4\pi^2/a \approx 9,80$ m/s², độ lệch theo s_a là $0,06$ m/s².

From $a = 4\pi^2/g$: $g = 4\pi^2/a \approx 9.80$ m/s², with deviation 0.06 m/s² from s_a .

3. Hai đường biên có hệ số góc $4,132$ và $3,952$, nên $\Delta a = 0,090$ và $\Delta g = 4\pi^2\Delta a/a^2 \approx 0,22$ m/s².

The two extreme lines have slopes 4.132 and 3.952 , so $\Delta a = 0.090$ and $\Delta g = 4\pi^2\Delta a/a^2 \approx 0.22$ m/s².

4. Hệ số chặn: $b = a \cdot r$, nên $r = b/a \approx 1,6$ cm, hợp lí cho quả cầu đường kính khoảng 3 cm.

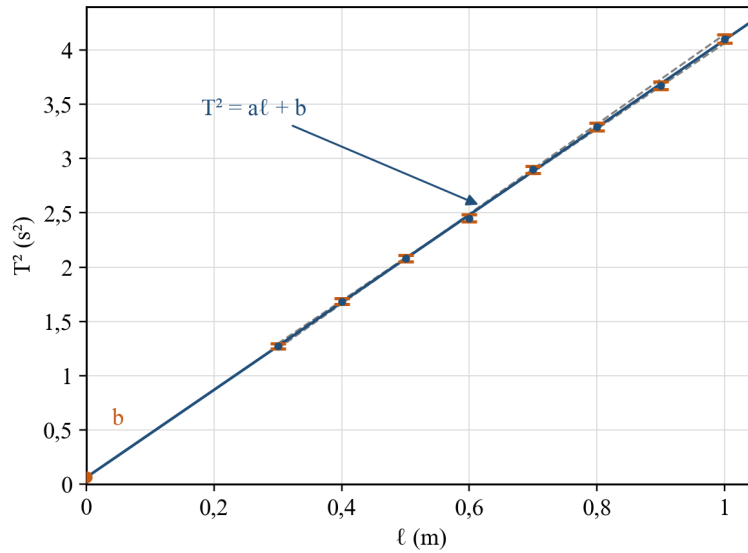
The intercept gives $b = a \cdot r$, so $r = b/a \approx 1.6$ cm, reasonable for a bob about 3 cm in diameter.

5. Tính riêng từng điểm cho g từ $9,30$ đến $9,67$ m/s², trung bình $9,53$ m/s², luôn thấp vì ℓ thiếu r ; sai lệch lớn nhất ở ℓ nhỏ, nơi r/ℓ lớn.

Point-by-point values run from 9.30 to 9.67 m/s², mean 9.53 m/s², always low because ℓ omits r ; the deviation is largest at small ℓ , where r/ℓ is large.

Vậy $g = 9,80 \pm 0,22$ m/s² (đồ thị, hai đường biên); phương pháp đồ thị loại sai số hệ thống của ℓ , còn trung bình các giá trị riêng lệch thấp tới $9,53$ m/s².

Hence $g = 9.80 \pm 0.22$ m/s² (graph, extreme lines); the graph removes the systematic error of ℓ , while the mean of the single values is low at 9.53 m/s². ■



Hình 1.3. Đồ thị T^2 theo l : tám điểm với thanh sai số, đường thẳng bình phương tối thiểu (liền) và hai đường biên (nét đứt). Hệ số chặn b dương.

Figure 1.3. Graph of T^2 against l : eight points with error bars, the least-squares line (solid) and the two extreme lines (dashed). The intercept b is positive.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Lực cản F theo tốc độ v trên khoảng v từ 2 đến 10 m/s: nếu $F = Cv^n$ thì chỉ cần vẽ $\lg F$ theo $\lg v$. Tỷ lệ 2:10 chưa tới một bậc 10, nên dùng $\lg$ thay cho đồ thị F theo v , ở đó mắt khó phân biệt $n = 1,8$ với $n = 2$.

Drag F against speed v over v from 2 to 10 m/s: if $F = Cv^n$ just plot $\lg F$ against $\lg v$. The ratio 2:10 spans less than a decade, so use logs rather than a graph of F against v , on which the eye can hardly tell $n = 1.8$ from $n = 2$.

VÍ DỤ 1.10 / EXAMPLE 1.10 — Một tấm bìa phẳng chuyển động trong luồng gió, lực cản F đo bằng lực kế ở bảy tốc độ v (bảng). Xác định số mũ n trong $F = Cv^n$, sai số của n , và nêu cách kết luận $n = 2$.

A flat card is held in an air stream and the drag F is measured at seven speeds v (table). Find the exponent n in $F = Cv^n$, its uncertainty, and say how to conclude $n = 2$.

v (m/s)	F (N)	$\lg v$	$\lg F$
2,0 2.0	0,060 0.060	0,301 0.301	−1,222 −1.222
3,0 3.0	0,137 0.137	0,477 0.477	−0,863 −0.863
4,0 4.0	0,237 0.237	0,602 0.602	−0,625 −0.625
5,0 5.0	0,358 0.358	0,699 0.699	−0,446 −0.446
6,0 6.0	0,528 0.528	0,778 0.778	−0,277 −0.277

v (m/s)	F (N)	lg v	lg F
8,0 8.0	0,912 0.912	0,903 0.903	-0,040 -0.040
10,0 10.0	1,505 1.505	1,000 1.000	0,178 0.178

Lời giải. / Solution.

Vẽ lg F theo lg v (hình 1.4). Bình phương tối thiểu trên các điểm này cho $n = 1,98$ và $s_n = 0,02$.

Plot lg F against lg v (figure 1.4). Least squares on these points gives $n = 1.98$ and $s_n = 0.02$.

Hệ số chặn được $C = 10^{\lg C} \approx 0,0152 \text{ N} \cdot \text{s}^n / \text{m}^n$.

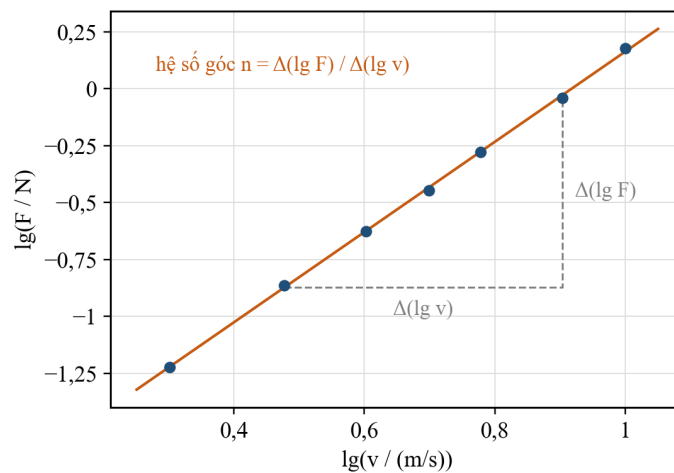
The intercept gives $C = 10^{\lg C} \approx 0.0152 \text{ N} \cdot \text{s}^n / \text{m}^n$.

Giá trị 2 cách n đúng một sai số chuẩn ($1,98 + 0,02$), nên dữ liệu không bác bỏ $n = 2$. Khẳng định $n = 2$ xong thì làm lại bằng cách vẽ F theo v^2 qua gốc; đường thẳng qua gốc cho hệ số góc $0,0148 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2$.

The value 2 is exactly one standard error from n ($1.98 + 0.02$), so the data do not rule out $n = 2$. Having accepted $n = 2$, redo the fit by plotting F against v^2 through the origin; the line through the origin has slope $0.0148 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2$.

Vậy $n = 1,98 \pm 0,02$, phù hợp với lực cản bậc hai $F = Cv^2$ với $C \approx 0,0148 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2$.

Hence $n = 1.98 \pm 0.02$, consistent with quadratic drag $F = Cv^2$ with $C \approx 0.0148 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2$. ■



Hình 1.4. Đồ thị lg F theo lg v của bảy điểm đo; hệ số góc của đường thẳng là số mũ $n \approx 2$.

Figure 1.4. Graph of lg F against lg v for seven measurements; the slope of the line is the exponent $n \approx 2$.

NHẬN XÉT / REMARK — Hệ số góc trên đồ thị lg–lg không phụ thuộc đơn vị của v và F; đổi đơn vị chỉ dịch hệ số chặn. Đó là lý do đồ thị lg–lg dùng được để so sánh hai thí nghiệm đo bằng đơn vị khác nhau.

The slope on a log–log graph does not depend on the units of v and F; changing units only shifts the intercept. That is why log–log graphs let two experiments in different units be compared.

NHẬN XÉT / REMARK — Điểm đầu và điểm cuối ảnh hưởng hệ số góc nhiều nhất. Với tám điểm đều nhau theo ℓ , bỏ điểm cuối làm hệ số góc đổi ít; nếu thêm một điểm ở xa các điểm kia, nó kéo đường thẳng mạnh hơn mọi điểm khác. Điểm nằm xa phải đo kĩ nhất.
The first and last points influence the slope most. With eight points evenly spaced in ℓ , dropping the last one changes the slope little; a point added far from the rest pulls the line harder than any other. The outlying point must be measured most carefully.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Vẽ đường thẳng qua hai điểm đầu và cuối thay vì đường tốt nhất, hoặc ép đường qua gốc khi hệ số chặn khác 0. Ví dụ T^2 theo ℓ khi ℓ thiếu bán kính quả cầu: ép qua gốc làm g sai hệ thống.

Drawing the line through the first and last points instead of the best line, or forcing it through the origin when the intercept is not zero. For T^2 against ℓ with ℓ missing the bob radius, forcing through the origin biases g .

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tính hệ số góc bằng hai điểm đọc trên trục đã đổi (lg) mà quên rằng thang đã đổi: $\Delta(\lg F)/\Delta(\lg v)$ phải lấy hiệu của lg, không phải lg của hiệu.

Computing the slope from two points read on a transformed axis (lg) and forgetting the transformation: use $\Delta(\lg F)/\Delta(\lg v)$, the difference of logs, not the log of a difference.

1.7. Thiết kế phương án thí nghiệm — *Designing an experiment*

Đề dạng “đề xuất phương án” cho vài dụng cụ và một đại lượng cần đo, rồi chấm theo từng khâu. Bài đạt điểm tối đa có đủ sáu khâu trong bảng dưới và nêu rõ khâu nào đã được thiết kế để loại sai số hệ thống hay giảm sai số ngẫu nhiên.

A “propose a method” problem supplies a few instruments and a quantity to measure, and is marked stage by stage. A full-marks answer has all six stages in the table below and says which stage was designed to remove a systematic error or reduce a random one.

Khâu <i>Stage</i>	Nội dung phải có <i>What must be there</i>	Lỗi mất điểm <i>Where marks are lost</i>
1. Cơ sở lí thuyết <i>1. Principle</i>	Công thức nối đại lượng cần đo với đại lượng đo được, điều kiện áp dụng <i>The formula linking the wanted quantity to measurable ones, and when it applies</i>	Không nêu điều kiện (góc nhỏ, chuyển động đều) <i>No conditions stated (small angle, uniform motion)</i>
2. Dụng cụ <i>2. Apparatus</i>	Chỉ dùng dụng cụ đề cho; ghi độ chia nhỏ nhất <i>Only instruments given; smallest divisions stated</i>	Thêm dụng cụ ngoài danh sách <i>Instruments not on the list</i>
3. Bố trí <i>3. Set-up</i>	Sơ đồ có ghi các đại lượng đo <i>A sketch labelling the measured quantities</i>	Sơ đồ không ghi đại lượng <i>Sketch without labels</i>
4. Các bước <i>4. Procedure</i>	Thứ tự thao tác, số lần lặp, khoảng giá trị của biến <i>Order of operations, repeats, range of the variable</i>	Chỉ một giá trị biến, không lặp <i>A single value of the variable, no repeats</i>

Khâu <i>Stage</i>	Nội dung phải có <i>What must be there</i>	Lỗi mất điểm <i>Where marks are lost</i>
5. Xử lý số liệu <i>5. Data treatment</i>	Bảng, đồ thị tuyến tính hóa, đọc hệ số góc <i>Table, linearised graph, slope</i>	Tính riêng từng điểm rồi lấy trung bình <i>Single values then a mean</i>
6. Sai số <i>6. Uncertainty</i>	Nguồn sai số chính, cách giảm, sai số của kết quả <i>Main sources, how to reduce them, the uncertainty of the result</i>	Không phân biệt hệ thống và ngẫu nhiên <i>No distinction between systematic and random</i>

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Có xe đồ chơi chạy đều, đường ray dài 3 m, thước chia mm, đồng hồ bấm tay. Bấm tay luôn trễ khi bắt đầu và khi dừng, nên thời gian đo là $t + \tau$ với τ gần cố định. Nếu đo ở nhiều vạch rồi vẽ s theo t , τ chỉ làm đường thẳng dịch theo trục t , hệ số góc không đổi.

A toy car runs uniformly on a 3 m track; there is a ruler in mm and a hand-held stopwatch. Hand timing is always late at the start and the stop, so the measured time is $t + \tau$ with τ roughly constant. If the time is taken at several marks and s is plotted against t , τ only shifts the line along the t axis and the slope is unchanged.

VÍ DỤ 1.11 (Loại độ trễ bấm giờ bằng đồ thị) / EXAMPLE 1.11 (Removing the timing delay with a graph) — Đề xuất phương án đo tốc độ v của xe đồ chơi chạy đều trên đường ray thẳng dài 3 m, chỉ dùng thước chia mm và đồng hồ bấm tay độ chia 0,01 s (người bấm trễ cỡ 0,2 s). Nêu cách loại sai số do bấm trễ. Với số liệu thu được (bảng, mỗi thời gian là trung bình của ba lần bấm) hãy tính v và sai số.

Propose a method to measure the speed v of a toy car running uniformly on a straight 3 m track, using only a ruler in mm and a hand-held stopwatch of division 0.01 s (the timer is late by about 0.2 s). Explain how to remove the error from the late timing. With the data obtained (table, each time the mean of three timings) find v and its uncertainty.

Lời giải. / Solution.

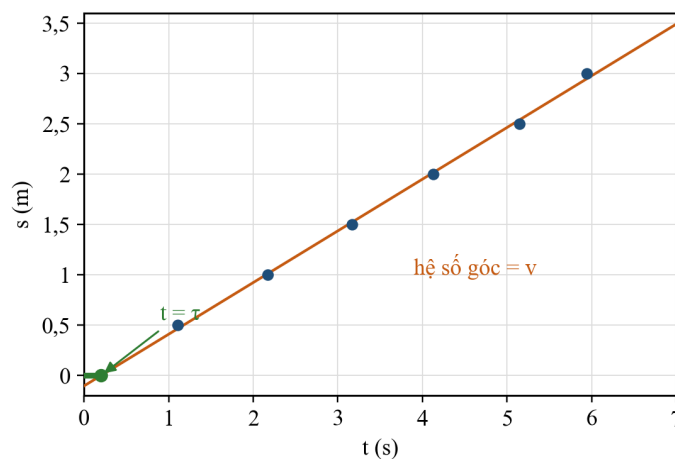
- Cơ sở: xe chạy đều nên $s = v(t - \tau)$, với t là thời gian đo và τ là độ trễ bấm. Đồ thị s theo t là đường thẳng hệ số góc v , cắt trục t tại $t = \tau$ (hình 1.5).
Principle: the car runs uniformly so $s = v(t - \tau)$, with t the measured time and τ the timing delay. The graph of s against t is a line of slope v meeting the t axis at $t = \tau$ (figure 1.5).
- Bố trí: dán sáu vạch cách điểm xuất phát 0,50; 1,00; ...; 3,00 m. Cho xe chạy từ trước vạch xuất phát để đã đạt tốc độ ổn định.
Set-up: stick six marks 0.50, 1.00, ..., 3.00 m from the start. Let the car run in from before the start mark so that it already has a steady speed.
- Thực hiện: với mỗi vạch, bấm giờ từ lúc xe qua vạch xuất phát đến lúc qua vạch s , lặp ba lần, lấy trung bình. Giá trị s đo bằng thước, sai số 0,001 m, nhỏ hơn rất nhiều so với sai số của t .
Procedure: for each mark, time from the start mark to mark s , three times, and average. The distance s is read with the ruler to 0.001 m, far smaller than the error in t .

4. Xử lý: bình phương tối thiểu s theo t cho $v = 0,513 \text{ m/s}$, $s_a = 0,010 \text{ m/s}$ và $\tau = 0,20 \text{ s}$.
Treatment: least squares of s against t gives $v = 0.513 \text{ m/s}$, $s_a = 0.010 \text{ m/s}$ and $\tau = 0.20 \text{ s}$.
5. Đối chiếu: tính riêng $v_i = s_i/t_i$ cho $0,450 \text{ m/s}$ ở vạch $0,50 \text{ m}$ và $0,505 \text{ m/s}$ ở vạch $3,00 \text{ m}$. Giá trị chạy theo s vì τ chiếm tỉ lệ lớn ở thời gian ngắn, nên trung bình các v_i lệch hệ thống.
Comparison: single values $v_i = s_i/t_i$ give 0.450 m/s at the 0.50 m mark and 0.505 m/s at the 3.00 m mark. They drift with s because τ is a larger share of a short time, so the mean of the v_i is biased.

Vậy $v = 0,513 \pm 0,010 \text{ m/s}$ (sai số chuẩn của hệ số góc, $\varepsilon \approx 2\%$). Độ trễ bấm giờ nằm trong hệ số chặn nên không ảnh hưởng v .

Hence $v = 0.513 \pm 0.010 \text{ m/s}$ (standard error of the slope, $\varepsilon \approx 2\%$). The timing delay sits in the intercept and does not affect v . ■

s (m)	t (s)	v = s/t (m/s)
0,50 0.50	1,11 1.11	0,450 0.450
1,00 1.00	2,17 2.17	0,461 0.461
1,50 1.50	3,17 3.17	0,473 0.473
2,00 2.00	4,13 4.13	0,484 0.484
2,50 2.50	5,15 5.15	0,485 0.485
3,00 3.00	5,94 5.94	0,505 0.505



Hình 1.5. Đồ thị s theo t của xe đồ chơi: sáu điểm, đường thẳng bình phương tối thiểu. Đoạn xanh trên trục t là độ trễ bấm giờ τ , không ảnh hưởng hệ số góc.

Figure 1.5. Graph of s against t for the toy car: six points and the least-squares line. The green segment on the t axis is the timing delay τ , which does not affect the slope.

NHẬN XÉT / REMARK — Tách sai số thành phần cố định và phần ngẫu nhiên là ý chính của khâu 6. Phần cố định (τ) cần một cách thiết kế loại bỏ: dùng hệ số chặn của đồ thị, hoặc lấy hiệu hai lần đo. Phần ngẫu nhiên giảm bằng lặp lại và bằng nhiều điểm.

Splitting the error into a fixed and a random part is the core of stage 6. The fixed part (τ) needs a design that removes it: the graph intercept, or the difference of two readings. The random part is reduced by repeats and by many points.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Đề cho đồng hồ bấm tay mà chỉ đo một khoảng s rồi tính $v = s/t$: sai số bấm trễ nằm nguyên vẹn trong kết quả. Phải đo nhiều s và vẽ đồ thị, hoặc đo hiệu hai thời gian.

Using a hand-held stopwatch for a single distance s and computing $v = s/t$: the timing delay stays whole in the result. Measure several s and draw the graph, or take the difference of two times.

1.8. Tổ hợp không thứ nguyên và đồng dạng — Dimensionless groups and similarity

Khi số đại lượng độc lập nhiều hơn ba, phân tích thứ nguyên không cho một công thức mà cho một hàm của các tổ hợp không thứ nguyên. Hàm ấy vẫn có ích: hai hệ có cùng giá trị các tổ hợp diễn ra giống hệt nhau khi vẽ trong các biến không thứ nguyên.

With more than three independent quantities, dimensional analysis gives not a formula but a function of dimensionless groups. That function is still useful: two systems with the same values of the groups behave identically when drawn in dimensionless variables.

ĐỊNH LÝ 1.15 (Nguyên lý đồng dạng) / THEOREM 1.15 (Principle of similarity) —

Nguyên lý đồng dạng. Nếu đại lượng y có thứ nguyên $[y]$ và phụ thuộc vào các đại lượng $x_1, \dots, x_k$ thì có thể viết $y = y_0 \cdot f(\Pi_1, \Pi_2, \dots)$, trong đó y_0 ghép từ ba đại lượng cơ bản đủ để có thứ nguyên $[y]$, các Π là tổ hợp không thứ nguyên của x_i , và f là một hàm chưa biết. Hai hệ có các Π bằng nhau thì có y/y_0 bằng nhau.

Principle of similarity. If a quantity y of dimension $[y]$ depends on the quantities $x_1, \dots, x_k$, it can be written $y = y_0 f(\Pi_1, \Pi_2, \dots)$, where y_0 is built from enough of the base quantities to have dimension $[y]$, the Π are dimensionless combinations of the x_i , and f is an unknown function. Two systems with equal Π have equal y/y_0 .

Phát biểu trên là dạng sơ cấp của một định lý tổng quát (định lý Π của Buckingham); sách không chứng minh nó. Số tổ hợp Π bằng số đại lượng trừ số đơn vị cơ bản độc lập.

The statement above is the elementary form of a general result (Buckingham's Π theorem); the book does not prove it. The number of groups Π equals the number of quantities minus the number of independent base units.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Vật rơi từ độ cao h , chịu lực cản tuyến tính $-bv$ (b tính bằng kg/s). Các đại lượng: t, h, g, m, b : năm đại lượng, ba đơn vị, nên hai tổ hợp. Một là gt^2/h ; tổ hợp còn lại phải chứa b : thử $b^2h/(m^2g)$, vì b/m có thứ nguyên T^{-1} .

A body falls from height h with a linear drag $-bv$ (b in kg/s). The quantities are t, h, g, m, b : five quantities, three units, so two groups. One is gt^2/h ; the other must contain b : try $b^2h/(m^2g)$, since b/m has dimension T^{-1} .

VÍ DỤ 1.12 (Hai thí nghiệm đồng dạng) / EXAMPLE 1.12 (Two similar experiments) —

Vật khối lượng $m = 0,050$ kg thả từ nghỉ ở độ cao $h = 2,0$ m, lực cản $-bv$ với $b = 0,20$ kg/s; thí nghiệm đo được thời gian rơi $t_1 = 1,063$ s. Hỏi thả cùng vật từ nghỉ ở độ cao $8,0$ m trong môi trường có $b = 0,10$ kg/s thì thời gian rơi bằng bao nhiêu? Nêu giới hạn của kết luận.

A body of mass $m = 0.050$ kg is released from rest at height $h = 2.0$ m with drag $-bv$, $b = 0.20$ kg/s; an experiment finds the fall time $t_1 = 1.063$ s. What is the fall time of the same body released from rest at 8.0 m in a medium with $b = 0.10$ kg/s? State the limit of the conclusion.

Lời giải. / Solution.

Năm đại lượng t, h, g, m, b với ba đơn vị cho hai tổ hợp không thứ nguyên: $\Pi_1 = gt^2/h$ và $\Pi_2 = b^2h/(m^2g)$. Thật vậy $[b/m] = T^{-1}$, nên $[b^2h/(m^2g)] = T^{-2} \cdot L/(LT^{-2}) = 1$.

The five quantities t, h, g, m, b with three units give two dimensionless groups: $\Pi_1 = gt^2/h$ and $\Pi_2 = b^2h/(m^2g)$. Indeed $[b/m] = T^{-1}$, so $[b^2h/(m^2g)] = T^{-2} \cdot L/(LT^{-2}) = 1$.

$$t = \sqrt{(h/g)} \cdot f(\Pi_2) \quad (1.5)$$

Thí nghiệm 1: $\Pi_2 = (0,20/0,050)^2 \cdot 2,0/9,8 \approx 3,27$. Thí nghiệm 2: $b/m = 0,10/0,050 = 2 \text{ s}^{-1}$ (một nửa), $h = 8,0$ m (gấp 4), nên Π_2 có cùng giá trị: $2^2 \cdot 8,0/9,8 \approx 3,27$.

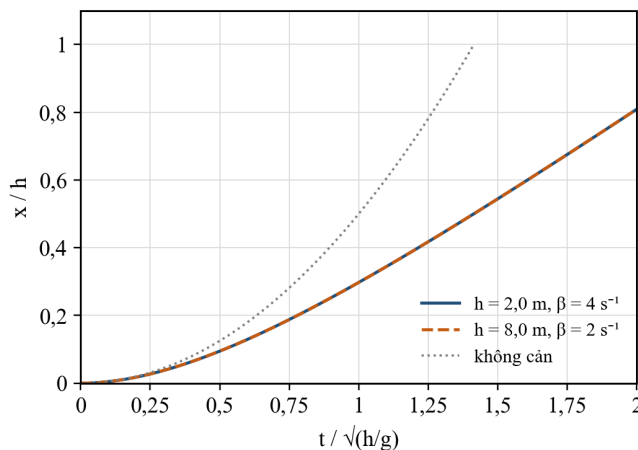
Experiment 1: $\Pi_2 = (0.20/0.050)^2 \cdot 2.0/9.8 \approx 3.27$. Experiment 2: $b/m = 0.10/0.050 = 2 \text{ s}^{-1}$ (half), $h = 8.0$ m (four times), so Π_2 has the same value: $2^2 \cdot 8.0/9.8 \approx 3.27$.

Hai hệ có cùng Π_2 nên f giống nhau và $t_2/t_1 = \sqrt{(h_2/h_1)} = 2$.

The two systems have the same Π_2 , hence the same f , and $t_2/t_1 = \sqrt{(h_2/h_1)} = 2$.

Vậy $t_2 = 2t_1 \approx 2,126$ s. Kết luận này không cần biết hàm f . Giới hạn: nó chỉ đúng khi hai hệ có cùng Π_2 ; với $b = 0,20$ kg/s ở $8,0$ m thì Π_2 khác và không dự đoán được t nếu chưa biết f .

Hence $t_2 = 2t_1 \approx 2.126$ s. The conclusion needs no knowledge of f . Its limit: it holds only when the two systems share Π_2 ; with $b = 0.20$ kg/s at 8.0 m the value of Π_2 differs and t cannot be predicted without f . ■



Hình 1.6. Hai thí nghiệm rơi có cản tuyến tính vẽ trong biến không thứ nguyên $t/\sqrt{(h/g)}$ và x/h trùng nhau; đường chấm là rơi không cản.

Figure 1.6. Two falls with linear drag drawn in the dimensionless variables $t/\sqrt{(h/g)}$ and x/h coincide; the dotted line is fall without drag.

NHẬN XÉT / REMARK — Khi Π_2 nhỏ (cản yếu), f dần tới $\sqrt{2}$, tức t dần tới $\sqrt{(2h/g)} = 0,639$ s ở thí nghiệm 1. Khi Π_2 lớn (cản mạnh), vật nhanh chóng đạt tốc độ cuối mg/b và $t \approx hb/(mg)$, tỉ lệ với h . Biết hai giới hạn này, ta nối bằng thực nghiệm phần giữa mà không có công thức.

When Π_2 is small (weak drag), f tends to $\sqrt{2}$, so t tends to $\sqrt{(2h/g)} = 0.639$ s in experiment 1. When Π_2 is large (strong drag) the body quickly reaches the terminal speed mg/b and $t \approx hb/(mg)$, proportional to h . Knowing the two limits, one joins the middle by experiment without a formula.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Giọt chất lỏng bán kính r dao động hình dạng: tần số f có thể phụ thuộc hệ số căng bề mặt σ (thứ nguyên MT^{-2}), khối lượng riêng ρ , bán kính r . Ba đại lượng độc lập cho ba phương trình; xem g có cần thêm không bằng cách so lực căng bề mặt và trọng lực.

A liquid drop of radius r oscillating in shape: the frequency f may depend on the surface tension σ (dimension MT^{-2}), the density ρ and the radius r . Three independent quantities give three equations; whether g must be added is decided by comparing surface tension and weight.

VÍ DỤ 1.13 (Chọn đại lượng cần đưa vào) / EXAMPLE 1.13 (Choosing which quantities to include) — Tìm dạng của tần số f dao động hình dạng của giọt nước bán kính $r = 1,0$ mm. Hệ số căng bề mặt $\sigma = 0,0728$ N/m, $\rho = 1000$ kg/m³. Thực nghiệm cho hằng số không thứ nguyên $C \approx 0,45$. Tính f ; biết f thay đổi thế nào khi bán kính tăng gấp đôi; xét có cần đưa g vào không.

Find the form of the frequency f of shape oscillations of a water drop of radius $r = 1.0$ mm. The surface tension is $\sigma = 0.0728$ N/m and $\rho = 1000$ kg/m³. Experiment gives a dimensionless constant $C \approx 0.45$. Compute f ; say how f changes when the radius doubles; decide whether g must be included.

Lời giải. / Solution.

Đặt $f = C \cdot \sigma^a \rho^b r^c$; $[f] = T^{-1}$, $[\sigma] = MT^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[r] = L$.

Set $f = C \cdot \sigma^a \rho^b r^c$; $[f] = T^{-1}$, $[\sigma] = MT^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[r] = L$.

1. T: $-1 = -2a$, nên $a = 1/2$. M: $0 = a + b$, nên $b = -1/2$. L: $0 = -3b + c$, nên $c = 3b = -3/2$.

T: $-1 = -2a$, so $a = 1/2$. M: $0 = a + b$, so $b = -1/2$. L: $0 = -3b + c$, so $c = 3b = -3/2$.

$$f = C\sqrt{\sigma/(\rho r^3)} \quad (1.6)$$

Với $r = 1,0$ mm: $\sqrt{\sigma/(\rho r^3)} = \sqrt{(0,0728/(1000 \cdot 10^{-9}))} \approx 270$ s⁻¹, nên $f \approx 0,45 \cdot 270 \approx 121$ Hz.

For $r = 1.0$ mm: $\sqrt{\sigma/(\rho r^3)} = \sqrt{(0.0728/(1000 \cdot 10^{-9}))} \approx 270$ s⁻¹, so $f \approx 0.45 \cdot 270 \approx 121$ Hz.

Bán kính gấp đôi: f giảm $2^{3/2} \approx 2,83$ lần, còn khoảng 43 Hz.

Doubling the radius reduces f by $2^{3/2} \approx 2.83$, to about 43 Hz.

Đưa g vào: thêm một tổ hợp không thứ nguyên $\rho g r^2 / \sigma$ (số Bond). Với $r = 1,0$ mm giá trị là 0,135, nhỏ, nên trọng lực chỉ hiệu chỉnh nhẹ và công thức bỏ g dùng được. Với giọt bán kính 5 mm số này lớn hơn 25 lần và công thức mất hiệu lực.

Including g adds a dimensionless group $\rho g r^2 / \sigma$ (the Bond number). For $r = 1.0$ mm it is 0.135, small, so gravity is a slight correction and the formula without g works. For a 5 mm radius it is 25 times larger and the formula fails.

Vậy $f = C\sqrt{(\sigma/(pr^3))} \approx 121 \text{ Hz}$ cho $r = 1,0 \text{ mm}$; f tỉ lệ $r^{-3/2}$.

Hence $f = C\sqrt{(\sigma/(pr^3))} \approx 121 \text{ Hz}$ for $r = 1.0 \text{ mm}$; f is proportional to $r^{-3/2}$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Chu kỳ vệ tinh quanh Trái Đất phụ thuộc bán kính quỹ đạo r , khối lượng M của Trái Đất và hằng số hấp dẫn G . G và M có thể xuất hiện riêng hay chỉ qua tích GM ? Thứ nguyên của G (bảng ở mục 1.1) cho M^{-1} : cặp G, M phải xuất hiện cùng lũy thừa.

The period of a satellite about the Earth depends on the orbital radius r , the Earth's mass M and the gravitational constant G . Can G and M appear separately or only as the product GM ? The dimension of G (see the table in section 1.1) carries M^{-1} : G and M must appear with the same power.

VÍ DỤ 1.14 (Từ một thiên thể dự đoán thiên thể khác) / EXAMPLE 1.14 (Predicting one body from another) — Chu kỳ chuyển động tròn của một vật quanh Trái Đất chỉ phụ thuộc vào bán kính quỹ đạo r , hằng số hấp dẫn G và khối lượng M của Trái Đất. Dùng phân tích thứ nguyên tìm dạng của chu kỳ, rồi từ chu kỳ của Mặt Trăng (27,32 ngày, $r = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$) dự đoán chu kỳ một trạm quỹ đạo ở độ cao 410 km (bán kính Trái Đất $6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$), không dùng giá trị G hay M .

The period of circular motion of a body about the Earth depends only on the orbital radius r , the gravitational constant G and the Earth's mass M . Use dimensional analysis to find the form of the period, then from the period of the Moon (27.32 days, $r = 3.844 \cdot 10^8 \text{ m}$) predict the period of a station at 410 km altitude (Earth radius $6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$), without using the values of G or M .

Lời giải. / Solution.

Đặt $T = C \cdot r^a G^b M^c$; $[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$.

Set $T = C \cdot r^a G^b M^c$; $[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$.

1. $T: 1 = -2b$, nên $b = -1/2$. $M: 0 = -b + c$, nên $c = -1/2$. $L: 0 = a + 3b$, nên $a = 3/2$.

$T: 1 = -2b$, so $b = -1/2$. $M: 0 = -b + c$, so $c = -1/2$. $L: 0 = a + 3b$, so $a = 3/2$.

$$T = C\sqrt{(r^3/(GM))} \quad (1.7)$$

G và M chỉ xuất hiện qua tích GM , nên với cùng một thiên thể trung tâm, T tỉ lệ với $r^{3/2}$: $T_2/T_1 = (r_2/r_1)^{3/2}$, và C, G, M đều giản ước.

G and M appear only through the product GM , so for one central body T is proportional to $r^{3/2}$: $T_2/T_1 = (r_2/r_1)^{3/2}$, and C, G, M all cancel.

Bán kính quỹ đạo trạm: $r = 6,371 \cdot 10^6 + 4,1 \cdot 10^5 = 6,781 \cdot 10^6 \text{ m}$. Chu kỳ Mặt Trăng: $2,360 \cdot 10^6 \text{ s}$.

The station's orbital radius is $r = 6.371 \cdot 10^6 + 4.1 \cdot 10^5 = 6.781 \cdot 10^6 \text{ m}$. The Moon's period is $2.360 \cdot 10^6 \text{ s}$.

$$T_{ISS} = T_M(r_{ISS}/r_M)^{3/2}$$

Tỉ số bán kính 0,01764, lũy thừa $3/2$ cho khoảng $2,34 \cdot 10^{-3}$, nên $T_{ISS} \approx 5530 \text{ s} \approx 92,2 \text{ phút}$.

The radius ratio is 0.01764, its $3/2$ power is about $2.34 \cdot 10^{-3}$, so $T_{ISS} \approx 5530 \text{ s} \approx 92.2 \text{ min}$.

Vậy chu kỳ của trạm khoảng 92,2 phút. Giá trị quan sát khoảng 92,7 phút, lệch dưới 1%.

Hence the station's period is about 92.2 min. The observed value is about 92.7 min, within 1%.

■

NHẬN XÉT / REMARK — Kết quả $T \propto r^{3/2}$ là định luật Kepler thứ ba cho quỹ đạo tròn; phân tích thứ nguyên cho dạng, còn hằng số $C = 2\pi$ cần dẫn từ lực hấp dẫn (Chương Động lực học nâng cao).

The result $T \propto r^{3/2}$ is Kepler's third law for circular orbits; dimensional analysis gives the form, while the constant $C = 2\pi$ has to be derived from the gravitational force (chapter on advanced dynamics).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng dạng tích lũy thừa khi có hai tổ hợp không thứ nguyên trở lên (ví dụ rơi có cản tuyến tính). Khi đó $t = \sqrt{(h/g) \cdot f(\Pi_2)}$ với f chưa biết, không phải $t = C \cdot h^p g^q \dots$

Using a pure power product when two or more dimensionless groups exist (for example fall with linear drag). Then $t = \sqrt{(h/g) \cdot f(\Pi_2)}$ with f unknown, not $t = C \cdot h^p g^q \dots$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Ba đại lượng độc lập và ba đơn vị cơ bản: phân tích thứ nguyên cho công thức, trừ hằng số C . Nhiều hơn ba: cho một hàm f của các tổ hợp không thứ nguyên.

Three independent quantities and three base units: dimensional analysis gives the formula up to the constant C . More than three: a function f of dimensionless groups.

1.9. Bảng chiến lược: từ dấu hiệu trong đề đến công cụ — *Strategy table: from the sign in the problem to the tool*

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Cho công thức dạng chữ, hỏi đúng hay sai <i>A formula in letters, right or wrong?</i>	So thứ nguyên hai vế; thử giá trị giới hạn <i>Compare dimensions of both sides; test a limiting case</i>	1.1
Biết đại lượng phụ thuộc vào ba đại lượng, hỏi dạng công thức <i>The quantity depends on three others; find the form</i>	Phân tích thứ nguyên, giải ba phương trình lũy thừa <i>Dimensional analysis, three power equations</i>	1.2, 1.3
Cho một phép đo ở điều kiện này, hỏi kết quả ở điều kiện khác <i>One measurement given; asked for another case</i>	Tỉ lệ từ công thức lũy thừa, giản ước hằng số <i>Ratio from the power formula, constants cancel</i>	1.14
“Ước lượng”, “cỡ bao nhiêu”, không cho số <i>“Estimate”, “about how much”, no numbers</i>	Chuỗi thừa số, làm tròn một chữ số, kiểm bằng đại lượng khác <i>A chain of factors, one significant figure, cross-check</i>	1.4
Cho các số đo kèm $\pm$ hay độ chia dụng cụ <i>Readings with $\pm$ or instrument divisions</i>	Truyền sai số: cộng tuyệt đối, cộng tương đối, nhân với số mũ n <i>Propagate: add absolute, add relative, multiply by the exponent n</i>	1.6, 1.7

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Hiệu hai số đo gần nhau <i>Difference of two close readings</i>	Sai số tuyệt đối cộng; đo trực tiếp hiệu bằng dụng cụ nhạy hơn <i>Absolute errors add; measure the difference directly with a finer instrument</i>	1.8
Bộ số liệu nhiều điểm, hỏi hằng số <i>Many data points, asked for a constant</i>	Tuyến tính hóa, bình phương tối thiểu, hai đường biên <i>Linearise, least squares, extreme lines</i>	1.9, 1.10
Dụng cụ cho trước, hỏi “đề xuất phương án” <i>Given apparatus, “propose a method”</i>	Sáu khâu; đồ thị để loại sai số hệ thống không đổi <i>Six stages; a graph to remove a constant systematic error</i>	1.11
Hơn ba đại lượng độc lập, hai hệ giống nhau <i>More than three independent quantities, two similar systems</i>	Tổ hợp không thứ nguyên, nguyên lí đồng dạng <i>Dimensionless groups, similarity</i>	1.12, 1.13

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Đại lượng cơ bản	Base quantity	đại lượng chọn làm gốc (M, L, T) <i>quantity chosen as the foundation (M, L, T)</i>
Thứ nguyên	Dimension	tích các lũy thừa của M, L, T <i>product of powers of M, L, T</i>
Không thứ nguyên	Dimensionless	mọi lũy thừa của M, L, T bằng 0 <i>all powers of M, L, T equal 0</i>
Đồng nhất thứ nguyên	Dimensional homogeneity	hai vế đẳng thức cùng thứ nguyên <i>both sides of an equation have equal dimension</i>
Phân tích thứ nguyên	Dimensional analysis	tìm dạng công thức từ thứ nguyên <i>finding a formula's form from dimensions</i>
Tổ hợp không thứ nguyên	Dimensionless group	tích lũy thừa các đại lượng có thứ nguyên bằng 1 <i>power product of quantities with dimension equal to 1</i>
Nguyên lí đồng dạng	Similarity	hai hệ cùng tổ hợp không thứ nguyên diễn ra giống nhau <i>systems with equal groups behave alike</i>
Bậc độ lớn	Order of magnitude	lũy thừa của 10 gần giá trị nhất <i>the power of ten nearest the value</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Ước lượng Fermi	Fermi estimate	tính cỡ độ lớn từ vài số liệu quen thuộc <i>an order-of-magnitude calculation from familiar numbers</i>
Chữ số có nghĩa	Significant figure	chữ số đáng tin của kết quả đo <i>a trustworthy digit of a result</i>
Sai số tuyệt đối	Absolute uncertainty	độ lớn của độ lệch có thể có <i>the size of the possible deviation</i>
Sai số tương đối	Relative uncertainty	sai số tuyệt đối chia cho giá trị <i>absolute uncertainty divided by the value</i>
Sai số ngẫu nhiên	Random error	rải hai phía, giảm khi lấy trung bình <i>scatters both ways, falls on averaging</i>
Sai số hệ thống	Systematic error	lệch cùng phía, không giảm khi lấy trung bình <i>shifts one way, not reduced by averaging</i>
Sai số dụng cụ	Instrument error	nửa độ chia nhỏ nhất hay độ chính xác ghi trên máy <i>half the smallest division or the stated accuracy</i>
Độ lệch chuẩn	Standard deviation	độ rải của từng lần đo quanh trung bình <i>scatter of single readings about the mean</i>
Tuyến tính hóa	Linearisation	đưa quan hệ về đường thẳng bằng đổi trục <i>turning a relation into a line by changing axes</i>
Hệ số góc	Slope	tỉ số $\Delta(\text{trục dọc})/\Delta(\text{trục ngang})$ <i>ratio $\Delta(\text{vertical})/\Delta(\text{horizontal})$</i>
Bình phương tối thiểu	Least squares	đường làm tổng bình phương độ lệch dọc nhỏ nhất <i>the line minimising the sum of squared vertical deviations</i>
Thanh sai số	Error bar	đoạn thẳng trên đồ thị biểu diễn sai số của điểm <i>a segment on a graph showing a point's uncertainty</i>
Phương án thí nghiệm	Experimental method	bản kế hoạch gồm cơ sở, dụng cụ, bước, xử lý, sai số <i>a plan with principle, apparatus, steps, treatment, uncertainty</i>

1.10. Bài tự luyện — Practice problems

Mức 1 — Học sinh giỏi cấp tỉnh — Level 1 — Provincial olympiad

Bài 1.1 / Problem 1.1 — Từ biểu thức lực hấp dẫn $F = Gm_1m_2/r^2$, tìm thứ nguyên và đơn vị SI của hằng số G . Kiểm tra bằng thứ nguyên xem $\sqrt{r^3/(GM)}$ có là thời gian không và GM/r^2 có là gia tốc không (M là khối lượng, r là độ dài).

From the gravitational force $F = Gm_1m_2/r^2$, find the dimension and SI unit of the constant G . Check by dimensions whether $\sqrt{r^3/(GM)}$ is a time and GM/r^2 an acceleration (M a mass, r a length).

Bài 1.2 / Problem 1.2 — Hình chữ nhật đo được các cạnh $a = 21,50 \text{ cm} \pm 0,05 \text{ cm}$ và $b = 8,20 \text{ cm} \pm 0,05 \text{ cm}$. Viết diện tích S và chu vi P kèm sai số theo quy ước làm tròn.

A rectangle has sides $a = 21.50 \text{ cm} \pm 0.05 \text{ cm}$ and $b = 8.20 \text{ cm} \pm 0.05 \text{ cm}$. Write the area S and the perimeter P with uncertainties in the rounding convention.

Bài 1.3 / Problem 1.3 — Ước lượng khối lượng không khí trong một phòng học $9,0 \text{ m} \times 6,5 \text{ m} \times 3,6 \text{ m}$ (khối lượng riêng không khí $1,2 \text{ kg/m}^3$). Bằng khoảng mấy học sinh nặng 50 kg ? Nếu mỗi kích thước chỉ biết với sai số 10% thì khối lượng bất định bao nhiêu phần trăm?

Estimate the mass of air in a classroom $9.0 \text{ m} \times 6.5 \text{ m} \times 3.6 \text{ m}$ (air density 1.2 kg/m^3). About how many 50 kg students is that? If each dimension is known only to 10% , what is the percentage uncertainty of the mass?

Bài 1.4 / Problem 1.4 — Tần số f của vật khối lượng m dao động trên lò xo độ cứng k (thứ nguyên của k là MT^{-2}) chỉ phụ thuộc k và m . Tìm dạng f bằng phân tích thứ nguyên. Với $m = 0,10 \text{ kg}$ đo được $f = 3,2 \text{ Hz}$. Tính f khi (a) m tăng lên $0,40 \text{ kg}$; (b) $m = 0,40 \text{ kg}$ và lò xo cứng gấp đôi.

The frequency f of a mass m oscillating on a spring of stiffness k (dimension of k is MT^{-2}) depends only on k and m . Find the form of f by dimensional analysis. With $m = 0.10 \text{ kg}$, $f = 3.2 \text{ Hz}$ is measured. Find f when (a) m increases to 0.40 kg ; (b) $m = 0.40 \text{ kg}$ and the spring is twice as stiff.

Mức 2 — Học sinh giỏi quốc gia — Level 2 — National olympiad

Bài 1.5 / Problem 1.5 — Thả vật rơi từ nghỉ, đo thời gian rơi t bằng đồng hồ bấm tay có độ trễ cố định τ chưa biết, nên $t_{\text{đo}} = t_{\text{thật}} + \tau$. Với sáu độ cao s : $0,5$; $1,0$; $1,5$; $2,0$; $2,5$; $3,0 \text{ (m)}$ đo được t : $0,44$; $0,58$; $0,68$; $0,75$; $0,84$; $0,91 \text{ (s)}$. Dùng đồ thị $\sqrt{s}$ theo t tìm g và τ . Giải thích vì sao vẽ s theo t^2 cho g sai, và cho biết g thu được từ đồ thị đó.

A body is dropped from rest and the fall time t is measured with a hand-held stopwatch with a fixed unknown delay τ , so measured $t = \text{true } t + \tau$. For six heights s : 0.5 , 1.0 , 1.5 , 2.0 , 2.5 , 3.0 (m) the times are: 0.44 , 0.58 , 0.68 , 0.75 , 0.84 , 0.91 (s) . Use the graph of $\sqrt{s}$ against t to find g and τ . Explain why plotting s against t^2 gives a wrong g , and state the g that graph gives.

Bài 1.6 / Problem 1.6 — Khối lượng riêng của quả cầu thép: $\rho = 6m/(\pi d^3)$. Đo $m = 8,35 \text{ g} \pm 0,01 \text{ g}$ và $d = 12,70 \text{ mm} \pm 0,01 \text{ mm}$ (panme). Tính ρ và sai số. Nếu dùng thước kẹp (sai số $0,02 \text{ mm}$), ρ sai số bao nhiêu? Nếu thay cân bằng cân chính xác $0,001 \text{ g}$, sai số tương đối của ρ giảm tới đâu khi vẫn dùng panme?

Density of a steel ball: $\rho = 6m/(\pi d^3)$. Measured $m = 8.35 \text{ g} \pm 0.01 \text{ g}$ and $d = 12.70 \text{ mm} \pm 0.01 \text{ mm}$ (micrometer). Find ρ and its uncertainty. With calipers (error 0.02 mm) what is the uncertainty of ρ ? If the balance is replaced by one accurate to 0.001 g , how far does the relative uncertainty of ρ fall while keeping the micrometer?

Bài 1.7 / Problem 1.7 — Công suất P mà một tuabin gió lấy từ luồng không khí chỉ phụ thuộc khối lượng riêng ρ của không khí, diện tích quét A của cánh quạt và tốc độ gió v . Tìm dạng P . Mô hình có $A = 0,20 \text{ m}^2$ trong gió $5,0 \text{ m/s}$ ($\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$) cho $P = 6,0 \text{ W}$. Dự đoán P cho tuabin $A = 1,8 \text{ m}^2$ trong gió $8,0 \text{ m/s}$. Nếu bán kính cánh tăng $1,5$ lần ở cùng tốc độ gió, P tăng mấy lần?

The power P a wind turbine takes from an air stream depends only on the air density ρ , the swept area A of the rotor and the wind speed v . Find the form of P . A model with $A = 0.20 \text{ m}^2$ in a 5.0 m/s wind ($\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$) gives $P = 6.0 \text{ W}$. Predict P for a turbine with $A = 1.8 \text{ m}^2$ in an 8.0 m/s wind. If the blade radius grows 1.5 times at the same wind speed, by what factor does P grow?

Bài 1.8 / Problem 1.8 — Đo bề dày và khối lượng riêng của giấy với thước chia mm và cân: một ram 500 tờ A4 ($210 \text{ mm} \times 297 \text{ mm}$, sai số mỗi cạnh $0,5 \text{ mm}$) cao $H = 5,05 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$, khối lượng $2,50 \text{ kg} \pm 0,01 \text{ kg}$. (a) Nêu vì sao đo cả ram thay vì một tờ. (b) Tính bề dày một tờ và sai số. (c) Tính khối lượng riêng và sai số. (d) Dùng hai ram chồng lên nhau thì sai số tương đối của ρ còn bao nhiêu?

Measure the thickness and density of paper with a mm ruler and a balance: a ream of 500 A4 sheets ($210 \text{ mm} \times 297 \text{ mm}$, error 0.5 mm per side) stands $H = 5.05 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$ and has mass $2.50 \text{ kg} \pm 0.01 \text{ kg}$. (a) Say why the whole ream is measured instead of one sheet. (b) Find the thickness of one sheet and its uncertainty. (c) Find the density and its uncertainty. (d) With two reams stacked, what is the relative uncertainty of ρ ?

Mức 3 — Olympic quốc tế — Level 3 — International olympiad

Bài 1.9 / Problem 1.9 — Ném vật thẳng đứng lên với tốc độ v_0 , lực cản không khí có gia tốc $-\lambda v^2$ (λ tính bằng m^{-1} , hướng ngược chiều chuyển động) cộng với g . (a) Bằng phân tích thứ nguyên chứng minh $H = (v_0^2/g) \cdot f(\eta)$ với $\eta = \lambda v_0^2/g$. (b) Một mô phỏng số cho $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $\lambda = 0,010 \text{ m}^{-1}$: $H = 17,1 \text{ m}$. Cần λ' bằng bao nhiêu để ném với $v_0' = 10 \text{ m/s}$ cho cùng hình dạng chuyển động, và khi đó H' bằng bao nhiêu? (c) Cản làm giảm độ cao bao nhiêu phần trăm so với không cản ở thí nghiệm (b)? Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A body is thrown vertically up with speed v_0 ; air drag gives an acceleration $-\lambda v^2$ (λ in m^{-1} , opposite the motion) in addition to g . (a) Use dimensional analysis to show $H = (v_0^2/g) \cdot f(\eta)$ with $\eta = \lambda v_0^2/g$. (b) A numerical simulation for $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $\lambda = 0.010 \text{ m}^{-1}$ gives $H = 17.1 \text{ m}$. What λ' gives the same shape of motion for $v_0' = 10 \text{ m/s}$, and what is H' then? (c) By what percentage does drag lower the height in experiment (b)? Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 1.10 / Problem 1.10 — Một giọt nước mưa nhỏ bán kính r chuyển động chậm trong không khí có độ nhớt η (thứ nguyên $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$); lực cản F chỉ phụ thuộc η , r , v . (a) Tìm dạng F bằng phân tích thứ nguyên. (b) Biết hằng số là 6π , tìm tốc độ rơi ổn định của giọt $r = 0,030 \text{ mm}$, bỏ qua lực đẩy của không khí; $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\rho_n = 1000 \text{ kg/m}^3$. (c) Tổ hợp không thứ nguyên $\text{Re} = \rho_a v(2r)/\eta$, $\rho_a = 1,2 \text{ kg/m}^3$: tính Re ở (b), và bán kính lớn nhất để $\text{Re} \leq 1$ khi dùng công thức (b). (d) Với $r = 1,0 \text{ mm}$ (ví dụ về lực cản bậc hai) Re bằng bao nhiêu?

A small raindrop of radius r moves slowly through air of viscosity η (dimension $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$); the drag F depends only on η , r , v . (a) Find the form of F by dimensional analysis. (b) Given the constant 6π , find the steady fall speed of a drop of $r = 0.030 \text{ mm}$, neglecting air buoyancy; $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$. (c) With the dimensionless group $\text{Re} = \rho_a v(2r)/\eta$, $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$: compute Re in (b), and the largest radius for which $\text{Re} \leq 1$ when the formula of (b) is used. (d) For $r = 1.0 \text{ mm}$ (the quadratic-drag example) what is Re ?

Bài 1.11 / Problem 1.11 — Đo g bằng hai chiều dài con lắc, mỗi chiều dài đo từ điểm treo đến mép trên quả cầu (thiếu bán kính r chưa biết). $\ell_1 = 1,000 \text{ m}$, $\ell_2 = 0,250 \text{ m}$, sai số mỗi

chiều dài 0,002 m; thời gian 20 dao động: $t_1 = 40,44$ s, $t_2 = 20,66$ s, sai số mỗi thời gian 0,1 s. (a) Chứng minh r triệt tiêu và tìm biểu thức g . (b) Tính g và sai số. (c) Nếu chọn $\ell_2 = 0,900$ m ($t_2 = 38,40$ s) thì sai số tương đối của g bằng bao nhiêu? (d) So g tính từ riêng ℓ_1 với giá trị ở (b).

Measure g with two pendulum lengths, each measured from the suspension point to the top of the bob (omitting an unknown radius r). $\ell_1 = 1.000$ m, $\ell_2 = 0.250$ m, error 0.002 m each; the time for 20 oscillations is $t_1 = 40.44$ s, $t_2 = 20.66$ s, error 0.1 s each. (a) Show that r cancels and find an expression for g . (b) Find g and its uncertainty. (c) If $\ell_2 = 0.900$ m is chosen ($t_2 = 38.40$ s), what is the relative uncertainty of g ? (d) Compare g from ℓ_1 alone with the value in (b).

Bài 1.12 / Problem 1.12 — Một bọt hơi hình cầu bán kính R trong nước (khối lượng riêng ρ) bị áp suất p bên ngoài ép xẹp. Thời gian xẹp t chỉ phụ thuộc R , ρ , p . (a) Tìm dạng t . (b) Một mô phỏng cho $R = 1,0$ mm, $p = 1,0 \cdot 10^5$ Pa, $\rho = 1000$ kg/m³: $t = 9,2 \cdot 10^{-5}$ s. Tìm hằng số không thứ nguyên. (c) Dự đoán t cho $R = 3,0$ mm, $p = 3,0 \cdot 10^4$ Pa. (d) So tốc độ trung bình R/t của thành bọt với $\sqrt{(p/\rho)}$.

A spherical vapour bubble of radius R in water (density ρ) is squeezed shut by the outside pressure p . The collapse time t depends only on R , ρ , p . (a) Find the form of t . (b) A simulation for $R = 1.0$ mm, $p = 1.0 \cdot 10^5$ Pa, $\rho = 1000$ kg/m³ gives $t = 9.2 \cdot 10^{-5}$ s. Find the dimensionless constant. (c) Predict t for $R = 3.0$ mm, $p = 3.0 \cdot 10^4$ Pa. (d) Compare the mean wall speed R/t with $\sqrt{(p/\rho)}$.

1.11. Lời giải bài tự luyện — Solutions to practice problems

Bài 1.1 — Problem 1.1

Giải $F = Gm_1m_2/r^2$ theo G : $G = Fr^2/(m_1m_2)$.

Solve $F = Gm_1m_2/r^2$ for G : $G = Fr^2/(m_1m_2)$.

$$[G] = \text{MLT}^{-2} \cdot \text{L}^2 / \text{M}^2 = \text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2}$$

Đơn vị SI: $\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

SI unit: $\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

$$[r^3/(GM)] = \text{L}^3 / (\text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2} \cdot \text{M}) = \text{T}^2$$

Căn bậc hai có thứ nguyên T : $\sqrt{(r^3/(GM))}$ là thời gian.

The square root has dimension T : $\sqrt{(r^3/(GM))}$ is a time.

$$[GM/r^2] = \text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2} \cdot \text{M} / \text{L}^2 = \text{LT}^{-2}$$

Vậy G có thứ nguyên $\text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2}$ (đơn vị $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$); cả hai biểu thức đều đúng thứ nguyên, biểu thức sau là gia tốc hấp dẫn.

Hence G has dimension $\text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2}$ (unit $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$); both expressions are dimensionally right, the second being the gravitational acceleration. ■

Bài 1.2 — Problem 1.2

Diện tích là tích: sai số tương đối cộng lại. $\varepsilon_a = 0,05/21,50 \approx 0,23\%$, $\varepsilon_b = 0,05/8,20 \approx 0,61\%$, nên $\varepsilon_s \approx 0,84\%$.

The area is a product: relative uncertainties add. $\varepsilon_a = 0.05/21.50 \approx 0.23\%$, $\varepsilon_b = 0.05/8.20 \approx 0.61\%$, so $\varepsilon_s \approx 0.84\%$.

$$S = 21,50 \cdot 8,20 = 176,3 \text{ cm}^2; \Delta S = 0,84\% \cdot 176,3 \approx 1,5 \text{ cm}^2.$$

$$S = 21.50 \cdot 8.20 = 176.3 \text{ cm}^2; \Delta S = 0.84\% \cdot 176.3 \approx 1.5 \text{ cm}^2.$$

Chu vi là tổng: sai số tuyệt đối cộng lại. $P = 2(a + b) = 59.4 \text{ cm}$, $\Delta P = 2(0.05 + 0.05) = 0.2 \text{ cm}$.

The perimeter is a sum: absolute uncertainties add. $P = 2(a + b) = 59.4 \text{ cm}$, $\Delta P = 2(0.05 + 0.05) = 0.2 \text{ cm}$.

Vậy $S = 176.3 \pm 1.5 \text{ cm}^2$ (chữ số đầu của sai số là 1 nên giữ hai chữ số) và $P = 59.4 \pm 0.2 \text{ cm}$.

Hence $S = 176.3 \pm 1.5 \text{ cm}^2$ (the first digit of the uncertainty is 1, so two figures are kept) and $P = 59.4 \pm 0.2 \text{ cm}$. ■

Bài 1.3 — Problem 1.3

Thể tích $V = 9.0 \cdot 6.5 \cdot 3.6 = 210.6 \text{ m}^3$.

The volume is $V = 9.0 \cdot 6.5 \cdot 3.6 = 210.6 \text{ m}^3$.

Khối lượng $m = \rho V = 1.2 \cdot 210.6 \approx 253 \text{ kg}$, bậc độ lớn 10^2 kg .

The mass is $m = \rho V = 1.2 \cdot 210.6 \approx 253 \text{ kg}$, of order 10^2 kg .

Số học sinh: $253/50 \approx 5$.

Number of students: $253/50 \approx 5$.

Ba kích thước nhân với nhau, mỗi kích thước sai 10%, nên $\varepsilon_V = 3 \cdot 10\% = 30\%$, $\varepsilon_m = 30\%$ (ρ coi chính xác), $\Delta m \approx 76 \text{ kg}$.

Three dimensions multiply, each 10% uncertain, so $\varepsilon_V = 3 \cdot 10\% = 30\%$ and $\varepsilon_m = 30\%$ (ρ taken exact), $\Delta m \approx 76 \text{ kg}$.

Vậy khối lượng khí cỡ $2.5 \cdot 10^2 \text{ kg}$, bằng khoảng 5 học sinh, bất định cỡ 30%.

Hence the air weighs about $2.5 \cdot 10^2 \text{ kg}$, roughly 5 students, uncertain by about 30%. ■

Bài 1.4 — Problem 1.4

Đặt $f = C \cdot k^a m^b$: $T^{-1} = (MT^{-2})^a M^b$.

Set $f = C \cdot k^a m^b$: $T^{-1} = (MT^{-2})^a M^b$.

1. T: $-1 = -2a$, nên $a = 1/2$. M: $0 = a + b$, nên $b = -1/2$.

T: $-1 = -2a$, so $a = 1/2$. M: $0 = a + b$, so $b = -1/2$.

$$f = C\sqrt{(k/m)}$$

(a) k không đổi: $f \propto m^{-1/2}$. Khối lượng gấp 4 nên f giảm 2 lần: $f = 3.2/2 = 1.6 \text{ Hz}$.

(a) k unchanged: $f \propto m^{-1/2}$. The mass is four times larger so f halves: $f = 3.2/2 = 1.6 \text{ Hz}$.

(b) k gấp đôi nhân f với $\sqrt{2}$: $f = 1.6 \cdot \sqrt{2} \approx 2.3 \text{ Hz}$.

(b) Doubling k multiplies f by $\sqrt{2}$: $f = 1.6 \cdot \sqrt{2} \approx 2.3 \text{ Hz}$.

Vậy $f = C\sqrt{(k/m)}$; (a) $f \approx 1.6 \text{ Hz}$; (b) $f \approx 2.3 \text{ Hz}$.

Hence $f = C\sqrt{(k/m)}$; (a) $f \approx 1.6 \text{ Hz}$; (b) $f \approx 2.3 \text{ Hz}$. ■

Bài 1.5 — Problem 1.5

Thời gian rơi thật là $t - \tau$ nên $s = \frac{1}{2}g(t - \tau)^2$. Lấy căn: $\sqrt{s} = \sqrt{(g/2)} \cdot (t - \tau)$.

The true fall time is $t - \tau$ so $s = \frac{1}{2}g(t - \tau)^2$. Taking the root: $\sqrt{s} = \sqrt{(g/2)} \cdot (t - \tau)$.

$$\sqrt{s} = \sqrt{(g/2)} \cdot t - \sqrt{(g/2)} \cdot \tau$$

Đây là đường thẳng $Y = aX + b$ với $X = t$, $Y = \sqrt{s}$, hệ số góc $a = \sqrt{(g/2)}$, hệ số chặn $b = -a\tau$.

This is a line $Y = aX + b$ with $X = t$, $Y = \sqrt{s}$, slope $a = \sqrt{(g/2)}$ and intercept $b = -a\tau$.

Bình phương tối thiểu trên sáu điểm: $a = 2,204 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, $b = -0,266 \text{ m}^{1/2}$.

Least squares on the six points: $a = 2.204 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, $b = -0.266 \text{ m}^{1/2}$.

$$g = 2a^2, \tau = -b/a$$

$g = 2 \cdot 2,204^2 \approx 9,71 \text{ m/s}^2$; $\tau = -0,266/2,204$ cho $|\tau| \approx 0,12 \text{ s}$.

$g = 2 \cdot 2.204^2 \approx 9.71 \text{ m/s}^2$; $\tau = -(-0.266)/2.204 \approx 0.12 \text{ s}$.

Vẽ s theo t^2 : $(t - \tau)^2 = t^2 - 2t\tau + \tau^2$ chứa số hạng bậc nhất theo t nên s theo t^2 không là đường thẳng, và đường tốt nhất qua các điểm có hệ số góc $g/2$ sai. Tính được $g \approx 7,98 \text{ m/s}^2$, thấp hơn 18%.

Plotting s against t^2 : $(t - \tau)^2 = t^2 - 2t\tau + \tau^2$ contains a term linear in t , so s against t^2 is not a line, and the best line through the points has a wrong slope $g/2$. It gives $g \approx 7.98 \text{ m/s}^2$, 18% low.

Vậy $g \approx 9,71 \text{ m/s}^2$ và $\tau \approx 0,12 \text{ s}$.

Hence $g \approx 9.71 \text{ m/s}^2$ and $\tau \approx 0.12 \text{ s}$. ■

Bài 1.6 — Problem 1.6

$\rho = 6 \cdot 8,35 \cdot 10^{-3} / (\pi \cdot (12,70 \cdot 10^{-3})^3) \approx 7785 \text{ kg/m}^3$.

$\rho = 6 \cdot 8.35 \cdot 10^{-3} / (\pi \cdot (12.70 \cdot 10^{-3})^3) \approx 7785 \text{ kg/m}^3$.

$$\varepsilon_p = \varepsilon_m + 3\varepsilon_d$$

Panme: $\varepsilon_m = 0,01/8,35 \approx 0,12\%$, $\varepsilon_d = 0,01/12,70 \approx 0,079\%$, nên $\varepsilon_p \approx 0,12 + 0,24 = 0,36\%$, $\Delta\rho \approx 28 \text{ kg/m}^3$.

Micrometer: $\varepsilon_m = 0.01/8.35 \approx 0.12\%$, $\varepsilon_d = 0.01/12.70 \approx 0.079\%$, so $\varepsilon_p \approx 0.12 + 0.24 = 0.36\%$, $\Delta\rho \approx 28 \text{ kg/m}^3$.

Thước kẹp: $\varepsilon_d = 0,02/12,70 \approx 0,157\%$, $\varepsilon_p \approx 0,12 + 0,47 = 0,59\%$, $\Delta\rho \approx 46 \text{ kg/m}^3$.

Calipers: $\varepsilon_d = 0.02/12.70 \approx 0.157\%$, $\varepsilon_p \approx 0.12 + 0.47 = 0.59\%$, $\Delta\rho \approx 46 \text{ kg/m}^3$.

Cân 0,001 g: $\varepsilon_m \approx 0,012\%$, $\varepsilon_p \approx 0,012 + 0,24 = 0,25\%$: giảm chút ít vì đường kính (lũy thừa 3) chi phối.

Balance at 0.001 g: $\varepsilon_m \approx 0.012\%$, $\varepsilon_p \approx 0.012 + 0.24 = 0.25\%$: only a slight fall because the diameter (power 3) dominates.

Vậy $\rho = (7,79 \pm 0,03) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ với panme; $(7,79 \pm 0,05) \cdot 10^3$ với thước kẹp; cân tốt hơn chỉ đưa ε về 0,25%.

Hence $\rho = (7.79 \pm 0.03) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ with the micrometer; $(7.79 \pm 0.05) \cdot 10^3$ with the calipers; the better balance only brings ε to 0.25%. ■

Bài 1.7 — Problem 1.7

Đặt $P = C \cdot \rho^a A^b v^c$; $[P] = ML^2T^{-3}$.

Set $P = C \cdot \rho^a A^b v^c$; $[P] = ML^2T^{-3}$.

1. M: $1 = a$. T: $-3 = -c$, nên $c = 3$. L: $2 = -3a + 2b + c = -3 + 2b + 3$, nên $b = 1$.

M: $1 = a$. T: $-3 = -c$, so $c = 3$. L: $2 = -3a + 2b + c = -3 + 2b + 3$, so $b = 1$.

$$P = C\rho A v^3$$

Từ mô hình: $C = P/(\rho A v^3) = 6,0/(1,2 \cdot 0,20 \cdot 125) = 0,20$.

From the model: $C = P/(\rho A v^3) = 6.0/(1.2 \cdot 0.20 \cdot 125) = 0.20$.

Tuabin lớn: $P = 0,20 \cdot 1,2 \cdot 1,8 \cdot 8,0^3 \approx 221$ W. Cách khác theo tỉ lệ: $(1,8/0,20) \cdot (8,0/5,0)^3 = 9 \cdot 4,096 \approx 36,9$ lần $6,0$ W, cũng ≈ 221 W.

Large turbine: $P = 0.20 \cdot 1.2 \cdot 1.8 \cdot 8.0^3 \approx 221$ W. By ratios: $(1.8/0.20) \cdot (8.0/5.0)^3 = 9 \cdot 4.096 \approx 36.9$ times 6.0 W, also ≈ 221 W.

Bán kính $\times 1,5$ thì $A \propto r^2$ tăng $1,5^2 = 2,25$ lần, nên P tăng $2,25$ lần.

Radius $\times 1.5$ makes $A \propto r^2$ grow $1.5^2 = 2.25$ times, so P grows 2.25 times.

Vậy $P = C\rho A v^3$, tuabin lớn cho khoảng 221 W; bán kính $\times 1,5$ cho $P \times 2,25$.

Hence $P = C\rho A v^3$; the large turbine gives about 221 W; radius $\times 1.5$ gives $P \times 2.25$. ■

Bài 1.8 — Problem 1.8

(a) Một tờ dày khoảng $0,1$ mm, nhỏ hơn nhiều so với độ chia 1 mm: sai số tương đối cỡ 500% . Đo N tờ chồng lên thì sai số tuyệt đối của H không đổi ($0,1$ cm), còn H tăng N lần, nên sai số tương đối giảm N lần.

(a) One sheet is about 0.1 mm thick, far below the 1 mm division: relative uncertainty about 500% . For N sheets stacked, the absolute uncertainty of H stays (0.1 cm) while H grows N times, so the relative uncertainty falls N times.

(b) $d = H/500 = 0,101$ mm; $\varepsilon_d = \varepsilon_H = 0,1/5,05 \approx 1,98\%$; $\Delta d = 0,1$ cm/500 $\approx 0,002$ mm. Vậy $d = (0,101 \pm 0,002)$ mm.

(b) $d = H/500 = 0.101$ mm; $\varepsilon_d = \varepsilon_H = 0.1/5.05 \approx 1.98\%$; $\Delta d = 0.1$ cm/500 ≈ 0.002 mm. So $d = (0.101 \pm 0.002)$ mm.

$$\rho = m/(abH), \quad \varepsilon_\rho = \varepsilon_m + \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_H$$

(c) $\rho = 2,50/(0,210 \cdot 0,297 \cdot 0,0505) \approx 794$ kg/m³. $\varepsilon_m = 0,40\%$, $\varepsilon_a = 0,5/210 \approx 0,24\%$, $\varepsilon_b = 0,5/297 \approx 0,17\%$, $\varepsilon_H = 1,98\%$; tổng $\varepsilon_\rho \approx 2,79\%$, $\Delta\rho \approx 22$ kg/m³.

(c) $\rho = 2.50/(0.210 \cdot 0.297 \cdot 0.0505) \approx 794$ kg/m³. $\varepsilon_m = 0.40\%$, $\varepsilon_a = 0.5/210 \approx 0.24\%$, $\varepsilon_b = 0.5/297 \approx 0.17\%$, $\varepsilon_H = 1.98\%$; total $\varepsilon_\rho \approx 2.79\%$, $\Delta\rho \approx 22$ kg/m³.

(d) Hai ram: $H = 10,10$ cm, $\varepsilon_H = 0,99\%$; $m = 5,00$ kg, $\varepsilon_m = 0,20\%$; $\varepsilon_\rho \approx 0,20 + 0,24 + 0,17 + 0,99 = 1,60\%$.

(d) Two reams: $H = 10.10$ cm, $\varepsilon_H = 0.99\%$; $m = 5.00$ kg, $\varepsilon_m = 0.20\%$; $\varepsilon_\rho \approx 0.20 + 0.24 + 0.17 + 0.99 = 1.60\%$.

Vậy $d = (0,101 \pm 0,002)$ mm; $\rho = (7,9 \pm 0,2) \cdot 10^2$ kg/m³, trong đó chiều cao ram chiếm khoảng 71% sai số; hai ram đưa ε_ρ về 1,60%.

Hence $d = (0.101 \pm 0.002)$ mm; $\rho = (7.9 \pm 0.2) \cdot 10^2$ kg/m³, of which the ream height supplies about 71% of the uncertainty; two reams bring ε_ρ to 1.60%. ■

Bài 1.9 — Problem 1.9

(a) Các đại lượng H , v_0 , g , λ có $[H] = L$, $[v_0] = LT^{-1}$, $[g] = LT^{-2}$, $[\lambda] = L^{-1}$: bốn đại lượng, hai đơn vị độc lập (L , T), nên có hai tổ hợp không thứ nguyên.

(a) The quantities H , v_0 , g , λ have $[H] = L$, $[v_0] = LT^{-1}$, $[g] = LT^{-2}$, $[\lambda] = L^{-1}$: four quantities and two independent units (L , T), so two dimensionless groups.

$$\Pi_1 = H g / v_0^2, \quad \Pi_2 = \lambda v_0^2 / g$$

Kiểm: $[Hg/v_0^2] = L \cdot LT^{-2}/(L^2T^{-2}) = 1$ và $[\lambda v_0^2/g] = L^{-1} \cdot L^2T^{-2}/(LT^{-2}) = 1$. Theo nguyên lí đồng dạng $\Pi_1 = f(\Pi_2)$, tức $H = (v_0^2/g) \cdot f(\eta)$.

Check: $[Hg/v_0^2] = L \cdot LT^{-2}/(L^2T^{-2}) = 1$ and $[\lambda v_0^2/g] = L^{-1} \cdot L^2T^{-2}/(LT^{-2}) = 1$. By the principle of similarity $\Pi_1 = f(\Pi_2)$, that is $H = (v_0^2/g) \cdot f(\eta)$.

(b) Thí nghiệm 1 có $\eta = 0,010 \cdot 400/9,8 \approx 0,408$. Thí nghiệm 2 cần cùng η : $\lambda' \cdot 100 = 0,010 \cdot 400$, nên $\lambda' = 0,040$ m⁻¹.

(b) Experiment 1 has $\eta = 0.010 \cdot 400/9.8 \approx 0.408$. Experiment 2 needs the same η : $\lambda' \cdot 100 = 0.010 \cdot 400$, so $\lambda' = 0.040$ m⁻¹.

Cùng η nên cùng f , và $H'/H = (v_0'/v_0)^2 = 1/4$: $H' = 17,1/4 \approx 4,28$ m.

The same η gives the same f , and $H'/H = (v_0'/v_0)^2 = 1/4$: $H' = 17.1/4 \approx 4.28$ m.

(c) Không cản: $H_0 = v_0^2/(2g) = 400/19,6 \approx 20,4$ m. Tỉ số $17,1/20,4 \approx 0,84$: cản làm giảm khoảng 16%.

(c) Without drag: $H_0 = v_0^2/(2g) = 400/19.6 \approx 20.4$ m. The ratio $17.1/20.4 \approx 0.84$: drag lowers the height by about 16%.

Vậy $\lambda' = 0,040$ m⁻¹, $H' \approx 4,28$ m; cản làm giảm độ cao khoảng 16%.

Hence $\lambda' = 0.040$ m⁻¹, $H' \approx 4.28$ m; drag lowers the height by about 16%. ■

Bài 1.10 — Problem 1.10

(a) $F = C \cdot \eta^a r^b v^c$: M: $1 = a$. T: $-2 = -a - c$, nên $c = 1$. L: $1 = -a + b + c = -1 + b + 1$, nên $b = 1$.

(a) $F = C \cdot \eta^a r^b v^c$: M: $1 = a$. T: $-2 = -a - c$, so $c = 1$. L: $1 = -a + b + c = -1 + b + 1$, so $b = 1$.

$$F = C \eta r v$$

(b) Cân bằng trọng lực $mg = 6\pi\eta r v$ với $m = (4/3)\pi r^3 \rho_n$:

(b) Balance weight $mg = 6\pi\eta r v$ with $m = (4/3)\pi r^3 \rho_w$:

$$v = 2\rho_n g r^2 / (9\eta)$$

Với $r = 3,0 \cdot 10^{-5}$ m: $v = 2 \cdot 1000 \cdot 9,8 \cdot 9,0 \cdot 10^{-10} / (9 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5}) \approx 0,109$ m/s.

With $r = 3.0 \cdot 10^{-5}$ m: $v = 2 \cdot 1000 \cdot 9.8 \cdot 9.0 \cdot 10^{-10} / (9 \cdot 1.8 \cdot 10^{-5}) \approx 0.109$ m/s.

(c) $Re = 1,2 \cdot 0,109 \cdot 6,0 \cdot 10^{-5} / 1,8 \cdot 10^{-5} \approx 0,44$, nhỏ hơn 1 nên công thức dùng được. Thay v ở (b) vào Re : $Re = 4\rho_n \rho_{kg} r^3 / (9\eta^2)$; đặt $Re = 1$:

(c) $Re = 1.2 \cdot 0.109 \cdot 6.0 \cdot 10^{-5} / 1.8 \cdot 10^{-5} \approx 0.44$, below 1 so the formula applies. Putting v of (b) into Re : $Re = 4\rho_w \rho_{kg} r^3 / (9\eta^2)$; set $Re = 1$:

$$r^3 = 9\eta^2 / (4\rho_n \rho_{kg})$$

$r = 0,040$ mm, và $v = 0,19$ m/s tại đó.

$r = 0.040$ mm, and $v = 0.19$ m/s there.

(d) Với $r = 1,0$ mm, $v \approx 6,6$ m/s (từ ví dụ về lực cản bậc hai): $Re = 1,2 \cdot 6,6 \cdot 2,0 \cdot 10^{-3} / 1,8 \cdot 10^{-5} \approx 880 \gg 1$, nên dùng lực cản bậc hai $F = C_p S v^2$ chứ không dùng $F = 6\pi\eta r v$.

(d) For $r = 1.0$ mm, $v \approx 6.6$ m/s (from the quadratic-drag example): $Re = 1.2 \cdot 6.6 \cdot 2.0 \cdot 10^{-3} / 1.8 \cdot 10^{-5} \approx 880 \gg 1$, so the quadratic drag $F = C_p S v^2$ applies, not $F = 6\pi\eta r v$.

Vậy $F = C_p r v$; giọt 0,030 mm rơi với $v \approx 0,109$ m/s ($Re \approx 0,44$); công thức này dùng được đến $r \approx 0,040$ mm.

Hence $F = C_p r v$; a 0.030 mm drop falls at $v \approx 0.109$ m/s ($Re \approx 0.44$); the formula holds up to $r \approx 0.040$ mm. ■

Bài 1.11 — Problem 1.11

(a) $T^2 = (4\pi^2/g)(\ell + r)$ cho mỗi chiều dài. Trừ hai phương trình:

(a) $T^2 = (4\pi^2/g)(\ell + r)$ for each length. Subtract the two equations:

$$T_1^2 - T_2^2 = (4\pi^2/g)(\ell_1 - \ell_2)$$

r triệt tiêu. Từ đó:

r cancels. Hence:

$$g = 4\pi^2(\ell_1 - \ell_2) / (T_1^2 - T_2^2)$$

(b) $T_1 = 40,44/20 = 2,022$ s, $T_2 = 20,66/20 = 1,033$ s; $T_1^2 - T_2^2 \approx 3,021$ s², do đó $g = 4\pi^2 \cdot 0,750/3,021 \approx 9,80$ m/s².

(b) $T_1 = 40.44/20 = 2.022$ s, $T_2 = 20.66/20 = 1.033$ s; $T_1^2 - T_2^2 \approx 3.021$ s², so $g = 4\pi^2 \cdot 0.750/3.021 \approx 9.80$ m/s².

Sai số: $\Delta(\ell_1 - \ell_2) = 0,004$ m, $\varepsilon = 0,53\%$. $\Delta T = 0,1/20 = 0,005$ s, $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$: 0,0202 và 0,0103 s², cộng 0,0305 s², $\varepsilon = 1,0\%$. Tổng $\varepsilon_g \approx 1,5\%$, $\Delta g \approx 0,15$ m/s².

Uncertainty: $\Delta(\ell_1 - \ell_2) = 0.004$ m, $\varepsilon = 0.53\%$. $\Delta T = 0.1/20 = 0.005$ s, $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$: 0.0202 and 0.0103 s², sum 0.0305 s², $\varepsilon = 1.0\%$. Total $\varepsilon_g \approx 1.5\%$, $\Delta g \approx 0.15$ m/s².

(c) $\ell_1 - \ell_2 = 0,100$ m làm số hạng đầu bằng $0,004/0,100 = 4\%$; $T_1^2 - T_2^2$ nhỏ cũng làm số hạng sau lớn; tổng $\varepsilon_g \approx 14\%$. Hai chiều dài gần nhau làm sai số bị phóng to cỡ 9 lần.

(c) $\ell_1 - \ell_2 = 0.100$ m makes the first term $0.004/0.100 = 4\%$; the small $T_1^2 - T_2^2$ enlarges the second; total $\varepsilon_g \approx 14\%$. Two close lengths magnify the uncertainty about 9 times.

(d) Từ ℓ_1 riêng: $g = 4\pi^2 \cdot 1,000/2,022^2 \approx 9,66$ m/s², thấp hơn (b) khoảng 1,4% vì thiếu r . Mức lệch này cùng cỡ ε_g của (b), nên ở sai số thời gian 0,1 s phương pháp hai chiều dài

chưa vượt được cách thông thường; nó có lợi khi r/ℓ lớn hoặc khi thời gian đo chính xác hơn.

(d) From ℓ_1 alone: $g = 4\pi^2 \cdot 1.000/2.022^2 \approx 9.66 \text{ m/s}^2$, about 1.4% below (b) because r is omitted. This offset is comparable to ε_g of (b), so at a timing error of 0.1 s the two-length method does not beat the ordinary one; it pays when r/ℓ is large or the timing is more accurate.

Vậy $g = 9,80 \pm 0,15 \text{ m/s}^2$ ($\varepsilon \approx 1,5\%$); chọn ℓ_2 gần ℓ_1 làm ε_g tăng lên cỡ 14%.

Hence $g = 9.80 \pm 0.15 \text{ m/s}^2$ ($\varepsilon \approx 1.5\%$); choosing ℓ_2 close to ℓ_1 raises ε_g to about 14%. ■

Bài 1.12 — Problem 1.12

(a) $t = C \cdot R^a \rho^b p^c$; $[p] = ML^{-1}T^{-2}$. T: $1 = -2c$, nên $c = -1/2$. M: $0 = b + c$, nên $b = 1/2$. L: $0 = a - 3b - c = a - 3/2 + 1/2$, nên $a = 1$.

(a) $t = C \cdot R^a \rho^b p^c$; $[p] = ML^{-1}T^{-2}$. T: $1 = -2c$, so $c = -1/2$. M: $0 = b + c$, so $b = 1/2$. L: $0 = a - 3b - c = a - 3/2 + 1/2$, so $a = 1$.

$$t = C R \sqrt{(\rho/p)}$$

(b) $\sqrt{(\rho/p)} = \sqrt{(1000/10^5)} = 0,1 \text{ s/m}$, nên $C = 9,2 \cdot 10^{-5} / (1,0 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1) = 0,92$.

(b) $\sqrt{(\rho/p)} = \sqrt{(1000/10^5)} = 0.1 \text{ s/m}$, so $C = 9.2 \cdot 10^{-5} / (1.0 \cdot 10^{-3} \cdot 0.1) = 0.92$.

(c) Theo tỉ lệ $t \propto R/\sqrt{p}$: $t = 9,2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot \sqrt{(10^5/(3,0 \cdot 10^4))} = 9,2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 1,826 \approx 5,04 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

(c) By ratios $t \propto R/\sqrt{p}$: $t = 9.2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot \sqrt{(10^5/(3.0 \cdot 10^4))} = 9.2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 1.826 \approx 5.04 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

(d) $R/t = 3,0 \cdot 10^{-3} / (5,04 \cdot 10^{-4}) \approx 6,0 \text{ m/s}$ và $\sqrt{(p/\rho)} = \sqrt{(3,0 \cdot 10^4/1000)} \approx 5,5 \text{ m/s}$: cùng cỡ, vì $R/t = \sqrt{(p/\rho)}/C$.

(d) $R/t = 3.0 \cdot 10^{-3} / (5.04 \cdot 10^{-4}) \approx 6.0 \text{ m/s}$ and $\sqrt{(p/\rho)} = \sqrt{(3.0 \cdot 10^4/1000)} \approx 5.5 \text{ m/s}$: the same scale, since $R/t = \sqrt{(p/\rho)}/C$.

Vậy $t = CR\sqrt{(\rho/p)}$ với $C \approx 0,92$; bọt 3,0 mm ở $3,0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ xẹp sau khoảng $5,04 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

Hence $t = CR\sqrt{(\rho/p)}$ with $C \approx 0.92$; a 3.0 mm bubble at $3.0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ collapses in about $5.04 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. ■

Chương 2. Động học chất điểm chuyển động thẳng — Chapter 2. One-dimensional kinematics

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Phân biệt độ dịch chuyển với quãng đường, vận tốc trung bình với tốc độ trung bình, và tính đúng từng đại lượng từ đồ thị.
Tell displacement from distance travelled and average velocity from average speed, and compute each correctly from a graph.
- Dùng bốn phương trình của chuyển động thẳng biến đổi đều và chọn phương trình không chứa đại lượng đề không cho.
Use the four equations of uniformly accelerated motion and pick the one that leaves out the quantity the problem does not give.
- Giải rơi tự do và ném thẳng đứng bằng một phương trình duy nhất cho cả đường lên lẫn đường xuống.
Solve free fall and vertical throws with a single equation covering both the rise and the fall.
- Lập điều kiện gặp nhau, biện luận nghiệm phương trình bậc hai, và chuyển sang hệ quy chiếu gắn một vật để rút gọn bài toán.
Set up the meeting condition, discuss the roots of a quadratic, and switch to the frame of one body to shorten a problem.
- Xử lý chuyển động nhiều giai đoạn với gia tốc đổi theo bậc thang, nối các giai đoạn bằng vận tốc và vị trí ở nút.
Handle multi-stage motion with step-wise acceleration, joining the stages through the velocity and position at each node.

2.1. Hệ quy chiếu, độ dịch chuyển và quãng đường — Reference frame, displacement and distance

Chuyển động thẳng được khảo sát trên một trục Ox , vật chuyển động coi là chất điểm: kích thước của nó nhỏ so với quãng đường nó đi. Chỉ số m (mean) đặt cho giá trị trung bình, ví dụ v_m ; chỉ số 0 đặt cho giá trị tại thời điểm ban đầu. Giá trị $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ trừ khi đề cho khác. Khi xét chuyển động thẳng đứng, trục Oy hướng lên.

One-dimensional motion is studied along an axis Ox , and the moving body is treated as a particle: its size is small compared with the distance it covers. The subscript m (mean) marks an average value, for example v_m ; the subscript 0 marks the value at the initial instant. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ unless stated otherwise. For vertical motion the axis Oy points up.

ĐỊNH NGHĨA 2.1 (Hệ quy chiếu) / DEFINITION 2.1 (Reference frame) — Hệ quy chiếu gồm vật làm mốc, trục tọa độ gắn với vật mốc, gốc thời gian và đồng hồ. Tọa độ x của chất điểm là số đo đại số của đoạn từ gốc O tới chất điểm, dương theo chiều dương của trục và âm theo chiều ngược lại.

A reference frame consists of a reference body, a coordinate axis attached to it, a time origin and a clock. The coordinate x of a particle is the signed distance from the origin O to the particle, positive in the positive direction of the axis and negative in the opposite direction.

ĐỊNH NGHĨA 2.2 (Độ dịch chuyển) / DEFINITION 2.2 (Displacement) — Độ dịch chuyển của chất điểm từ thời điểm t_1 đến t_2 là $\Delta x = x_2 - x_1$. Đây là đại lượng đại số: $\Delta x > 0$ khi chất điểm dịch theo chiều dương, $\Delta x < 0$ khi dịch ngược chiều dương. Nó chỉ phụ thuộc vị trí đầu và vị trí cuối, không phụ thuộc đường đi.

The displacement of a particle from time t_1 to t_2 is $\Delta x = x_2 - x_1$. It is a signed quantity: $\Delta x > 0$ when the particle moves in the positive direction, $\Delta x < 0$ when it moves against it. It depends only on the initial and final positions, not on the path.

ĐỊNH NGHĨA 2.3 (Quãng đường) / DEFINITION 2.3 (Distance travelled) — Quãng đường s là tổng độ dài các đoạn chất điểm đã đi qua trong khoảng thời gian xét. Quãng đường không âm và không giảm theo thời gian.

The distance travelled s is the total length of the stretches the particle has passed over in the interval considered. It is never negative and never decreases with time.

TÍNH CHẤT 2.4 (Độ dịch chuyển và quãng đường) / PROPERTY 2.4 (Displacement versus distance) — Với mọi chuyển động thẳng, $|\Delta x| \leq s$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi chất điểm không đổi chiều chuyển động trong khoảng thời gian xét.

For any rectilinear motion, $|\Delta x| \leq s$. Equality holds if and only if the particle does not reverse its direction of motion in the interval.

Chứng minh. / Proof.

Chia khoảng thời gian thành các đoạn nhỏ sao cho trong mỗi đoạn chất điểm không đổi chiều. Độ dịch chuyển cả khoảng là tổng đại số của các độ dịch chuyển nhỏ, còn quãng đường là tổng các giá trị tuyệt đối của chúng.

Split the interval into pieces in each of which the particle keeps its direction. The total displacement is the algebraic sum of the small displacements, while the distance is the sum of their absolute values.

Giá trị tuyệt đối của một tổng không vượt quá tổng các giá trị tuyệt đối, và hai vế bằng nhau khi mọi số hạng cùng dấu, tức chất điểm không đổi chiều.

The absolute value of a sum never exceeds the sum of the absolute values, and the two are equal when all the terms have the same sign, that is, when the particle never reverses. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Hai vật cùng vị trí đầu và cuối thì có cùng độ dịch chuyển, dù đi bằng đường nào. Một vòng khép kín cho $\Delta x = 0$ nhưng $s > 0$.

Two bodies with the same initial and final positions have the same displacement, whatever their paths. A closed round trip gives $\Delta x = 0$ but $s > 0$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lấy quãng đường làm độ dịch chuyển khi vật đổi chiều: người đi 120 m về phía đông rồi 45 m về phía tây có $\Delta x = 75$ m, còn $s = 165$ m.

Using distance in place of displacement when the body reverses: a walker going 120 m east then 45 m west has $\Delta x = 75$ m but $s = 165$ m.

2.2. Vận tốc, tốc độ và gia tốc — Velocity, speed and acceleration

ĐỊNH NGHĨA 2.5 (Vận tốc trung bình và tốc độ trung bình) / DEFINITION 2.5 (Average velocity and average speed) — Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian Δt là v_m

$= \Delta x / \Delta t$, đại lượng đại số cùng dấu với Δx . Tốc độ trung bình là $s / \Delta t$, luôn không âm. Hai đại lượng này bằng nhau về độ lớn chỉ khi chất điểm không đổi chiều.

The average velocity over a time interval Δt is $v_m = \Delta x / \Delta t$, a signed quantity with the sign of Δx . The average speed is $s / \Delta t$ and is never negative. The two have equal magnitude only when the particle does not reverse.

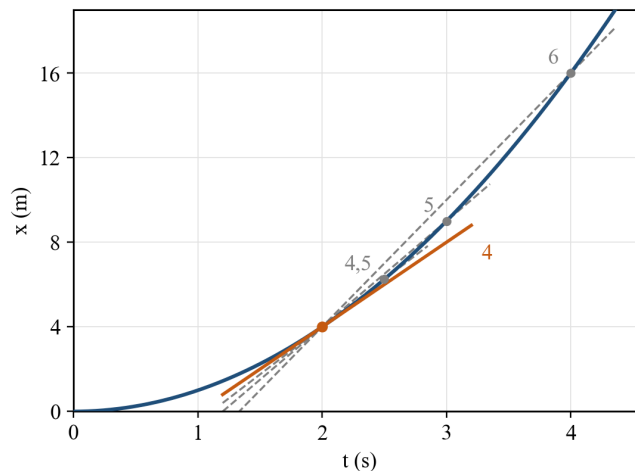
ĐỊNH NGHĨA 2.6 (Vận tốc tức thời) / DEFINITION 2.6 (Instantaneous velocity) — Vận tốc tức thời tại thời điểm t là giá trị mà vận tốc trung bình v_m tiến tới khi khoảng thời gian Δt bắt đầu từ t dần tới 0. Trên đồ thị $x-t$, nó là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm đang xét.

The instantaneous velocity at time t is the value that the average velocity v_m approaches as the interval Δt starting at t shrinks to 0. On an $x-t$ graph it is the slope of the tangent at the point in question.

$$v = \Delta x / \Delta t \text{ khi } \Delta t \text{ dần tới } 0 \quad (2.1)$$

Hình 2.1 cho thấy giới hạn này với $x = t^2$ (x tính bằng mét, t bằng giây). Từ điểm $t = 2$ s, các cát tuyến nối tới $t = 4$ s, 3 s, 2,5 s có hệ số góc 6; 5; 4,5 m/s, tức là vận tốc trung bình trên các khoảng $\Delta t = 2$ s, 1 s, 0,5 s. Hệ số góc giảm dần về 4 m/s, đúng bằng $2t$ tại $t = 2$ s: $\Delta x / \Delta t = (4\Delta t + \Delta t^2) / \Delta t = 4 + \Delta t$, tiến tới 4 khi Δt dần tới 0.

Figure 2.1 shows this limit for $x = t^2$ (x in metres, t in seconds). From the point $t = 2$ s, the chords reaching to $t = 4$ s, 3 s, 2.5 s have slopes 6, 5, 4.5 m/s, the average velocities over $\Delta t = 2$ s, 1 s, 0.5 s. The slope falls towards 4 m/s, which is $2t$ at $t = 2$ s: for the interval Δt after $t = 2$ s, $\Delta x / \Delta t = (4\Delta t + \Delta t^2) / \Delta t = 4 + \Delta t$, which tends to 4 as Δt tends to 0.



Hình 2.1. Cát tuyến của $x = t^2$ xuất phát từ $t = 2$ s tiến tới tiếp tuyến; số ghi cạnh đường là hệ số góc, đơn vị m/s

Figure 2.1. Chords of $x = t^2$ starting at $t = 2$ s approach the tangent; the number beside each line is its slope in m/s

ĐỊNH NGHĨA 2.7 (Gia tốc) / DEFINITION 2.7 (Acceleration) — Gia tốc trung bình là $a_m = \Delta v / \Delta t$. Gia tốc tức thời là giá trị a_m tiến tới khi Δt dần tới 0; trên đồ thị $v-t$, nó là hệ số góc của tiếp tuyến. Đơn vị m/s^2 . Trong chuyển động thẳng, a là đại lượng đại số.

The average acceleration is $a_m = \Delta v / \Delta t$. The instantaneous acceleration is the value a_m approaches as Δt tends to 0; on a $v-t$ graph it is the slope of the tangent. Its unit is m/s^2 . In rectilinear motion a is a signed quantity.

$$a = \Delta v / \Delta t \text{ khi } \Delta t \text{ dần tới } 0 \quad (2.2)$$

TÍNH CHẤT 2.8 (Nhanh dần và chậm dần) / PROPERTY 2.8 (Speeding up and slowing down) — Chuyển động nhanh dần khi v và a cùng dấu (tốc độ tăng); chậm dần khi v và a ngược dấu (tốc độ giảm). Dấu của a một mình không cho biết nhanh dần hay chậm dần.

The motion speeds up when v and a have the same sign (the speed grows) and slows down when they have opposite signs (the speed falls). The sign of a alone does not tell which.

Vật ném thẳng đứng lên có $a = -g < 0$ suốt hành trình. Khi đi lên, $v > 0$ nên chậm dần; khi đi xuống, $v < 0$ nên nhanh dần.

A body thrown straight up has $a = -g < 0$ throughout. On the way up $v > 0$, so it slows down; on the way down $v < 0$, so it speeds up.

ĐỊNH LÝ 2.9 (Trung bình điều hòa) / THEOREM 2.9 (Harmonic mean) — Chất điểm đi hai quãng đường bằng nhau theo cùng một chiều với tốc độ v_1 rồi v_2 (mỗi quãng chuyển động đều) thì tốc độ trung bình cả quãng là trung bình điều hòa của v_1, v_2 :

A particle covers two equal distances in the same direction at speeds v_1 then v_2 (each stretch at constant speed). Its average speed over the whole path is the harmonic mean of v_1 and v_2 :

$$v_m = 2v_1v_2/(v_1 + v_2) \quad (2.3)$$

Chứng minh. / Proof.

Gọi mỗi quãng dài s . Thời gian hai quãng là s/v_1 và s/v_2 . Tốc độ trung bình bằng tổng quãng đường chia tổng thời gian:

Let each stretch have length s . The two times are s/v_1 and s/v_2 . The average speed is total distance over total time:

$$v_m = 2s/(s/v_1 + s/v_2) = 2/(1/v_1 + 1/v_2) = 2v_1v_2/(v_1 + v_2)$$

■

HỆ QUẢ 2.10 (Quãng bằng nhau, thời gian bằng nhau) / COROLLARY 2.10 (Equal distances, equal times) — Với n quãng đường bằng nhau đi với các tốc độ $v_1, \dots, v_n$, tốc độ trung bình là $n/(1/v_1 + \dots + 1/v_n)$. Với n khoảng thời gian bằng nhau, tốc độ trung bình là trung bình cộng $(v_1 + \dots + v_n)/n$.

For n equal distances at speeds $v_1, \dots, v_n$, the average speed is $n/(1/v_1 + \dots + 1/v_n)$. For n equal time intervals it is the arithmetic mean $(v_1 + \dots + v_n)/n$.

Chứng minh. / Proof.

Quãng bằng nhau: lặp lại phép tính của định lý trên với n quãng, tổng thời gian là $s(1/v_1 + \dots + 1/v_n)$ còn tổng quãng là ns .

Equal distances: repeat the calculation above with n stretches; the total time is $s(1/v_1 + \dots + 1/v_n)$ and the total distance is ns .

Thời gian bằng nhau, mỗi đoạn kéo dài τ : tổng quãng đường là $(v_1 + \dots + v_n)\tau$, tổng thời gian là $n\tau$, chia ra trung bình cộng.

Equal times, each lasting τ : the total distance is $(v_1 + \dots + v_n)\tau$ and the total time is $n\tau$, which gives the arithmetic mean. ■

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Quãng bằng nhau: trung bình điều hòa. Thời gian bằng nhau: trung bình cộng. Tốc độ trung bình KHÔNG phải là trung bình cộng các tốc độ khi quãng đường bằng nhau.

Equal distances: harmonic mean. Equal times: arithmetic mean. The average speed is NOT the arithmetic mean of the speeds when the distances are equal.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lấy $(v_1 + v_2)/2$ cho hai nửa quãng đường: đi 30 km/h nửa đầu và 60 km/h nửa sau cho tốc độ trung bình 40 km/h, không phải 45 km/h.

Taking $(v_1 + v_2)/2$ for two half-distances: 30 km/h over the first half and 60 km/h over the second give an average speed of 40 km/h, not 45 km/h.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho tốc độ theo từng nửa quãng đường nhưng nửa sau lại chia theo thời gian. Ghi rõ đại lượng nào được chia đều: quãng bằng nhau thì trung bình điều hòa, thời gian bằng nhau thì trung bình cộng. Tổng quãng AB không cho nên phải tự triệt tiêu.

The speeds are given for each half of the distance, but the second half is split by time. State which quantity is split evenly: equal distances call for the harmonic mean, equal times for the arithmetic mean. The length AB is not given, so it must cancel.

VÍ DỤ 2.1 (Phân biệt Δx và s) / EXAMPLE 2.1 (Displacement versus distance) — Người chạy trên đường thẳng đi 120 m về phía đông trong 30 s, nghỉ 10 s, rồi chạy 45 m về phía tây trong 15 s. Tính độ dịch chuyển, quãng đường, vận tốc trung bình và tốc độ trung bình trên cả 55 s.

A runner on a straight track goes 120 m east in 30 s, rests for 10 s, then runs 45 m west in 15 s. Find the displacement, the distance travelled, the average velocity and the average speed over the whole 55 s.

Lời giải. / Solution.

1. Chọn trục Ox hướng đông, gốc tại chỗ xuất phát. Vị trí cuối: $x = 120 - 45 = 75$ m nên $\Delta x = 75$ m.

Take Ox pointing east with the origin at the start. The final position is $x = 120 - 45 = 75$ m, so $\Delta x = 75$ m.

2. Chật điểm đổi chiều nên quãng đường là tổng hai đoạn: $s = 120 + 45 = 165$ m.

The particle reverses, so the distance is the sum of the two stretches: $s = 120 + 45 = 165$ m.

3. Thời gian cả hành trình: $\Delta t = 30 + 10 + 15 = 55$ s. Nghỉ 10 s vẫn tính vào Δt .

Total time: $\Delta t = 30 + 10 + 15 = 55$ s. The 10 s rest counts towards Δt .

$$v_m = \Delta x / \Delta t, \text{ tốc độ trung bình} = s / \Delta t$$

Vận tốc trung bình là $75/55 \approx 1,36$ m/s theo chiều đông; tốc độ trung bình là $165/55 = 3,00$ m/s. Vậy hai đại lượng khác nhau vì người chạy đổi chiều.

The average velocity is $75/55 \approx 1.36$ m/s eastward; the average speed is $165/55 = 3.00$ m/s. Hence the two differ because the runner reverses. ■

VÍ DỤ 2.2 (Hai kiểu chia: theo quãng và theo thời gian) / EXAMPLE 2.2 (Two kinds of split: by distance and by time) — Ô tô chạy từ A đến B. Nửa đầu quãng đường đi với tốc độ

30 km/h. Với nửa quãng đường còn lại, nửa thời gian đầu đi với 40 km/h, nửa thời gian sau đi với 60 km/h. Tìm tốc độ trung bình trên cả quãng AB.

A car runs from A to B. It covers the first half of the distance at 30 km/h. Over the second half, it drives at 40 km/h for the first half of the time and at 60 km/h for the second half of the time. Find the average speed over the whole of AB.

Lời giải. / Solution.

1. Nửa quãng sau chia theo thời gian bằng nhau nên tốc độ trung bình trên nửa đó là trung bình cộng: $(40 + 60)/2 = 50$ km/h.

The second half is split into equal times, so its average speed is the arithmetic mean: $(40 + 60)/2 = 50$ km/h.

2. Cả quãng gồm hai nửa quãng đường bằng nhau với tốc độ trung bình 30 km/h và 50 km/h, nên dùng trung bình điều hòa:

The whole path is two equal distances at average speeds 30 km/h and 50 km/h, so the harmonic mean applies:

$$v_m = 2v_1v_2/(v_1 + v_2) \quad (2.3)$$

3. Thay số bằng đơn vị km/h: $2 \cdot 30 \cdot 50 / (30 + 50) = 3000/80 = 37,5$. Kiểm tra với AB = 120 km: nửa đầu mất 2 h, nửa sau 60 km với 50 km/h mất 1,2 h, tổng 3,2 h, và $120/3,2 = 37,5$ km/h.

Substituting in km/h: $2 \cdot 30 \cdot 50 / (30 + 50) = 3000/80 = 37.5$. Check with AB = 120 km: the first half takes 2 h, the second half of 60 km at 50 km/h takes 1.2 h, total 3.2 h, and $120/3.2 = 37.5$ km/h.

Vậy tốc độ trung bình trên cả quãng AB là 37,5 km/h, không phụ thuộc độ dài AB.

Hence the average speed over the whole of AB is 37.5 km/h, independent of the length of AB. ■

2.3. Đồ thị chuyển động thẳng — Graphs of rectilinear motion

TÍNH CHẤT 2.11 (Ý nghĩa hệ số góc) / PROPERTY 2.11 (Meaning of the slope) — Trên đồ thị x–t: hệ số góc của đoạn thẳng nối hai điểm là vận tốc trung bình giữa hai thời điểm ấy; hệ số góc của tiếp tuyến là vận tốc tức thời. Trên đồ thị v–t, hệ số góc của tiếp tuyến là gia tốc tức thời. Đồ thị x–t thẳng ứng với vận tốc không đổi; đồ thị v–t thẳng ứng với gia tốc không đổi.

On an x–t graph, the slope of the segment joining two points is the average velocity between those instants, and the slope of the tangent is the instantaneous velocity. On a v–t graph, the slope of the tangent is the instantaneous acceleration. A straight x–t graph means constant velocity; a straight v–t graph means constant acceleration.

ĐỊNH LÝ 2.12 (Diện tích dưới đồ thị v–t) / THEOREM 2.12 (Area under the v–t graph) — Độ dịch chuyển trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 bằng diện tích đại số giới hạn bởi đồ thị v–t, trục thời gian và hai đường thẳng đứng $t = t_1$, $t = t_2$: phần nằm trên trục t tính dương, phần nằm dưới tính âm. Tương tự, diện tích đại số dưới đồ thị a–t bằng độ biến thiên vận tốc Δv .

The displacement between t_1 and t_2 equals the signed area bounded by the v–t graph, the time axis and the vertical lines $t = t_1$, $t = t_2$: area above the t axis counts as positive, area below as negative.

Likewise, the signed area under an a–t graph equals the change in velocity Δv .

Chứng minh. / Proof.

Chia khoảng thời gian thành các đoạn Δt_i đủ ngắn để vận tốc trong mỗi đoạn xem như không đổi, bằng v_i . Khi đó độ dịch chuyển trong đoạn là $v_i \Delta t_i$, chính là diện tích hình chữ nhật cao v_i , rộng Δt_i , mang dấu của v_i .

Divide the interval into pieces Δt_i short enough for the velocity in each to be taken as constant, v_i . The displacement in that piece is $v_i \Delta t_i$, the area of a rectangle of height v_i and width Δt_i , carrying the sign of v_i .

$$\Delta x = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_n \Delta t_n \quad (2.4)$$

Chia càng mịn thì tổng các hình chữ nhật càng sát miền dưới đồ thị. Khi v không đổi từng đoạn hoặc biến đổi tuyến tính, miền ấy là hình chữ nhật, tam giác, hình thang và phép cộng cho kết quả đúng. Lập luận cho $a-t$ giống hệt, với a và Δv thay cho v và Δx .

The finer the division, the closer the sum of rectangles hugs the region under the graph. When v is constant on pieces or varies linearly, the region is a rectangle, triangle or trapezium and the sum is exact. The argument for $a-t$ is identical, with a and Δv in place of v and Δx . ■

NHẬN XÉT / REMARK — Diện tích đại số cho độ dịch chuyển; quãng đường là tổng các diện tích lấy giá trị tuyệt đối, tức diện tích dưới đồ thị $|v|-t$. Khi đọc đồ thị $v-t$, tìm trước các thời điểm đồ thị cắt trục t : đó là các lúc đổi chiều và là chỗ phải tách miền.

The signed area gives displacement; the distance travelled is the sum of the areas taken as absolute values, the area under the $|v|-t$ graph. When reading a $v-t$ graph, first locate where it crosses the t axis: those are the instants of reversal and the places where the region must be split.

Đồ thị <i>Graph</i>	Hệ số góc cho <i>The slope gives</i>	Diện tích dưới đồ thị cho <i>The area under it gives</i>
$x-t$ $x-t$	vận tốc v <i>the velocity v</i>	không có ý nghĩa vật lí <i>no physical meaning</i>
$v-t$ $v-t$	gia tốc a <i>the acceleration a</i>	độ dịch chuyển Δx <i>the displacement Δx</i>
$a-t$ $a-t$	độ giật, ngoài chương trình <i>the jerk, beyond the course</i>	độ biến thiên vận tốc Δv <i>the change in velocity Δv</i>

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Hệ số góc đi xuống một bậc: $x-t \Rightarrow v-t \Rightarrow a-t$. Diện tích đi lên một bậc: $a-t \Rightarrow v-t \Rightarrow x-t$. Đơn vị kiểm tra: m/s nhân s ra m , m/s^2 nhân s ra m/s .

Slope steps down one level: $x-t \Rightarrow v-t \Rightarrow a-t$. Area steps up one level: $a-t \Rightarrow v-t \Rightarrow x-t$. Unit check: m/s times s gives m , m/s^2 times s gives m/s .

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Đọc vận tốc từ độ cao của đồ thị $x-t$ thay vì từ độ dốc: hai vật cắt nhau trên $x-t$ là gặp nhau, không phải cùng vận tốc; vận tốc bằng nhau khi hai tiếp tuyến song song.

Reading velocity from the height of an $x-t$ graph instead of its steepness: two curves crossing on $x-t$ means the bodies meet, not that their velocities are equal; the velocities are equal where the tangents are parallel.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đồ thị $v-t$ gồm bốn đoạn thẳng. Hỏi về độ dịch chuyển thì lấy diện tích đại số; hỏi về quãng đường thì tách tại chỗ v đổi dấu. Gia tốc từng giai đoạn là hệ số góc. Vị trí lúc đổi chiều cần cộng thêm tọa độ ban đầu x_0 .

The $v-t$ graph has four straight pieces. For displacement take the signed area; for distance split where v changes sign. The acceleration in each stage is the slope. The position at reversal needs the initial coordinate x_0 added.

VÍ DỤ 2.3 (Đọc đồ thị $v-t$, tách miền tại chỗ đổi dấu) / EXAMPLE 2.3 (Reading a $v-t$ graph, splitting at the sign change) —

Chất điểm chuyển động thẳng, lúc $t = 0$ ở $x_0 = 5$ m. Đồ thị $v-t$ ở Hình 2.2: v tăng đều từ 0 đến 8 m/s trong 4 s, giữ 8 m/s đến $t = 10$ s, giảm đều tới -4 m/s ở $t = 13$ s, rồi giữ -4 m/s đến $t = 16$ s. Tìm gia tốc từng giai đoạn, thời điểm và vị trí đổi chiều, độ dịch chuyển, quãng đường, vận tốc trung bình và tốc độ trung bình trong 16 s.

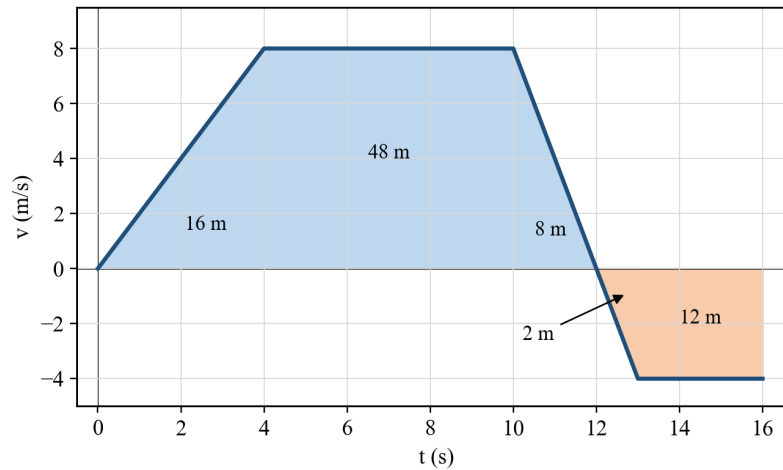
A particle moves in a straight line, at $x_0 = 5$ m when $t = 0$. The $v-t$ graph in Figure 2.2: v rises uniformly from 0 to 8 m/s in 4 s, stays at 8 m/s until $t = 10$ s, falls uniformly to -4 m/s at $t = 13$ s, then stays at -4 m/s until $t = 16$ s. Find the acceleration in each stage, the instant and position of reversal, the displacement, the distance travelled, and the average velocity and average speed over the 16 s.

Lời giải. / Solution.

1. Gia tốc là hệ số góc: $a = 8/4 = 2 \text{ m/s}^2$ (0–4 s), $a = 0$ (4–10 s), $a = (-4 - 8)/3 = -4 \text{ m/s}^2$ (10–13 s), $a = 0$ (13–16 s).
Acceleration is the slope: $a = 8/4 = 2 \text{ m/s}^2$ (0–4 s), $a = 0$ (4–10 s), $a = (-4 - 8)/3 = -4 \text{ m/s}^2$ (10–13 s), $a = 0$ (13–16 s).
2. Đồ thị cắt trục t khi $8 - 4(t - 10) = 0$, tức $t = 12$ s: vật đổi chiều lúc này.
The graph crosses the t axis when $8 - 4(t - 10) = 0$, that is at $t = 12$ s: the particle reverses then.
3. Diện tích các miền: 0–4 s: $(1/2) \cdot 4 \cdot 8 = 16$ m; 4–10 s: $6 \cdot 8 = 48$ m; 10–12 s: $(1/2) \cdot 2 \cdot 8 = 8$ m (dương); 12–13 s: $(1/2) \cdot 1 \cdot 4 = 2$ m (âm); 13–16 s: $3 \cdot 4 = 12$ m (âm).
Areas: 0–4 s: $(1/2) \cdot 4 \cdot 8 = 16$ m; 4–10 s: $6 \cdot 8 = 48$ m; 10–12 s: $(1/2) \cdot 2 \cdot 8 = 8$ m (positive); 12–13 s: $(1/2) \cdot 1 \cdot 4 = 2$ m (negative); 13–16 s: $3 \cdot 4 = 12$ m (negative).
4. Đến lúc đổi chiều đã đi $16 + 48 + 8 = 72$ m theo chiều dương nên vị trí là $x = 5 + 72 = 77$ m.
By the reversal the particle has gone $16 + 48 + 8 = 72$ m in the positive direction, so $x = 5 + 72 = 77$ m.
5. Độ dịch chuyển: $\Delta x = 72 - 2 - 12 = 58$ m. Quãng đường: $s = 72 + 2 + 12 = 86$ m.
Displacement: $\Delta x = 72 - 2 - 12 = 58$ m. Distance: $s = 72 + 2 + 12 = 86$ m.

Vận tốc trung bình là $58/16 = 3,625 \text{ m/s}$; tốc độ trung bình là $86/16 = 5,375 \text{ m/s}$. Vậy vật đổi chiều tại $t = 12$ s ở $x = 77$ m, và kết thúc tại $x = 63$ m.

The average velocity is $58/16 = 3.625 \text{ m/s}$; the average speed is $86/16 = 5.375 \text{ m/s}$. Hence the particle reverses at $t = 12$ s at $x = 77$ m and ends at $x = 63$ m. ■



Hình 2.2. Đồ thị $v-t$ của Ví dụ 2.3; miền xanh là độ dịch chuyển dương, miền cam là âm, số ghi là diện tích tính bằng mét

Figure 2.2. The $v-t$ graph of Example 2.3; blue regions are positive displacement, orange regions negative, numbers are areas in metres

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cộng diện tích mọi miền để được độ dịch chuyển mà không đổi dấu phần dưới trục t . Với Ví dụ 2.3 đáp số sai là $72 + 2 + 12 = 86$ m cho Δx .

Adding the areas of all regions to get the displacement without giving the part below the t axis a minus sign. In Example 2.3 the wrong answer is $72 + 2 + 12 = 86$ m for Δx .

2.4. Chuyển động thẳng biến đổi đều — Uniformly accelerated motion

ĐỊNH NGHĨA 2.13 (Chuyển động thẳng biến đổi đều) / DEFINITION 2.13 (Uniformly accelerated motion) — Chuyển động thẳng biến đổi đều là chuyển động thẳng có gia tốc a không đổi. Đồ thị $v-t$ là một đường thẳng có hệ số góc a .

Uniformly accelerated motion is rectilinear motion with constant acceleration a . Its $v-t$ graph is a straight line of slope a .

ĐỊNH LÝ 2.14 (Bốn phương trình của chuyển động biến đổi đều) / THEOREM 2.14 (The four equations of constant acceleration) — Với chuyển động thẳng có gia tốc a không đổi, vận tốc v_0 và tọa độ x_0 ở $t = 0$, bốn phương trình sau liên hệ x , v , t , a (mỗi phương trình thiếu đúng một đại lượng, xem bảng bên dưới các công thức):

For rectilinear motion with constant acceleration a , velocity v_0 and coordinate x_0 at $t = 0$, the following four equations link x , v , t and a (each lacks exactly one quantity, see the table below the formulas):

$$v = v_0 + at \quad (2.5)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (2.6)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad (2.7)$$

$$x - x_0 = (v_0 + v)t/2 \quad (2.8)$$

Chứng minh. / Proof.

Phương trình (2.5): gia tốc không đổi nên $a = (v - v_0)/t$ đúng với mọi khoảng, suy ra $v = v_0 + at$.

Equation (2.5): the acceleration is constant, so $a = (v - v_0)/t$ holds over every interval, giving $v = v_0 + at$.

Phương trình (2.8): đồ thị $v-t$ là đường thẳng nên miền dưới nó (Hình 2.3) là hình thang có hai đáy v_0, v và chiều cao t . Theo định lý về diện tích, $x - x_0 = (v_0 + v)t/2$.

Equation (2.8): the $v-t$ graph is a straight line, so the region under it (Figure 2.3) is a trapezium with parallel sides v_0, v and height t . By the area theorem, $x - x_0 = (v_0 + v)t/2$.

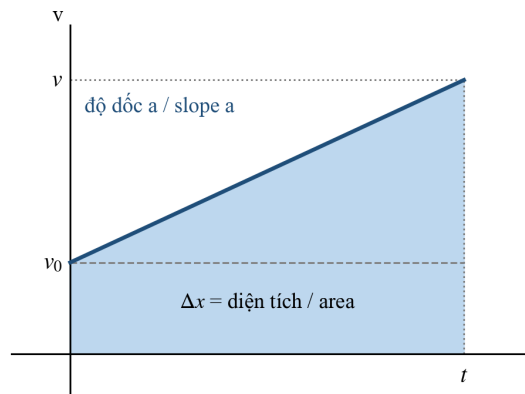
Phương trình (2.6): thay v từ (2.5) vào (2.8): $x - x_0 = (2v_0 + at)t/2 = v_0t + at^2/2$.

Equation (2.6): substitute v from (2.5) into (2.8): $x - x_0 = (2v_0 + at)t/2 = v_0t + at^2/2$.

Phương trình (2.7): rút $t = (v - v_0)/a$ từ (2.5) rồi thay vào (2.8):

Equation (2.7): take $t = (v - v_0)/a$ from (2.5) and put it into (2.8):

$$x - x_0 = (v_0 + v)(v - v_0)/(2a) = (v^2 - v_0^2)/(2a)$$



Hình 2.3. Đồ thị $v-t$ của chuyển động biến đổi đều: miền dưới đường thẳng là hình thang, diện tích bằng độ dịch chuyển

Figure 2.3. The $v-t$ graph of uniformly accelerated motion: the region under the line is a trapezium whose area is the displacement

Phương trình Equation	Không chứa Does not contain	Dùng khi đề không cho Use when the problem omits
$v = v_0 + at$ $v = v_0 + at$	$x - x_0$ $x - x_0$	quãng đường the displacement
$x = x_0 + v_0t + at^2/2$ $x = x_0 + v_0t + at^2/2$	v	vận tốc cuối the final velocity
$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$	t	thời gian the time

Phương trình <i>Equation</i>	Không chứa <i>Does not contain</i>	Dùng khi đề không cho <i>Use when the problem omits</i>
$x - x_0 = (v_0 + v)t/2$ $x - x_0 = (v_0 + v)t/2$	a	gia tốc <i>the acceleration</i>

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Bốn phương trình (2.5) đến (2.8) và quy tắc chọn: gạch tên đại lượng đề không cho và không hỏi, rồi lấy phương trình thiếu đúng đại lượng ấy.
The four equations (2.5) to (2.8) and the selection rule: strike out the quantity the problem neither gives nor asks, then take the equation that lacks exactly that quantity.

HỆ QUẢ 2.15 (Quãng đường trong các khoảng thời gian bằng nhau) / COROLLARY 2.15 (Distances in equal time intervals) — Chia chuyển động biến đổi đều thành các khoảng thời gian bằng nhau τ liên tiếp thì hiệu hai quãng đường kế nhau không đổi và bằng $a\tau^2$. Nếu xuất phát từ nghỉ, các quãng đi được trong các khoảng τ liên tiếp tỉ lệ $1 : 3 : 5 : \dots$, và tổng quãng từ đầu tỉ lệ với bình phương thời gian.
Divide uniformly accelerated motion into consecutive equal time intervals τ : the difference between successive distances is constant and equals $a\tau^2$. Starting from rest, the distances in consecutive intervals τ are in the ratio $1 : 3 : 5 : \dots$, and the total distance from the start is proportional to the square of the time.

Chứng minh. / *Proof.*

Quãng đường trong khoảng thứ n , từ $(n-1)\tau$ đến $n\tau$, là hiệu hai giá trị của (2.6):

The distance in the n -th interval, from $(n-1)\tau$ to $n\tau$, is the difference of two values of (2.6):

$$s_n = v_0\tau + (2n-1)a\tau^2/2 \quad (2.9)$$

Hiệu $s_{n+1} - s_n = a\tau^2$, không phụ thuộc n . Khi $v_0 = 0$, s_n tỉ lệ với $2n-1$, tức $1 : 3 : 5 : \dots$. Tổng n khoảng đầu là $(1+3+\dots+(2n-1))a\tau^2/2 = n^2a\tau^2/2$, tỉ lệ với n^2 .

The difference $s_{n+1} - s_n = a\tau^2$ does not depend on n . For $v_0 = 0$, s_n is proportional to $2n-1$, that is $1 : 3 : 5 : \dots$. The first n intervals add up to $(1+3+\dots+(2n-1))a\tau^2/2 = n^2a\tau^2/2$, proportional to n^2 . ■

HỆ QUẢ 2.16 (Thời gian qua các đoạn bằng nhau) / COROLLARY 2.16 (Time through equal stretches) — Vật xuất phát từ nghỉ, chuyển động biến đổi đều qua các đoạn đường bằng nhau liên tiếp. Nếu đoạn thứ nhất mất t_1 thì đoạn thứ n mất
A body starts from rest and moves with constant acceleration through consecutive equal stretches. If the first stretch takes t_1 , the n -th stretch takes

$$t_n = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \quad (2.10)$$

Chứng minh. / *Proof.*

Gọi mỗi đoạn dài ℓ . Từ (2.6) với $v_0 = 0$, thời gian đi n đoạn đầu là $T_n = \sqrt{2n\ell/a}$, nên $T_n = t_1\sqrt{n}$.

Let each stretch have length ℓ . From (2.6) with $v_0 = 0$, the time for the first n stretches is $T_n = \sqrt{2n\ell/a}$, so $T_n = t_1\sqrt{n}$.

Thời gian riêng của đoạn thứ n là hiệu $T_n - T_{n-1} = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

The time of the n -th stretch alone is the difference $T_n - T_{n-1} = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$. ■

HỆ QUẢ 2.17 (Vận tốc ở giữa thời gian và giữa quãng đường) / COROLLARY 2.17

(Velocity at mid-time and at mid-path) — Trong chuyển động biến đổi đều từ vận tốc v_0 đến v (vật không đổi chiều), vận tốc tại thời điểm chính giữa là $(v_0 + v)/2$ và bằng vận tốc trung bình. Vận tốc tại vị trí chính giữa quãng đường là

In uniformly accelerated motion from v_0 to v (the body does not reverse), the velocity at the middle instant is $(v_0 + v)/2$ and equals the average velocity. The velocity at the middle of the path is

$$v_x = \sqrt{(v_0^2 + v^2)/2} \quad (2.11)$$

Chứng minh. / Proof.

Giữa thời gian: (2.5) cho $v_t = v_0 + a(t/2) = (v_0 + v)/2$, đúng bằng v_m theo (2.8).

Mid-time: (2.5) gives $v_t = v_0 + a(t/2) = (v_0 + v)/2$, which is v_m by (2.8).

Giữa quãng: gọi v_x là vận tốc ở trung điểm. Áp dụng (2.7) cho nửa đầu và nửa sau, mỗi nửa dài $\Delta x/2$:

Mid-path: let v_x be the velocity at the midpoint. Apply (2.7) to the first and second halves, each of length $\Delta x/2$:

$$v_x^2 - v_0^2 = a\Delta x = v^2 - v_x^2$$

Suy ra $2v_x^2 = v_0^2 + v^2$.

Hence $2v_x^2 = v_0^2 + v^2$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Vì $(v_0^2 + v^2)/2 \geq ((v_0 + v)/2)^2$ (hiệu bằng $((v - v_0)/2)^2$), vận tốc ở giữa quãng đường luôn không nhỏ hơn vận tốc ở giữa thời gian, dấu bằng chỉ khi $v = v_0$. Vật nhanh dần đi nửa quãng đầu mất nhiều thời gian hơn nửa quãng sau, nên đến giữa quãng nó đã qua hơn nửa thời gian.

Since $(v_0^2 + v^2)/2 \geq ((v_0 + v)/2)^2$ (the difference is $((v - v_0)/2)^2$), the velocity at mid-path is never less than at mid-time, with equality only for $v = v_0$. A body speeding up spends longer on the first half of the path than on the second, so it reaches mid-path after more than half the time.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Áp dụng (2.5) đến (2.8) cho một chuyển động có gia tốc đổi giữa chừng (phanh rồi nhả phanh, hai giai đoạn a khác nhau): mỗi giai đoạn phải viết phương trình riêng, nối bằng vận tốc và tọa độ tại nút.

Applying (2.5) to (2.8) to a motion whose acceleration changes midway (braking then releasing, two different values of a): each stage needs its own equations, joined through the velocity and coordinate at the node.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên dấu của a khi chậm dần: xe đi theo chiều dương và hãm phanh có $a < 0$. Dùng $a > 0$ trong (2.7) cho v^2 lớn hơn v_0^2 , vô lý.

Forgetting the sign of a when slowing down: a car moving in the positive direction and braking has $a < 0$. Using $a > 0$ in (2.7) would give v^2 larger than v_0^2 , which is absurd.

VÍ DỤ 2.4 (Chọn phương trình thiếu đại lượng chưa biết) / EXAMPLE 2.4 (Pick the equation that lacks the unknown)

— Vật xuất phát từ nghỉ, chuyển động nhanh dần đều. Nó

đi qua hai điểm A và B cách nhau 60 m trong 4,0 s, và vận tốc tại B là 20 m/s. Tìm vận tốc tại A, gia tốc, và khoảng cách từ chỗ xuất phát đến A.

A body starts from rest and speeds up uniformly. It passes two points A and B 60 m apart in 4.0 s, and its velocity at B is 20 m/s. Find the velocity at A, the acceleration, and the distance from the starting point to A.

Lời giải. / Solution.

1. Chọn chiều dương theo chuyển động. Giữa A và B biết quãng đường, thời gian và v_B ; chưa biết a nên dùng phương trình thiếu a , tức (2.8):

Take the positive direction along the motion. Between A and B the distance, the time and v_B are known and a is not, so use the equation without a , (2.8):

$$x_B - x_A = (v_A + v_B)t/2 \quad (2.8)$$

2. Suy ra $v_A = 2 \cdot 60/4 - 20 = 10$ m/s.

Hence $v_A = 2 \cdot 60/4 - 20 = 10$ m/s.

3. Gia tốc từ (2.5) giữa A và B: $a = (20 - 10)/4 = 2,5$ m/s².

The acceleration from (2.5) between A and B: $a = (20 - 10)/4 = 2.5$ m/s².

4. Từ chỗ xuất phát ($v = 0$) đến A, đề không cho thời gian nên dùng (2.7): $OA = v_A^2/(2a) = 100/5 = 20$ m.

From the start ($v = 0$) to A the time is not given, so use (2.7): $OA = v_A^2/(2a) = 100/5 = 20$ m.

Vậy $v_A = 10$ m/s, $a = 2,5$ m/s² và $OA = 20$ m.

Hence $v_A = 10$ m/s, $a = 2.5$ m/s² and $OA = 20$ m. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Người quan sát đứng yên, các toa trôi qua trước mặt. Điểm ở đầu đoàn tàu đi những đoạn bằng nhau, mỗi đoạn bằng chiều dài một toa, kể từ lúc nghỉ. Đó đúng là tình huống của (2.10), nên không cần giải từng toa.

The observer stands still while the coaches pass. The head of the train covers equal stretches, each the length of one coach, starting from rest. This is exactly the situation of (2.10), so there is no need to treat each coach separately.

VÍ DỤ 2.5 (Các đoạn đường bằng nhau liên tiếp) / EXAMPLE 2.5 (Consecutive equal stretches) — Đoàn tàu có các toa dài 20 m bắt đầu chuyển động nhanh dần đều từ nghỉ.

Người quan sát đứng ngang đầu toa thứ nhất; toa thứ nhất đi qua trước mặt người đó trong 4,0 s. Tìm gia tốc của tàu, thời gian toa thứ 9 đi qua, và vận tốc tàu khi toa thứ 9 vừa đi qua hết.

A train with coaches 20 m long starts from rest and speeds up uniformly. An observer stands level with the front of the first coach; the first coach passes him in 4.0 s. Find the acceleration of the train, the time the 9th coach takes to pass, and the speed of the train as the 9th coach finishes passing.

Lời giải. / Solution.

1. Đầu toa 1 đi 20 m từ nghỉ trong 4,0 s: $a = 2\ell/t_1^2 = 2 \cdot 20/16 = 2,5$ m/s².

The front of coach 1 covers 20 m from rest in 4.0 s: $a = 2\ell/t_1^2 = 2 \cdot 20/16 = 2.5$ m/s².

2. Thời gian toa thứ 9 theo (2.10): $t_9 = 4(\sqrt{9} - \sqrt{8}) = 4(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0,686$ s.

The time of the 9th coach by (2.10): $t_9 = 4(\sqrt{9} - \sqrt{8}) = 4(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0.686$ s.

3. Sau 9 toa tàu đã đi 180 m, và biết a , quãng đường nên dùng (2.7): $v = \sqrt{(2 \cdot 2,5 \cdot 180)} = 30$ m/s. Kiểm tra: thời gian 9 toa là $4\sqrt{9} = 12$ s và $2,5 \cdot 12 = 30$ m/s.

After 9 coaches the train has gone 180 m; with a and the distance known, use (2.7): $v = \sqrt{2 \cdot 2.5 \cdot 180} = 30 \text{ m/s}$. Check: the time for 9 coaches is $4\sqrt{9} = 12 \text{ s}$ and $2.5 \cdot 12 = 30 \text{ m/s}$.

Vậy $a = 2,5 \text{ m/s}^2$, toa thứ 9 qua trong khoảng 0,69 s và vận tốc tàu lúc ấy là 30 m/s.

Hence $a = 2.5 \text{ m/s}^2$, the 9th coach passes in about 0.69 s and the speed of the train at that moment is 30 m/s. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Toa thứ 9 chỉ mất khoảng 1/6 thời gian của toa thứ nhất ($0,686/4 \approx 0,17$). Tỉ số thời gian các toa liên tiếp là $1 : 0,41 : 0,32 : 0,27 : \dots$, giảm dần như $1/(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$; công thức này cũng cho thấy với mọi n thời gian toa luôn dương và nhỏ dần.

The 9th coach takes only about 1/6 of the time of the first ($0.686/4 \approx 0.17$). The times of successive coaches are in the ratio $1 : 0.41 : 0.32 : 0.27 : \dots$, falling like $1/(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$, since $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = 1$.

2.5. Rơi tự do và ném thẳng đứng — Free fall and vertical throws

ĐỊNH LUẬT 2.18 (Rơi tự do) / LAW 2.18 (Free fall) — Ở gần mặt đất, nếu bỏ qua lực cản của không khí thì mọi vật rơi với cùng một gia tốc hướng xuống $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$, không phụ thuộc khối lượng và hình dạng. Phạm vi: độ cao nhỏ so với bán kính Trái Đất; lực cản không khí bé so với trọng lượng.

Near the ground, if air resistance is neglected, every body falls with the same downward acceleration $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$, independent of mass and shape. Scope: heights small compared with the radius of the Earth; air resistance small compared with the weight.

Chọn trục Oy hướng lên, gốc ở mặt đất hoặc điểm ném. Khi đó gia tốc của mọi vật chỉ chịu trọng lực là $a = -g$ trong suốt hành trình, cả lúc lên lẫn lúc xuống, nên (2.5) đến (2.8) áp dụng nguyên vẹn với $a = -g$. Một vật thả rơi là trường hợp $v_0 = 0$.

Take the axis Oy pointing up, with origin at the ground or at the point of launch. The acceleration of any body acted on by weight alone is $a = -g$ throughout, going up and coming down alike, so (2.5) to (2.8) apply unchanged with $a = -g$. A dropped body is the case $v_0 = 0$.

HỆ QUẢ 2.19 (Ném thẳng đứng) / COROLLARY 2.19 (Vertical throw) — Vật ném thẳng đứng lên từ y_0 với vận tốc $v_0 > 0$ thì $y = y_0 + v_0 t - gt^2/2$ và $v = v_0 - gt$. Vật lên cao nhất sau $t = v_0/g$, độ cao cực đại so với chỗ ném là $H = v_0^2/(2g)$; thời gian đi xuống bằng thời gian đi lên và vận tốc khi trở lại chỗ ném là $-v_0$.

A body thrown straight up from y_0 with velocity $v_0 > 0$ has $y = y_0 + v_0 t - gt^2/2$ and $v = v_0 - gt$. It reaches its highest point after $t = v_0/g$, the maximum height above the launch point is $H = v_0^2/(2g)$; the time to come down equals the time to go up, and the velocity on returning to the launch point is $-v_0$.

$$y = y_0 + v_0 t - gt^2/2 \quad (2.12)$$

$$t_{\text{lên}} = v_0/g, \quad H = v_0^2/(2g) \quad (2.13)$$

Chứng minh. / Proof.

Điểm cao nhất có $v = 0$: từ (2.5) với $a = -g$, $0 = v_0 - gt$ nên $t = v_0/g$. Độ cao cực đại từ (2.7): $0 - v_0^2 = -2gH$, tức $H = v_0^2/(2g)$.

At the highest point $v = 0$: from (2.5) with $a = -g$, $0 = v_0 - gt$ so $t = v_0/g$. The maximum height from (2.7): $0 - v_0^2 = -2gH$, so $H = v_0^2/(2g)$.

Về chỗ ném: $y = y_0$ cho $v_0t - gt^2/2 = 0$, nghiệm $t = 0$ và $t = 2v_0/g$, gấp đôi thời gian lên. Khi đó $v = v_0 - 2v_0 = -v_0$.

Return to the launch point: $y = y_0$ gives $v_0t - gt^2/2 = 0$, with roots $t = 0$ and $t = 2v_0/g$, twice the time up. Then $v = v_0 - 2v_0 = -v_0$. ■

HỆ QUẢ 2.20 (Hai lần qua cùng một độ cao) / COROLLARY 2.20 (Two passes through one height) — Vật ném lên từ mặt đất với v_0 qua độ cao h ($0 < h < H$) hai lần, một lần đi lên, một lần đi xuống, với cùng tốc độ $\sqrt{v_0^2 - 2gh}$. Khoảng thời gian giữa hai lần qua là
A body thrown up from the ground with v_0 passes the height h ($0 < h < H$) twice, once going up and once coming down, with the same speed $\sqrt{v_0^2 - 2gh}$. The time between the two passes is

$$\Delta t = 2\sqrt{(v_0^2 - 2gh)}/g \quad (2.14)$$

Chứng minh. / Proof.

Từ (2.7) tại độ cao h : $v^2 = v_0^2 - 2gh$, nên $v = \pm\sqrt{(v_0^2 - 2gh)}$, dấu + khi lên, dấu - khi xuống.

From (2.7) at height h : $v^2 = v_0^2 - 2gh$, so $v = \pm\sqrt{(v_0^2 - 2gh)}$, plus going up and minus coming down.

Vận tốc đổi từ $+u$ sang $-u$ với gia tốc $-g$ mất thời gian $2u/g$ theo (2.5), $u = \sqrt{(v_0^2 - 2gh)}$.

The velocity changes from $+u$ to $-u$ at acceleration $-g$, which takes $2u/g$ by (2.5), with $u = \sqrt{(v_0^2 - 2gh)}$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Một phương trình (2.12) mô tả cả đường lên lẫn đường xuống, kể cả khi vật bay quá chỗ ném về phía dưới ($y < y_0$). Giải $y = h$ cho hai nghiệm t , hai nghiệm là hai lần qua độ cao h ; nghiệm âm bị loại, nghiệm dương lớn hơn thời gian bay là vật đã chạm đất.

The single equation (2.12) describes the rise and the fall, even when the body passes below the launch point ($y < y_0$). Solving $y = h$ gives two roots t , the two passes through height h ; a negative root is rejected, and a root beyond the flight time means the body has already landed.

NHẬN XÉT / REMARK — Tốc độ chạm đất của vật ném từ độ cao h với tốc độ v_0 là $\sqrt{(v_0^2 + 2gh)}$ cho mọi hướng ném thẳng đứng, lên hay xuống: (2.7) chỉ chứa v_0^2 . Ném lên rồi rơi về chỗ ném, vật có đúng vận tốc $-v_0$ và từ đó giống hệt ném xuống; hai bài có thời gian khác nhau và tốc độ cuối như nhau.

The impact speed of a body thrown from height h with speed v_0 is $\sqrt{(v_0^2 + 2gh)}$ for any vertical direction, up or down, because (2.7) contains only v_0^2 . Thrown up, the body returns to the launch point with velocity exactly $-v_0$ and from there is identical to a body thrown down; the two problems have different times and the same final speed.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Vật bay lên rồi rơi xuống đất, đề hỏi thời gian chạm đất. Không tách hai đoạn. Đặt gốc ở mặt đất, trục hướng lên, viết (2.12) với $y_0 = 30$ m và đặt $y = 0$; hai nghiệm trái dấu, lấy nghiệm dương.

The body rises and then falls to the ground, and the time to land is asked. Do not split into two stages.

Put the origin at the ground, the axis up, write (2.12) with $y_0 = 30$ m and set $y = 0$; the two roots have opposite signs, so take the positive one.

VÍ DỤ 2.6 (Một phương trình cho cả lên và xuống) / EXAMPLE 2.6 (One equation for the rise and the fall) — Từ nóc nhà cao 30 m, ném thẳng đứng một quả bóng lên với vận tốc 12 m/s. Bỏ qua lực cản, $g = 9,8$ m/s². Tìm độ cao cực đại so với mặt đất, thời gian rơi chạm đất và tốc độ khi chạm đất.

From the roof of a house 30 m high a ball is thrown straight up at 12 m/s. Ignore air resistance, $g = 9.8$ m/s². Find the maximum height above the ground, the time to reach the ground and the speed on impact.

Lời giải. / Solution.

- Gốc ở mặt đất, Oy hướng lên: $y_0 = 30$ m, $v_0 = 12$ m/s, $a = -9,8$ m/s².
Origin at the ground, Oy upward: $y_0 = 30$ m, $v_0 = 12$ m/s, $a = -9.8$ m/s².
- Độ cao cực đại: $H = 144/(2 \cdot 9,8) \approx 7,35$ m trên nóc nhà, tức $30 + 7,35 \approx 37,3$ m so với mặt đất.
Maximum height: $H = 144/(2 \cdot 9.8) \approx 7.35$ m above the roof, that is $30 + 7.35 \approx 37.3$ m above the ground.
- Chạm đất khi $y = 0$: $30 + 12t - 4,9t^2 = 0$, tức $4,9t^2 - 12t - 30 = 0$. Biệt thức $144 + 588 = 732$, $\sqrt{732} \approx 27,06$, nên $t = (12 + 27,06)/9,8 \approx 3,99$ s (nghiệm âm loại).
It lands when $y = 0$: $30 + 12t - 4.9t^2 = 0$, i.e. $4.9t^2 - 12t - 30 = 0$. The discriminant is $144 + 588 = 732$, $\sqrt{732} \approx 27.06$, so $t = (12 + 27.06)/9.8 \approx 3.99$ s (the negative root is rejected).
- Tốc độ lúc chạm đất từ (2.7), không cần t : $v^2 = 144 + 2 \cdot 9,8 \cdot 30 = 732$, $v \approx 27,1$ m/s. Kiểm tra bằng (2.5): $12 - 9,8 \cdot 3,985 \approx -27,05$ m/s, dấu âm là hướng xuống.
Speed on impact from (2.7), without t : $v^2 = 144 + 2 \cdot 9.8 \cdot 30 = 732$, $v \approx 27.1$ m/s. Check with (2.5): $12 - 9.8 \cdot 3.985 \approx -27.05$ m/s, the minus sign meaning downward.

Vậy bóng lên cao nhất 37,3 m, chạm đất sau khoảng 3,99 s với tốc độ khoảng 27,1 m/s.
Hence the ball peaks at 37.3 m, lands after about 3.99 s, and hits at about 27.1 m/s. ■

VÍ DỤ 2.7 (Đặt thời gian rơi làm ẩn) / EXAMPLE 2.7 (Take the time of fall as the unknown) — Vật rơi tự do từ độ cao H xuống đất. Trong 2,0 s cuối cùng trước khi chạm đất, vật đi được quãng đường bằng $3/4$ H . Tính H và thời gian rơi, $g = 9,8$ m/s².

A body falls freely from height H to the ground. In the last 2.0 s before impact it covers a distance equal to $3/4$ of H . Find H and the total time of fall, $g = 9.8$ m/s².

Lời giải. / Solution.

- Gọi thời gian rơi là T . Quãng đường cả quãng: $H = gT^2/2$. Quãng đường đến lúc $T - 2$ là $g(T - 2)^2/2$.
Let the time of fall be T . The whole distance: $H = gT^2/2$. The distance fallen by time $T - 2$ is $g(T - 2)^2/2$.
- Phần còn lại trong 2 s cuối là $3H/4$, nên phần đã rơi trước đó là $H/4$:
The last 2 s cover $3H/4$, so the part already fallen before is $H/4$:

$$g(T - 2)^2/2 = (1/4) \cdot gT^2/2$$

3. Lấy căn hai vế (cả hai dương vì $T > 2$): $T - 2 = T/2$, nên $T = 4$ s.

Take square roots (both sides positive since $T > 2$): $T - 2 = T/2$, so $T = 4$ s.

4. $H = 9,8 \cdot 16/2 = 78,4$ m. Kiểm tra: trong 2 s đầu vật rơi $4,9 \cdot 4 = 19,6$ m = $H/4$.

$H = 9.8 \cdot 16/2 = 78.4$ m. Check: in the first 2 s the body falls $4.9 \cdot 4 = 19.6$ m = $H/4$.

Vậy vật rơi trong 4 s từ độ cao 78,4 m.

Hence the body falls for 4 s from a height of 78.4 m. ■

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Rơi tự do từ nghỉ: $v = gt$, $s = gt^2/2$, $v^2 = 2gs$. Ném lên: lên cao nhất sau v_0/g , độ cao $v_0^2/(2g)$, thời gian cả đi lẫn về $2v_0/g$.

Free fall from rest: $v = gt$, $s = gt^2/2$, $v^2 = 2gs$. Thrown up: highest point after v_0/g , height $v_0^2/(2g)$, round-trip time $2v_0/g$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tách ném lên và rơi xuống thành hai bài rồi cộng quãng đường nhầm: đi lên H , đi xuống $H + 30$ m; đừng quên vật rơi thấp hơn chỗ ném. Chọn trục và dấu một lần, dùng một phương trình.

Splitting the throw into a rise and a fall and then adding distances wrongly: up H , down $H + 30$ m; do not forget the body lands below the launch point. Fix the axis and signs once and use a single equation.

2.6. Hai vật gặp nhau và chuyển động nhiều giai đoạn — Meeting problems and multi-stage motion

ĐỊNH NGHĨA 2.21 (Chuyển động tương đối một chiều) / DEFINITION 2.21 (One-dimensional relative motion) — Với hai chất điểm 1 và 2 trên cùng một trục, chuyển động của 2 đối với 1 (hệ quy chiếu gắn với 1) được mô tả bởi hiệu: tọa độ tương đối $x_{21} = x_2 - x_1$, vận tốc tương đối $v_{21} = v_2 - v_1$, gia tốc tương đối $a_{21} = a_2 - a_1$. Hai vật gặp nhau khi $x_{21} = 0$.

For two particles 1 and 2 on the same axis, the motion of 2 relative to 1 (the frame attached to 1) is described by differences: relative coordinate $x_{21} = x_2 - x_1$, relative velocity $v_{21} = v_2 - v_1$, relative acceleration $a_{21} = a_2 - a_1$. The two meet when $x_{21} = 0$.

ĐỊNH LÝ 2.22 (Gia tốc bằng nhau) / THEOREM 2.22 (Equal accelerations) — Nếu hai chất điểm có cùng gia tốc thì chuyển động tương đối của chúng là chuyển động đều: $x_{21} = x_{21}(0) + v_{21}(0) \cdot t$. Hai vật ném thẳng đứng cùng lúc, hoặc một vật thả và một vật ném, chưa chạm đất, thuộc trường hợp này.

If two particles have the same acceleration, their relative motion is uniform: $x_{21} = x_{21}(0) + v_{21}(0) \cdot t$. Two bodies thrown vertically at the same moment, or one dropped and one thrown, before either lands, fall under this case.

Chứng minh. / Proof.

Trừ (2.6) viết cho vật 2 và vật 1 với cùng a , các số hạng $at^2/2$ triệt tiêu:

Subtract (2.6) written for body 2 and body 1 with the same a ; the terms $at^2/2$ cancel:

$$x_2 - x_1 = (x_{20} - x_{10}) + (v_{20} - v_{10})t$$

Vế phải là hàm bậc nhất của t , tức chuyển động đều với vận tốc $v_{20} - v_{10}$.

The right side is linear in t , that is uniform motion with velocity $v_{20} - v_{10}$. ■

TÍNH CHẤT 2.23 (Gặp nhau và khoảng cách nhỏ nhất) / PROPERTY 2.23 (Meeting and minimum separation) — Điều kiện gặp nhau: $x_{21}(t) = 0$ là phương trình bậc hai ẩn t khi $a_{21} \neq 0$. Biệt thức $u^2 - 2a_{21}x_{21}(0)$ dương: gặp nhau hai lần; bằng 0: chạm đúng một lần, ngay lúc vận tốc tương đối bằng 0; âm: không gặp. Khi không gặp, khoảng cách nhỏ nhất đạt lúc $v_{21} = 0$ và bằng $|x_{21}(0) - v_{21}(0)^2/(2a_{21})|$.

Meeting condition: $x_{21}(t) = 0$ is a quadratic in t when $a_{21} \neq 0$. The discriminant $u^2 - 2a_{21}x_{21}(0)$, with $u = v_{21}(0)$: positive, they meet twice; zero: exactly one touch, at the instant when the relative velocity is 0; negative: they never meet. When they do not meet, the minimum separation occurs when $v_{21} = 0$ and equals $|x_{21}(0) - v_{21}(0)^2/(2a_{21})|$.

Chứng minh. / Proof.

Viết $x_{21}(t) = x_0 + ut + bt^2/2$ với x_0, u, b là tọa độ, vận tốc, gia tốc tương đối ban đầu ($b \neq 0$), rồi hoàn thành bình phương:

Write $x_{21}(t) = x_0 + ut + bt^2/2$ with x_0, u, b the initial relative coordinate, velocity and acceleration ($b \neq 0$), and complete the square:

$$x_{21} = (b/2)(t + u/b)^2 + x_0 - u^2/(2b)$$

Giá trị cực trị $x_0 - u^2/(2b)$ đạt lúc $t = -u/b$, tức lúc $v_{21} = u + bt = 0$. Phương trình $x_{21} = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $(t + u/b)^2 = -(2/b)(x_0 - u^2/(2b))$ không âm, tức biệt thức $u^2 - 2bx_0 \geq 0$; bằng 0 thì nghiệm kép tại $v_{21} = 0$.

The extreme value $x_0 - u^2/(2b)$ occurs at $t = -u/b$, that is when $v_{21} = u + bt = 0$. The equation $x_{21} = 0$ has a solution if and only if $(t + u/b)^2 = -(2/b)(x_0 - u^2/(2b))$ is not negative, that is if the discriminant $u^2 - 2bx_0 \geq 0$; when it is 0 the root is double, at $v_{21} = 0$. ■

TÍNH CHẤT 2.24 (Nối các giai đoạn) / PROPERTY 2.24 (Joining the stages) — Chuyển động nhiều giai đoạn: chia tại mọi thời điểm gia tốc đổi. Mỗi giai đoạn dùng (2.5) đến (2.8) với a của giai đoạn đó; vận tốc và tọa độ cuối giai đoạn này là điều kiện đầu của giai đoạn sau. Gia tốc có thể nhảy, vận tốc và tọa độ không nhảy.

Multi-stage motion: split at every instant where the acceleration changes. Each stage uses (2.5) to (2.8) with its own a ; the velocity and coordinate at the end of one stage are the initial conditions of the next. The acceleration may jump; the velocity and coordinate do not.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai vật cùng chịu gia tốc $-g$, nên theo định lý về gia tốc bằng nhau chuyển động tương đối là đều. Trước khi viết hai phương trình bậc hai, hãy thử: ngay lúc B được ném, A đã rơi 5 m và có vận tốc 10 m/s hướng xuống; khoảng cách 75 m, vận tốc đến gần nhau là $40 + 10 = 50$ m/s.

Both bodies share the acceleration $-g$, so by the equal-accelerations theorem their relative motion is uniform. Before writing two quadratics, try this: at the instant B is thrown, A has fallen 5 m and moves down at 10 m/s; the gap is 75 m and the closing speed is $40 + 10 = 50$ m/s.

VÍ DỤ 2.8 (Hiệu hai chuyển động cùng gia tốc là chuyển động đều) / EXAMPLE 2.8 (Two motions with equal acceleration differ by uniform motion) — Vật A thả rơi từ đỉnh tháp cao 80 m. Sau 1,0 s, vật B được ném thẳng đứng từ chân tháp lên với vận tốc 40 m/s. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Hai vật gặp nhau lúc nào, ở độ cao bao nhiêu, và lúc ấy mỗi vật đang đi lên hay đi xuống?

Body A is dropped from the top of a tower 80 m high. After 1.0 s, body B is thrown straight up from the foot of the tower at 40 m/s. Take $g = 10 \text{ m/s}^2$. When and at what height do they meet, and is each body moving up or down then?

Lời giải. / Solution.

1. Gốc ở chân tháp, Oy lên, gốc thời gian lúc thả A. A: $y_A = 80 - 5t^2$. B bắt đầu từ $t = 1$ s: $y_B = 40(t - 1) - 5(t - 1)^2$.

Origin at the foot of the tower, Oy up, time zero when A is dropped. A: $y_A = 80 - 5t^2$. B starts at $t = 1$ s: $y_B = 40(t - 1) - 5(t - 1)^2$.

2. Khai triển $y_B = 40t - 40 - 5t^2 + 10t - 5 = 50t - 45 - 5t^2$. Cho $y_A = y_B$, các số hạng t^2 triệt tiêu:

Expand $y_B = 40t - 40 - 5t^2 + 10t - 5 = 50t - 45 - 5t^2$. Setting $y_A = y_B$, the t^2 terms cancel:

$$80 = 50t - 45$$

3. Suy ra $t = 2,5$ s, độ cao $y = 80 - 5 \cdot 6,25 = 48,75$ m. Cách kia: lúc $t = 1$ s khoảng cách 75 m, vận tốc đến gần nhau 50 m/s, mất 1,5 s, tức $t = 2,5$ s.

Hence $t = 2.5$ s and $y = 80 - 5 \cdot 6.25 = 48.75$ m. The other way: at $t = 1$ s the gap is 75 m, the closing speed 50 m/s, taking 1.5 s, so $t = 2.5$ s.

4. Vận tốc lúc gặp: $v_A = -10 \cdot 2,5 = -25$ m/s (xuống); $v_B = 40 - 10 \cdot 1,5 = 25$ m/s (lên).

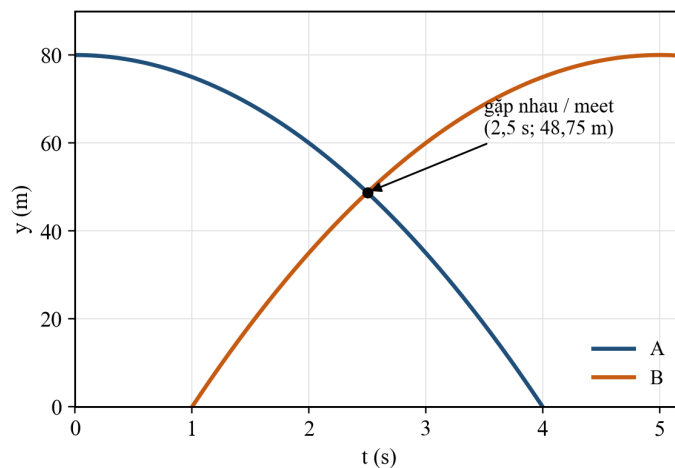
Vật B chưa tới đỉnh (đỉnh sau 4 s) nên lập luận hợp lệ.

Velocities at the meeting: $v_A = -10 \cdot 2.5 = -25$ m/s (down); $v_B = 40 - 10 \cdot 1.5 = 25$ m/s (up).

B has not yet reached its peak (which comes after 4 s), so the argument holds.

Vậy hai vật gặp nhau sau 2,5 s ở độ cao 48,75 m; A đi xuống, B đi lên, cùng tốc độ 25 m/s.

Hence they meet after 2.5 s at a height of 48.75 m; A moves down and B up, both at 25 m/s. ■



Hình 2.4. Đồ thị $y-t$ của Ví dụ 2.8: hai parabola cắt nhau tại $t = 2,5$ s

Figure 2.4. The $y-t$ graph of Example 2.8: the two parabolas intersect at $t = 2.5$ s

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Ba giai đoạn rõ ràng: tăng tốc, chạy đều, hãm. Đề đặt giới hạn vận tốc, nên cần biết tàu có đạt giới hạn ấy hay không trước khi chia giai đoạn. Thử tình huống không có giới hạn để so sánh.

Three stages are obvious: speeding up, cruising, braking. The problem sets a speed limit, so one must

know whether the train reaches the limit before splitting into stages. Try the case with no limit for comparison.

VÍ DỤ 2.9 (Tăng tốc, chạy đều, hãm) / EXAMPLE 2.9 (Speed up, cruise, brake) — Tàu điện chạy giữa hai ga cách nhau 2.400 m: tăng tốc với gia tốc $0,8 \text{ m/s}^2$, chạy đều khi đạt tốc độ giới hạn 20 m/s , rồi hãm với gia tốc $1,2 \text{ m/s}^2$ để dừng đúng ở ga sau. Tính thời gian đi hết quãng đường. Nếu bỏ giới hạn tốc độ thì thời gian ngắn nhất là bao nhiêu?

An electric train runs between two stations 2,400 m apart: it speeds up at 0.8 m/s^2 , cruises on reaching the speed limit of 20 m/s , then brakes at 1.2 m/s^2 to stop exactly at the second station. Find the time for the whole run. With no speed limit, what is the shortest possible time?

Lời giải. / Solution.

- Giai đoạn 1: $t_1 = 20/0,8 = 25 \text{ s}$, $s_1 = 20^2/(2 \cdot 0,8) = 250 \text{ m}$. Giai đoạn 3: $t_3 = 20/1,2 \approx 16,67 \text{ s}$, $s_3 = 400/2,4 \approx 166,7 \text{ m}$.
Stage 1: $t_1 = 20/0.8 = 25 \text{ s}$, $s_1 = 20^2/(2 \cdot 0.8) = 250 \text{ m}$. Stage 3: $t_3 = 20/1.2 \approx 16.67 \text{ s}$, $s_3 = 400/2.4 \approx 166.7 \text{ m}$.
- Giai đoạn 2 đi quãng $s_2 = 2400 - 250 - 166,7 \approx 1983,3 \text{ m}$ với 20 m/s , mất $t_2 \approx 99,17 \text{ s}$.
Stage 2 covers $s_2 = 2400 - 250 - 166.7 \approx 1983.3 \text{ m}$ at 20 m/s , taking $t_2 \approx 99.17 \text{ s}$.
- Tổng thời gian: $25 + 99,17 + 16,67 \approx 140,8 \text{ s}$.
Total time: $25 + 99.17 + 16.67 \approx 140.8 \text{ s}$.
- Không giới hạn: chỉ còn tăng tốc rồi hãm, đạt tốc độ cực đại v tại điểm nối. Quãng đường:
No limit: only speeding up then braking, with the peak speed v at the junction. The distance:
$$S = v^2/(2a_1) + v^2/(2a_2) \Rightarrow v^2 = 2S/(1/a_1 + 1/a_2)$$
- Thay số: $1/0,8 + 1/1,2 = 1,25 + 0,8333 \approx 2,0833$, nên $v^2 = 4800/2,0833 = 2304$ và $v = 48 \text{ m/s}$. Thời gian $T = v(1/a_1 + 1/a_2) = 48 \cdot 2,0833 = 100 \text{ s}$.
Substituting: $1/0.8 + 1/1.2 = 1.25 + 0.8333 \approx 2.0833$, so $v^2 = 4800/2.0833 = 2304$ and $v = 48 \text{ m/s}$. The time is $T = v(1/a_1 + 1/a_2) = 48 \cdot 2.0833 = 100 \text{ s}$.

Vậy với giới hạn 20 m/s , tàu mất khoảng $140,8 \text{ s}$; không giới hạn thì ngắn nhất là 100 s , với tốc độ cực đại 48 m/s .

Hence with the 20 m/s limit the run takes about 140.8 s ; with no limit the shortest time is 100 s , at a peak speed of 48 m/s . ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai xe cùng đi theo một chiều, xe sau nhanh hơn. Trong hệ quy chiếu gắn xe B (xe trước) chỉ có xe A chuyển động, với vận tốc 18 m/s hướng về B, chạy chậm dần khi phanh. Câu hỏi 'có va chạm không' thành 'xe A có dừng lại (trong hệ này) trước khi đi hết khoảng cách d không'.

The two cars travel in the same direction and the rear one is faster. In the frame attached to car B (the front one) only car A moves, at 18 m/s towards B, and it decelerates when it brakes. The question 'is there a collision' becomes 'does A come to rest (in this frame) before covering the gap d '.

VÍ DỤ 2.10 (Hệ quy chiếu gắn xe phía trước) / EXAMPLE 2.10 (The frame of the car ahead) — Xe A chạy đều 30 m/s, phía trước cách d là xe B chạy đều cùng chiều 12 m/s. Tại thời điểm phát hiện B, người lái A mất 0,5 s phản ứng rồi phanh với gia tốc 3 m/s^2 (không đổi). Tìm d nhỏ nhất để không va chạm. Nếu $d = 60 \text{ m}$ thì va chạm xảy ra lúc nào kể từ khi phát hiện, và vận tốc tương đối khi va chạm là bao nhiêu?

Car A drives at a steady 30 m/s, with car B a distance d ahead going the same way at a steady 12 m/s. At the moment A's driver notices B, there is a 0.5 s reaction time before braking at a constant 3 m/s^2 . Find the smallest d that avoids a collision. If $d = 60 \text{ m}$, when does the collision occur after the driver notices B, and what is the relative velocity at impact?

Lời giải. / Solution.

- Hệ quy chiếu gắn B: A có vận tốc tương đối $u = 30 - 12 = 18 \text{ m/s}$. Trong 0,5 s phản ứng A tiến gần $18 \cdot 0,5 = 9 \text{ m}$.
In B's frame, A has relative velocity $u = 30 - 12 = 18 \text{ m/s}$. During the 0.5 s reaction A closes $18 \cdot 0.5 = 9 \text{ m}$.
- Khi phanh, gia tốc tương đối là -3 m/s^2 ; vận tốc tương đối về 0 sau khi đi thêm $u^2/(2 \cdot 3) = 324/6 = 54 \text{ m}$ theo (2.7).
While braking, the relative acceleration is -3 m/s^2 ; the relative velocity reaches 0 after a further $u^2/(2 \cdot 3) = 324/6 = 54 \text{ m}$ by (2.7).
- Không va chạm khi $d \geq 9 + 54 = 63 \text{ m}$, nên d nhỏ nhất là 63 m (A vừa kịp chạm tới B với vận tốc tương đối 0).
No collision requires $d \geq 9 + 54 = 63 \text{ m}$, so the smallest d is 63 m (A just reaches B with relative velocity 0).
- Với $d = 60 \text{ m}$: sau thời gian phản ứng khoảng cách còn 51 m. Gọi τ là thời gian phanh đến khi va chạm: $18\tau - 1,5\tau^2 = 51$, tức $\tau^2 - 12\tau + 34 = 0$, $\tau = 6 - \sqrt{2} \approx 4,59 \text{ s}$ (lấy nghiệm nhỏ, lần gặp đầu).
For $d = 60 \text{ m}$: after the reaction time the gap is 51 m. Let τ be the braking time until impact: $18\tau - 1.5\tau^2 = 51$, i.e. $\tau^2 - 12\tau + 34 = 0$, $\tau = 6 - \sqrt{2} \approx 4.59 \text{ s}$ (take the smaller root, the first meeting).
- Vận tốc tương đối lúc va chạm: $18 - 3\tau = 3\sqrt{2} \approx 4,24 \text{ m/s}$. Thời điểm kể từ lúc phát hiện: $0,5 + 4,59 \approx 5,09 \text{ s}$.
Relative velocity at impact: $18 - 3\tau = 3\sqrt{2} \approx 4.24 \text{ m/s}$. Time since the driver noticed B: $0.5 + 4.59 \approx 5.09 \text{ s}$.

Vậy d nhỏ nhất là 63 m. Với $d = 60 \text{ m}$ va chạm xảy ra sau khoảng 5,09 s với vận tốc tương đối khoảng 4,24 m/s.

Hence the smallest d is 63 m. For $d = 60 \text{ m}$ the collision occurs after about 5.09 s at a relative velocity of about 4.24 m/s. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Khoảng cách an toàn tăng theo bình phương vận tốc tương đối ($u^2/(2a)$) nhưng chỉ tăng bậc nhất theo thời gian phản ứng ($u \cdot t_p$). Với $u = 18 \text{ m/s}$, cắt 0,5 s phản ứng chỉ bớt 9 m, còn giảm u xuống một nửa bớt tới 40,5 m.

The safe gap grows with the square of the relative velocity ($u^2/(2a)$) but only linearly with reaction time ($u \cdot t_r$). With $u = 18 \text{ m/s}$, cutting a 0.5 s reaction saves just 9 m, whereas halving u saves 40.5 m.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Xe buýt có hai giai đoạn (tăng tốc rồi đều) nên phương trình gặp nhau cũng có hai dạng. Thử giai đoạn 1 trước: nếu biệt thức âm thì người chưa đuổi kịp trong giai đoạn đó, chuyển sang giai đoạn 2 với điều kiện đầu lấy ở nút $t = 8$ s.

The bus has two stages (speeding up then steady), so the meeting equation has two forms as well. Try stage 1 first: if its discriminant is negative the runner has not caught up in that stage, so move on to stage 2 with initial conditions taken at the node $t = 8$ s.

VÍ DỤ 2.11 (Phương trình gặp nhau theo từng giai đoạn) / EXAMPLE 2.11 (The meeting equation stage by stage) —

Người chạy đều 6 m/s đuổi theo xe buýt đang đứng yên cách 40 m phía trước. Đúng lúc ấy xe buýt tăng tốc với gia tốc $0,5 \text{ m/s}^2$ cho đến khi đạt 4 m/s rồi chạy đều. Người đó có đuổi kịp không, ở đâu và lúc nào? Với khoảng cách ban đầu nào thì người đuổi kịp khi xe còn đang tăng tốc?

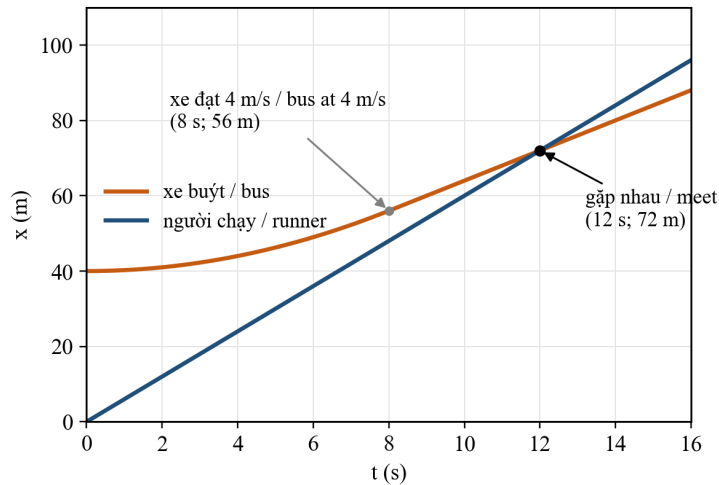
A runner at a steady 6 m/s chases a bus standing 40 m ahead. At that instant the bus accelerates at 0.5 m/s^2 until it reaches 4 m/s, then goes at a steady speed. Does the runner catch it, and where and when? For what initial gap does the runner catch it while it is still accelerating?

Lời giải. / Solution.

- Chọn gốc ở chỗ người chạy lúc $t = 0$. Giai đoạn 1 ($0 \leq t \leq 8$ s, xe đạt 4 m/s sau $4/0,5 = 8$ s): $x_{\text{xe}} = 40 + 0,25t^2$, $x_{\text{người}} = 6t$.
Origin at the runner's position at $t = 0$. Stage 1 ($0 \leq t \leq 8$ s; the bus reaches 4 m/s after $4/0.5 = 8$ s): $x_{\text{bus}} = 40 + 0.25t^2$, $x_{\text{runner}} = 6t$.
- Gặp nhau: $0,25t^2 - 6t + 40 = 0$, biệt thức $36 - 40 = -4 < 0$ nên chưa gặp trong giai đoạn 1. Tại $t = 8$ s: xe ở 56 m, người ở 48 m, hơn nhau 8 m.
Meeting: $0.25t^2 - 6t + 40 = 0$, discriminant $36 - 40 = -4 < 0$, so no meeting in stage 1. At $t = 8$ s the bus is at 56 m, the runner at 48 m, 8 m apart.
- Giai đoạn 2 ($t \geq 8$ s): $x_{\text{xe}} = 56 + 4(t - 8)$, $x_{\text{người}} = 6t$. Gặp nhau: $6t = 24 + 4t$, nên $t = 12$ s, tại $x = 72$ m.
Stage 2 ($t \geq 8$ s): $x_{\text{bus}} = 56 + 4(t - 8)$, $x_{\text{runner}} = 6t$. Meeting: $6t = 24 + 4t$, so $t = 12$ s at $x = 72$ m.
- Với khoảng cách ban đầu d , tại $t = 8$ s xe ở $d + 16$, người ở 48. Người bắt kịp trong giai đoạn 1 khi $d + 16 \leq 48$, tức $d \leq 32$ m (khoảng cách giảm suốt giai đoạn 1 vì vận tốc xe luôn dưới 6 m/s).
For an initial gap d , at $t = 8$ s the bus is at $d + 16$ and the runner at 48. The runner catches it in stage 1 if $d + 16 \leq 48$, i.e. $d \leq 32$ m (the gap shrinks throughout stage 1 because the bus speed stays below 6 m/s).

Vậy với $d = 40$ m người chạy đuổi kịp sau 12 s ở 72 m so với chỗ xuất phát; điều kiện để đuổi kịp khi xe còn tăng tốc là $d \leq 32$ m.

Hence for $d = 40$ m the runner catches the bus after 12 s, 72 m from the start; catching it while it still accelerates requires $d \leq 32$ m. ■



Hình 2.5. Đồ thị $x-t$ của Ví dụ 2.11: đường thẳng của người chạy cắt đường của xe buýt ở giai đoạn xe chạy đều

Figure 2.5. The $x-t$ graph of Example 2.11: the runner's line cuts the bus's curve in the steady stage of the bus

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Giải phương trình gặp nhau của giai đoạn 1 rồi dùng luôn cho mọi t : nghiệm tìm được phải nằm trong khoảng thời gian của giai đoạn đó, nếu không phải bỏ và sang giai đoạn sau.

Solving the stage-1 meeting equation and using it for all t : the root found must lie inside the time range of that stage, otherwise discard it and go to the next stage.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên rằng hai vật có gia tốc khác nhau thì chuyển động tương đối KHÔNG đều. Công thức $t = d/v_{21}$ chỉ đúng khi $a_{21} = 0$.

Forgetting that bodies with different accelerations have non-uniform relative motion. The formula $t = d/v_{21}$ holds only when $a_{21} = 0$.

2.7. Gia tốc thay đổi theo bậc thang — Step-wise acceleration

ĐỊNH NGHĨA 2.25 (Gia tốc bậc thang) / DEFINITION 2.25 (Step-wise acceleration) —

Gia tốc bậc thang là gia tốc có giá trị không đổi trên từng khoảng thời gian liên tiếp và nhảy từ giá trị này sang giá trị khác tại các thời điểm nút. Đồ thị $a-t$ là các đoạn nằm ngang.

Step-wise acceleration is an acceleration that is constant on each of several consecutive time intervals and jumps from one value to another at the node instants. Its $a-t$ graph consists of horizontal segments.

ĐỊNH LÝ 2.26 (Tính liên tục tại nút) / THEOREM 2.26 (Continuity at the nodes) — Với

gia tốc bậc thang (hữu hạn), vận tốc $v(t)$ là đường gấp khúc liên tục và tọa độ $x(t)$ liên tục. Đồ thị $x-t$ gồm các cung parabol nối nhau tại nút với cùng tiếp tuyến, vì v liên tục.

For a finite step-wise acceleration, the velocity $v(t)$ is a continuous broken line and the coordinate $x(t)$ is continuous. The $x-t$ graph consists of parabolic arcs joined at the nodes with a common tangent, because v is continuous.

Chứng minh. / Proof.

Trong khoảng ngắn Δt quanh nút, độ biến thiên vận tốc không vượt quá $a_{\max}\Delta t$, với $a_{\max}$ là giá trị lớn nhất của $|a|$. Khi Δt dần tới 0, độ biến thiên ấy dần tới 0, nên v không có bước nhảy.

Over a short interval Δt around a node, the change in velocity does not exceed $a_{\max}\Delta t$, where $a_{\max}$ is the largest value of $|a|$. As Δt tends to 0 this change tends to 0, so v has no jump.

Cùng cách lập luận với độ dịch chuyển, không vượt quá $|v|_{\max}\Delta t$. Hệ số góc của $x-t$ chính là v , liên tục nên hai cung parabol có cùng tiếp tuyến tại nút.

The same reasoning for the displacement, which cannot exceed $|v|_{\max}\Delta t$. The slope of $x-t$ is v , which is continuous, so the two parabolic arcs share a tangent at the node. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Lập bảng nút t, v, x . Từ nút trước, mỗi giai đoạn cho v sau bằng v trước cộng $a\Delta t$ và x sau bằng x trước cộng $v\Delta t$ cộng $a\Delta t^2/2$. Muốn tìm quãng đường, tìm trong từng giai đoạn xem v có đổi dấu không ($v = 0$ là lúc đổi chiều), rồi cộng giá trị tuyệt đối các đoạn.

Make a table of nodes t, v, x . From each node, a stage gives the later v as the earlier v plus $a\Delta t$ and the later x as the earlier x plus $v\Delta t$ plus $a\Delta t^2/2$. For the distance travelled, check in each stage whether v changes sign ($v = 0$ is a reversal), then add the absolute values of the pieces.

VÍ DỤ 2.12 (Lập bảng nút cho gia tốc bậc thang) / EXAMPLE 2.12 (A node table for step-wise acceleration) — Chất điểm chuyển động thẳng, lúc $t = 0$ ở $x = 0$ với vận tốc -4 m/s. Gia tốc: $+3$ m/s² trong $0-2$ s; 0 trong $2-5$ s; -2 m/s² trong $5-8$ s; $+1$ m/s² trong $8-12$ s. Tìm vận tốc và tọa độ ở $t = 12$ s, các thời điểm đổi chiều cùng vị trí tương ứng, và quãng đường đi được trong 12 s.

A particle moves in a straight line; at $t = 0$ it is at $x = 0$ with velocity -4 m/s. Its acceleration is $+3$ m/s² for $0-2$ s; 0 for $2-5$ s; -2 m/s² for $5-8$ s; $+1$ m/s² for $8-12$ s. Find the velocity and coordinate at $t = 12$ s, the instants of reversal with the corresponding positions, and the distance travelled in 12 s.

Lời giải. / Solution.

- Giai đoạn 1 ($0-2$ s): $v = -4 + 3 \cdot 2 = 2$ m/s; $x = -4 \cdot 2 + 3 \cdot 4/2 = -2$ m. Vận tốc đổi dấu: $-4 + 3t = 0$ cho $t = 4/3$ s, $x = -4 \cdot (4/3) + 1,5 \cdot (16/9) = -8/3 \approx -2,67$ m.
Stage 1 ($0-2$ s): $v = -4 + 3 \cdot 2 = 2$ m/s; $x = -4 \cdot 2 + 3 \cdot 4/2 = -2$ m. The velocity changes sign: $-4 + 3t = 0$ gives $t = 4/3$ s, $x = -4 \cdot (4/3) + 1,5 \cdot (16/9) = -8/3 \approx -2,67$ m.
- Giai đoạn 2 ($2-5$ s): $v = 2$ m/s không đổi; $x = -2 + 2 \cdot 3 = 4$ m.
Stage 2 ($2-5$ s): $v = 2$ m/s constant; $x = -2 + 2 \cdot 3 = 4$ m.
- Giai đoạn 3 ($5-8$ s): $v = 2 - 2(t - 5)$ bằng 0 lúc $t = 6$ s, $x = 4 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 5$ m. Đến $t = 8$ s: $v = 2 - 6 = -4$ m/s, $x = 4 + 2 \cdot 3 - (1/2) \cdot 2 \cdot 9 = 1$ m.
Stage 3 ($5-8$ s): $v = 2 - 2(t - 5)$ is 0 at $t = 6$ s, $x = 4 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 5$ m. At $t = 8$ s: $v = 2 - 6 = -4$ m/s, $x = 4 + 2 \cdot 3 - (1/2) \cdot 2 \cdot 9 = 1$ m.
- Giai đoạn 4 ($8-12$ s): $v = -4 + 1 \cdot 4 = 0$; $x = 1 - 4 \cdot 4 + (1/2) \cdot 16 = -7$ m. Vận tốc chỉ chạm 0 ở cuối khoảng, không đổi chiều.
Stage 4 ($8-12$ s): $v = -4 + 1 \cdot 4 = 0$; $x = 1 - 4 \cdot 4 + (1/2) \cdot 16 = -7$ m. The velocity only reaches 0 at the end of the interval, with no reversal.

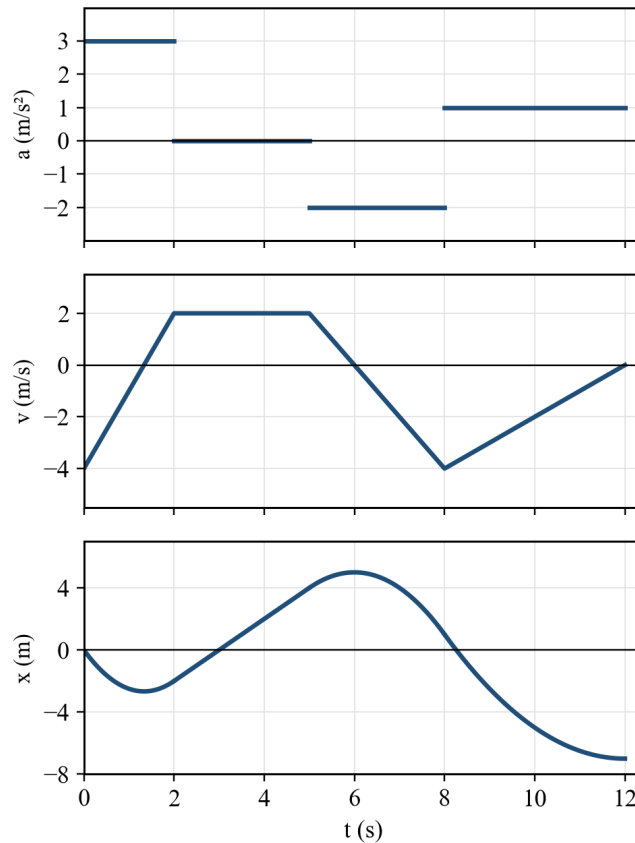
5. Quãng đường: đoạn từ 0 đến $-8/3$ (đi $8/3$ m); từ $-8/3$ đến 5 (đi $5 + 8/3 = 23/3$ m); từ 5 đến -7 (đi 12 m). Tổng $s = 8/3 + 23/3 + 12 = 67/3 \approx 22,3$ m.

Distance: from 0 to $-8/3$ ($8/3$ m); from $-8/3$ to 5 ($5 + 8/3 = 23/3$ m); from 5 to -7 (12 m).

Total $s = 8/3 + 23/3 + 12 = 67/3 \approx 22.3$ m.

Vậy ở $t = 12$ s vật dừng tại $x = -7$ m; vật đổi chiều ở $t = 4/3$ s ($x \approx -2,67$ m) và $t = 6$ s ($x = 5$ m); quãng đường khoảng 22,3 m, còn độ dịch chuyển là -7 m.

Hence at $t = 12$ s the particle is at rest at $x = -7$ m; it reverses at $t = 4/3$ s ($x \approx -2.67$ m) and $t = 6$ s ($x = 5$ m); the distance is about 22.3 m and the displacement is -7 m. ■



Hình 2.6. Đồ thị $a-t$, $v-t$ và $x-t$ của Ví dụ 2.12 trên cùng trục thời gian: a nhảy, v gãy khúc, x trơn

Figure 2.6. The $a-t$, $v-t$ and $x-t$ graphs of Example 2.12 on a common time axis: a jumps, v has corners, x is smooth

NHẬN XÉT / REMARK — Ba đồ thị ở Hình 2.6 liên hệ chặt: chiều dốc của $v-t$ đọc từ $a-t$, chiều dốc của $x-t$ đọc từ $v-t$. Đỉnh và đáy của $x-t$ nằm đúng tại các điểm $v-t$ cắt trục t ($t = 4/3$ s và $t = 6$ s), điều có thể kiểm bằng mắt trước khi tính.

The three graphs of Figure 2.6 are tightly linked: the slope of $v-t$ is read from $a-t$, the slope of $x-t$ from $v-t$. The peaks and troughs of $x-t$ sit exactly where $v-t$ crosses the t axis ($t = 4/3$ s and $t = 6$ s), something that can be checked by eye before any calculation.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Ốc vít bung ra có vận tốc $2,0$ m/s hướng lên (bằng vận tốc thang lúc đó) và sau đó chỉ chịu trọng lực. Hai việc khác nhau: thời gian chạm sàn là việc của hệ quy chiếu thang, còn độ dịch chuyển và quãng đường so với mặt đất phải tính trong hệ quy

chiều gắn mặt đất. Làm cả hai rồi đối chiếu bằng chuyển động của sàn.

The screw that comes loose has velocity 2.0 m/s upward (the velocity of the lift at that moment) and afterwards feels only gravity. Two separate jobs: the time to reach the floor belongs to the lift frame, while displacement and distance relative to the ground must be computed in the ground frame. Do both and cross-check with the motion of the floor.

VÍ DỤ 2.13 (Cùng một sự kiện trong hai hệ quy chiếu) / EXAMPLE 2.13 (One event in two frames) — Thang máy đang đi lên với vận tốc 2,0 m/s và tăng tốc đều với gia tốc 1,2 m/s². Đúng lúc đó một con ốc vít bung khỏi trần thang, trần cách sàn 2,5 m. Tìm thời gian ốc vít rơi tới sàn, vận tốc của nó đối với sàn lúc chạm, và độ dịch chuyển cùng quãng đường của nó so với mặt đất. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A lift is going up at 2.0 m/s and speeding up uniformly at 1.2 m/s². At that instant a screw comes loose from the ceiling, which is 2.5 m above the floor. Find the time for the screw to reach the floor, its velocity relative to the floor on impact, and its displacement and distance travelled relative to the ground. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

- Hệ quy chiếu thang: ốc vít có vận tốc tương đối ban đầu 0 và gia tốc tương đối $-g - a = -(9,8 + 1,2) = -11,0 \text{ m/s}^2$ (hướng xuống).
Lift frame: the screw has initial relative velocity 0 and relative acceleration $-g - a = -(9.8 + 1.2) = -11.0 \text{ m/s}^2$ (downward).
- Đi xuống 2,5 m: $2,5 = (1/2) \cdot 11,0 \cdot t^2$, nên $t = \sqrt{(5/11)} \approx 0,674 \text{ s}$. Vận tốc tương đối lúc chạm: $11,0 \cdot 0,674 \approx 7,42 \text{ m/s}$ hướng xuống.
Falling 2.5 m: $2.5 = (1/2) \cdot 11.0 \cdot t^2$, so $t = \sqrt{(5/11)} \approx 0.674 \text{ s}$. Relative velocity on impact: $11.0 \cdot 0.674 \approx 7.42 \text{ m/s}$ downward.
- Hệ quy chiếu mặt đất, Oy lên, gốc tại vị trí ốc vít lúc bung: $y = 2,0t - 4,9t^2$. Tại $t = 0,674 \text{ s}$: $y = 1,348 - 2,227 \approx -0,879 \text{ m}$, độ dịch chuyển 0,879 m hướng xuống.
Ground frame, Oy up, origin at the screw's position when it comes loose: $y = 2.0t - 4.9t^2$. At $t = 0.674 \text{ s}$: $y = 1.348 - 2.227 \approx -0.879 \text{ m}$, a displacement of 0.879 m downward.
- Ốc vít còn đi lên trước khi rơi: lên thêm $v_0^2/(2g) = 4/19,6 \approx 0,204 \text{ m}$ (mất 0,204 s, ngắn hơn 0,674 s nên có xảy ra). Quãng đường $s = 0,204 + (0,204 + 0,879) \approx 1,29 \text{ m}$.
The screw still rises before falling: a further $v_0^2/(2g) = 4/19.6 \approx 0.204 \text{ m}$ (taking 0.204 s, shorter than 0.674 s, so it does happen). Distance $s = 0.204 + (0.204 + 0.879) \approx 1.29 \text{ m}$.
- Đối chiếu: sàn đi lên $2,0 \cdot 0,674 + 0,6 \cdot 0,674^2 \approx 1,621 \text{ m}$; ốc vít hạ 0,879 m; tổng 1,621 + 0,879 = 2,50 m, đúng bằng khoảng cách trần và sàn.
Cross-check: the floor rises $2.0 \cdot 0.674 + 0.6 \cdot 0.674^2 \approx 1.621 \text{ m}$; the screw drops 0.879 m; the sum $1.621 + 0.879 = 2.50 \text{ m}$ equals the ceiling-to-floor distance.

Vậy ốc vít chạm sàn sau khoảng 0,674 s với vận tốc tương đối khoảng 7,42 m/s; so với mặt đất nó dịch chuyển 0,879 m xuống và đi quãng đường khoảng 1,29 m.

Hence the screw reaches the floor after about 0.674 s at a relative velocity of about 7.42 m/s; relative to the ground it is displaced 0.879 m downward and travels about 1.29 m. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tính quãng đường ốc vít bằng |độ dịch chuyển|. Vật ném lên rồi rơi qua điểm đầu thì quãng đường lớn hơn $|\Delta x|$; phải cộng đoạn đi

lên và đoạn đi xuống riêng.

Taking the distance travelled to be |displacement|. A body thrown up that then falls past its starting point has a distance larger than $|\Delta x|$; the rise and the fall must be added separately.

NHẬN XÉT / REMARK — Với hệ nhiều vật, hệ quy chiếu của vật này làm mất đi cả gia tốc lẫn vận tốc chung. Trong Ví dụ 2.13, trần và sàn có cùng gia tốc $1,2 \text{ m/s}^2$ nên vận tốc ban đầu $2,0 \text{ m/s}$ của thang không ảnh hưởng thời gian rơi tương đối; nó chỉ ảnh hưởng quãng đường so với mặt đất.

With several bodies, the frame of one of them removes the common velocity as well as the common acceleration. In Example 2.13 the ceiling and the floor share the acceleration 1.2 m/s^2 , so the initial lift velocity 2.0 m/s does not affect the relative time of fall; it only affects the distance relative to the ground.

2.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — Strategy table and terminology

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Đi hai nửa quãng đường với hai tốc độ, hỏi tốc độ trung bình <i>Two half-distances at two speeds, average speed asked</i>	Trung bình điều hòa (2.3) <i>Harmonic mean (2.3)</i>	2.2
Đồ thị $v-t$ có phần dưới trục t , hỏi quãng đường <i>A $v-t$ graph with a part below the t axis, distance asked</i>	Tách miền tại chỗ v đổi dấu, cộng giá trị tuyệt đối <i>Split where v changes sign, add absolute values</i>	2.3
Biết quãng đường và hai vận tốc, không có a <i>Distance and both velocities known, no a</i>	$x - x_0 = (v_0 + v)t/2$ (2.8) $x - x_0 = (v_0 + v)t/2$ (2.8)	2.4
Vật từ nghỉ qua các đoạn bằng nhau, hỏi thời gian từng đoạn <i>From rest through equal stretches, time of each stretch asked</i>	$t_n = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ (2.10) $t_n = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ (2.10)	2.5
Ném lên rồi rơi, hỏi thời gian chạm đất <i>Thrown up then falls, time of landing asked</i>	Một phương trình (2.12), $a = -g$ <i>One equation (2.12), $a = -g$</i>	2.6
Hai vật cùng chịu g , hỏi lúc gặp nhau <i>Two bodies under g alone, meeting time asked</i>	Chuyển động tương đối đều: $t = \text{khoảng cách/vận tốc tương đối}$ <i>Uniform relative motion: $t = \text{gap/relative velocity}$</i>	2.8

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Tránh va chạm, đuổi kịp, khoảng cách nhỏ nhất <i>Avoiding a collision, catching up, minimum gap</i>	Hệ quy chiếu gắn vật, $v_{21} = 0$ (tính chất 2.23) <i>Frame of one body, $v_{21} = 0$ (property 2.23)</i>	2.10
Có giới hạn vận tốc hoặc gia tốc đổi theo giai đoạn <i>Speed limit, or acceleration that changes by stage</i>	Chia giai đoạn, nối ở nút, kiểm nghiệm nằm trong khoảng <i>Split into stages, join at nodes, check that the root lies in the interval</i>	2.9, 2.11
Gia tốc cho bằng đồ thị $a-t$ bậc thang <i>Acceleration given by a step $a-t$ graph</i>	Bảng nút t, v, x ; tìm $v = 0$ trong từng giai đoạn <i>Node table t, v, x; look for $v = 0$ in each stage</i>	2.12
Vật rời khỏi vật chuyển động có gia tốc (thang máy, xe) <i>A body leaving an accelerating object (lift, vehicle)</i>	Hai hệ quy chiếu, đối chiếu bằng chuyển động của sàn <i>Two frames, cross-check with the motion of the floor</i>	2.13

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Hệ quy chiếu	Reference frame	vật mốc, trục tọa độ, gốc thời gian <i>reference body, axis, time origin and clock</i>
Chất điểm	Particle (point mass)	vật có kích thước nhỏ so với quãng đường đi <i>a body small compared with the distance it travels</i>
Tọa độ	Coordinate	số đo đại số vị trí trên trục <i>signed position on the axis</i>
Độ dịch chuyển	Displacement	$\Delta x = x_2 - x_1$, có dấu <i>$\Delta x = x_2 - x_1$, signed</i>
Quãng đường	Distance travelled	tổng độ dài đã đi, không âm <i>total length covered, never negative</i>
Vận tốc trung bình	Average velocity	$\Delta x / \Delta t$ <i>$\Delta x / \Delta t$</i>
Tốc độ trung bình	Average speed	quãng đường chia thời gian <i>distance divided by time</i>
Vận tốc tức thời	Instantaneous velocity	giới hạn của $\Delta x / \Delta t$ khi Δt dần tới 0 <i>limit of $\Delta x / \Delta t$ as Δt tends to 0</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Gia tốc	Acceleration	$\Delta v/\Delta t$, đơn vị m/s^2 <i>$\Delta v/\Delta t$, unit m/s^2</i>
Chuyển động nhanh dần	Speeding up	v và a cùng dấu <i>v and a of the same sign</i>
Chuyển động chậm dần	Slowing down	v và a ngược dấu <i>v and a of opposite signs</i>
Hệ số góc	Slope (gradient)	độ dốc của đường trên đồ thị <i>steepness of a line on a graph</i>
Tiếp tuyến	Tangent	đường thẳng chạm đồ thị tại một điểm <i>line touching the graph at one point</i>
Cát tuyến	Chord (secant)	đoạn nối hai điểm trên đồ thị <i>segment joining two points of the graph</i>
Trung bình điều hòa	Harmonic mean	$2v_1v_2/(v_1 + v_2)$ <i>$2v_1v_2/(v_1 + v_2)$</i>
Chuyển động thẳng biến đổi đều	Uniformly accelerated motion	chuyển động thẳng có a không đổi <i>rectilinear motion with constant a</i>
Rơi tự do	Free fall	rơi chỉ dưới tác dụng của trọng lực <i>falling under weight alone</i>
Ném thẳng đứng	Vertical throw	ném lên hoặc xuống theo phương thẳng đứng <i>throw straight up or down</i>
Độ cao cực đại	Maximum height	$H = v_0^2/(2g)$ <i>$H = v_0^2/(2g)$</i>
Vận tốc tương đối	Relative velocity	$v_{21} = v_2 - v_1$ <i>$v_{21} = v_2 - v_1$</i>
Gia tốc bậc thang	Step-wise acceleration	a không đổi từng khoảng, nhảy tại nút <i>a constant on intervals, jumping at nodes</i>
Nút	Node	thời điểm gia tốc đổi giá trị <i>instant at which the acceleration changes value</i>

2.9. Bài tự luyện — Practice problems

Mức 1 — Học sinh giỏi cấp tỉnh — Level 1 — Provincial olympiad

Bài 2.1 / Problem 2.1 — Ô tô đi từ A đến B dài 180 km. Một phần ba quãng đường đầu đi với tốc độ 20 km/h, hai phần ba còn lại đi với tốc độ 60 km/h. Tính thời gian đi hết AB và tốc độ trung bình. Tốc độ ấy có bằng trung bình cộng của 20 km/h và 60 km/h không?

A car goes from A to B, 180 km apart. It covers the first third of the distance at 20 km/h and the

remaining two thirds at 60 km/h. Find the time for the whole journey and the average speed. Is that speed equal to the arithmetic mean of 20 km/h and 60 km/h?

Bài 2.2 / Problem 2.2 — Ô tô chạy 72 km/h thì hãm phanh, chuyển động chậm dần đều và dừng sau khi đi thêm 40 m. Tính gia tốc, thời gian hãm và quãng đường xe đi được trong giây cuối cùng trước khi dừng.

A car travelling at 72 km/h brakes, decelerates uniformly and stops after a further 40 m. Find the acceleration, the braking time, and the distance the car covers in the last second before stopping.

Bài 2.3 / Problem 2.3 — Ném một vật thẳng đứng lên từ mặt đất với vận tốc 24,5 m/s. Bỏ qua lực cản, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tìm độ cao cực đại, thời gian bay, và các thời điểm vật ở độ cao 20 m.

A body is thrown straight up from the ground at 24.5 m/s. Ignore air resistance, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Find the maximum height, the flight time, and the instants at which the body is at a height of 20 m.

Bài 2.4 / Problem 2.4 — Vật chuyển động thẳng với đồ thị $v-t$ gồm ba đoạn: v tăng đều từ 0 đến 6 m/s trong 3 s; giữ 6 m/s trong 4 s; giảm đều về 0 trong 2 s. Tìm gia tốc từng giai đoạn, quãng đường cả chuyển động, vận tốc trung bình, và thời điểm vật đã đi được nửa quãng đường.

A body moves in a straight line with a $v-t$ graph of three pieces: v rises uniformly from 0 to 6 m/s in 3 s; stays at 6 m/s for 4 s; falls uniformly to 0 in 2 s. Find the acceleration in each stage, the total distance, the average velocity, and the instant at which half the distance has been covered.

Mức 2 — Học sinh giỏi quốc gia — Level 2 — National olympiad

Bài 2.5 / Problem 2.5 — Một vật rơi tự do từ nghỉ đi qua cửa sổ cao 1,8 m trong 0,10 s. Hỏi điểm thả ở cao hơn mép trên cửa sổ bao nhiêu mét? Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A body falling freely from rest passes a window 1.8 m tall in 0.10 s. How many metres above the top edge of the window was it released? Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 2.6 / Problem 2.6 — Vật chuyển động chậm dần đều cho đến khi dừng hẳn. Trong giây đầu tiên vật đi được 15 m, trong giây cuối cùng đi được 0,5 m. Tính gia tốc, thời gian chuyển động và tổng quãng đường vật đi được.

A body decelerates uniformly until it stops. In the first second it covers 15 m and in the last second 0.5 m. Find the acceleration, the duration of the motion and the total distance covered.

Bài 2.7 / Problem 2.7 — Xe A khởi hành từ nghỉ ở điểm O, chạy nhanh dần đều với gia tốc $1,5 \text{ m/s}^2$. Sau 6 s, xe B đi qua O cùng chiều với xe A và chạy đều với vận tốc v . (a) Với $v = 15 \text{ m/s}$, B có đuổi kịp A không? Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai xe là bao nhiêu và vào lúc nào? (b) Vận tốc v nhỏ nhất để B đuổi kịp A là bao nhiêu? Khi đó gặp nhau lúc nào, ở đâu?

Car A starts from rest at point O and speeds up uniformly at 1.5 m/s^2 . After 6 s, car B passes O in the same direction as A at a steady velocity v . (a) For $v = 15 \text{ m/s}$, does B catch A? What is the minimum separation of the cars and when does it occur? (b) What is the smallest v for B to catch A? When and where do they then meet?

Bài 2.8 / Problem 2.8 — Tàu điện đi giữa hai ga cách nhau 1.800 m trong đúng 80 s: tăng tốc với gia tốc $1,0 \text{ m/s}^2$, chạy đều, rồi hãm với gia tốc $2,0 \text{ m/s}^2$ để dừng ở ga sau. Tìm tốc độ chạy đều v , và thời gian của từng giai đoạn.

An electric train travels between two stations 1,800 m apart in exactly 80 s: it speeds up at 1.0 m/s^2 , cruises, then brakes at 2.0 m/s^2 to stop at the second station. Find the cruising speed v and the duration of each stage.

Mức 3 — Olympic quốc tế — Level 3 — International olympiad

Bài 2.9 / Problem 2.9 — Xe bắt đầu từ nghỉ ở $x = 0$ và chuyển động thẳng theo chiều dương với gia tốc phụ thuộc vị trí theo bậc thang: $a = 2,0 \text{ m/s}^2$ khi $0 < x < 100 \text{ m}$; $a = -1,0 \text{ m/s}^2$ khi $100 \text{ m} < x < 250 \text{ m}$; $a = 1,5 \text{ m/s}^2$ khi $250 \text{ m} < x < 350 \text{ m}$. Tìm tốc độ và thời gian ở mỗi nút, tốc độ trung bình trên cả 350 m, và các vị trí tại đó tốc độ bằng 15 m/s.

A car starts from rest at $x = 0$ and moves along the positive direction with an acceleration that depends on position in steps: $a = 2.0 \text{ m/s}^2$ for $0 < x < 100 \text{ m}$; $a = -1.0 \text{ m/s}^2$ for $100 \text{ m} < x < 250 \text{ m}$; $a = 1.5 \text{ m/s}^2$ for $250 \text{ m} < x < 350 \text{ m}$. Find the speed and the time at each node, the average speed over the whole 350 m, and the positions at which the speed equals 15 m/s.

Bài 2.10 / Problem 2.10 — Vật A ném thẳng đứng lên từ mặt đất với vận tốc 29,4 m/s. Sau $\tau = 2,0 \text{ s}$, vật B cũng được ném từ chỗ ấy với cùng vận tốc 29,4 m/s. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. (a) Hai vật gặp nhau lúc nào, ở độ cao nào, và vận tốc mỗi vật khi đó? (b) Chứng minh công thức tổng quát cho thời điểm và độ cao gặp theo τ , tìm điều kiện của τ để gặp nhau trước khi chạm đất. (c) Với τ nào hai vật gặp nhau đúng ở nửa độ cao cực đại?

Body A is thrown straight up from the ground at 29.4 m/s. After $\tau = 2.0 \text{ s}$, body B is thrown from the same place at the same speed 29.4 m/s. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. (a) When and at what height do they meet, and what are their velocities then? (b) Derive the general formulas for the time and height of the meeting in terms of τ , and find the condition on τ for them to meet before landing. (c) For which τ do the bodies meet exactly at half the maximum height?

Bài 2.11 / Problem 2.11 — Thang cuốn đi lên đều. Một người đi lên cùng chiều với thang, đếm được 40 bậc mình đã bước hết khi lên tới đỉnh. Lần khác người ấy đi nhanh gấp đôi, đếm được 48 bậc. (a) Thang có bao nhiêu bậc nhìn thấy được? (b) Nếu người ấy đi ngược chiều, xuống thang đang lên, với tốc độ như lần đầu, thì đếm được bao nhiêu bậc khi tới chân thang? Coi bậc thang không đổi chiều dài và người bước đều.

An escalator moves steadily upward. A person walking up with it counts 40 steps taken in reaching the top. On another trip the person walks twice as fast and counts 48 steps. (a) How many steps does the escalator show? (b) If the person walks the other way, down the rising escalator, at the speed of the first trip, how many steps are counted on reaching the bottom? Assume the steps have constant length and the person walks steadily.

Bài 2.12 / Problem 2.12 — Quả bóng thả rơi từ độ cao 5,0 m xuống nền cứng. Sau mỗi lần chạm nền, tốc độ ngay sau va chạm bằng 0,80 lần tốc độ ngay trước đó. Bỏ qua lực cản, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tìm thời điểm bóng chạm nền lần thứ ba, tổng thời gian bóng nảy cho đến khi dừng hẳn và tổng quãng đường bóng đi được.

A ball is dropped from a height of 5.0 m onto a hard floor. After each impact the speed just after is 0.80 times the speed just before. Ignore air resistance, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Find the instant of the third impact, the total time the ball keeps bouncing until it comes to rest, and the total distance travelled.

2.10. Lời giải bài tự luyện — Solutions to practice problems

Bài 2.1 — Problem 2.1

1. Một phần ba quãng đường là 60 km, mất $60/20 = 3 \text{ h}$. Hai phần ba còn lại là 120 km, mất $120/60 = 2 \text{ h}$.

One third of the distance is 60 km, taking $60/20 = 3 \text{ h}$. The remaining two thirds is 120 km, taking $120/60 = 2 \text{ h}$.

2. Tổng thời gian $3 + 2 = 5$ h. Tốc độ trung bình bằng tổng quãng đường chia tổng thời gian: $180/5 = 36$ km/h.

Total time $3 + 2 = 5$ h. The average speed is total distance over total time: $180/5 = 36$ km/h.

Trung bình cộng của 20 và 60 là 40 km/h, khác 36 km/h vì hai quãng đi với tốc độ khác nhau không bằng nhau về thời gian. Vậy xe mất 5 h và có tốc độ trung bình 36 km/h.

The arithmetic mean of 20 and 60 is 40 km/h, different from 36 km/h because the two stretches are not equal in time. Hence the car takes 5 h and its average speed is 36 km/h. ■

Bài 2.2 — Problem 2.2

1. Đổi 72 km/h = 20 m/s. Chọn chiều dương theo chuyển động: $v_0 = 20$ m/s, $v = 0$, $\Delta x = 40$ m.

Convert 72 km/h = 20 m/s. Take the positive direction along the motion: $v_0 = 20$ m/s, $v = 0$, $\Delta x = 40$ m.

2. Chưa biết t , a nên dùng (2.7): $0 - 400 = 2a \cdot 40$, suy ra $a = -5$ m/s².

Neither t nor a is known, so use (2.7): $0 - 400 = 2a \cdot 40$, giving $a = -5$ m/s².

3. Thời gian hãm theo (2.5): $0 = 20 - 5t$, $t = 4$ s.

The braking time from (2.5): $0 = 20 - 5t$, $t = 4$ s.

4. giây cuối: chuyển động ngược thời gian là chuyển động nhanh dần đều từ nghỉ với gia tốc 5 m/s², quãng đi trong giây đầu của nó là $(1/2) \cdot 5 \cdot 1 = 2,5$ m.

Last second: run backwards in time, the motion is uniform speeding up from rest at 5 m/s², and its first second covers $(1/2) \cdot 5 \cdot 1 = 2.5$ m.

Vậy gia tốc -5 m/s², hãm trong 4 s và trong giây cuối xe đi được $2,5$ m.

Hence the acceleration is -5 m/s², braking lasts 4 s, and in the last second the car covers 2.5 m.

■

Bài 2.3 — Problem 2.3

1. Độ cao cực đại theo (2.13): $H = 24,5^2/(2 \cdot 9,8) = 600,25/19,6 \approx 30,6$ m. Thời gian lên $24,5/9,8 = 2,5$ s nên thời gian bay là 5 s.

Maximum height from (2.13): $H = 24.5^2/(2 \cdot 9.8) = 600.25/19.6 \approx 30.6$ m. The time up is $24.5/9.8 = 2.5$ s, so the flight time is 5 s.

2. Độ cao 20 m: $24,5t - 4,9t^2 = 20$, tức $4,9t^2 - 24,5t + 20 = 0$. Biệt thức $600,25 - 392 = 208,25$, $\sqrt{208,25} \approx 14,43$.

Height 20 m: $24.5t - 4.9t^2 = 20$, i.e. $4.9t^2 - 24.5t + 20 = 0$. The discriminant is $600.25 - 392 = 208.25$, $\sqrt{208.25} \approx 14.43$.

3. $t = (24,5 \pm 14,43)/9,8$, cho $t \approx 1,03$ s (đang lên) và $t \approx 3,97$ s (đang xuống). Hiệu $2,95$ s khớp với (2.14): $2 \cdot 14,43/9,8 \approx 2,95$ s.

$t = (24.5 \pm 14.43)/9.8$, giving $t \approx 1.03$ s (rising) and $t \approx 3.97$ s (falling). The difference 2.95 s agrees with (2.14): $2 \cdot 14.43/9.8 \approx 2.95$ s.

Vậy $H \approx 30,6$ m, bay 5 s, và vật ở độ cao 20 m lúc $1,03$ s và $3,97$ s.

Hence $H \approx 30.6$ m, the flight lasts 5 s, and the body is at 20 m at 1.03 s and 3.97 s. ■

Bài 2.4 — Problem 2.4

1. Gia tốc là hệ số góc: $6/3 = 2 \text{ m/s}^2$; 0 ; $-6/2 = -3 \text{ m/s}^2$.
Acceleration is the slope: $6/3 = 2 \text{ m/s}^2$; 0 ; $-6/2 = -3 \text{ m/s}^2$.
2. Quãng đường là diện tích: $(1/2) \cdot 3 \cdot 6 = 9 \text{ m}$; $4 \cdot 6 = 24 \text{ m}$; $(1/2) \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ m}$. Tổng 39 m.
Vật không đổi chiều nên cũng là độ dịch chuyển.
The distance is the area: $(1/2) \cdot 3 \cdot 6 = 9 \text{ m}$; $4 \cdot 6 = 24 \text{ m}$; $(1/2) \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ m}$. Total 39 m. The body never reverses, so this is also the displacement.
3. Thời gian cả hành trình $3 + 4 + 2 = 9 \text{ s}$, nên vận tốc trung bình $39/9 \approx 4,33 \text{ m/s}$.
The whole trip lasts $3 + 4 + 2 = 9 \text{ s}$, so the average velocity is $39/9 \approx 4.33 \text{ m/s}$.
4. Một nửa quãng đường là 19,5 m. Giai đoạn 1 cho 9 m, còn thiếu 10,5 m đi đều với 6 m/s mất $10,5/6 = 1,75 \text{ s}$. Thời điểm là $3 + 1,75 = 4,75 \text{ s}$.
Half the distance is 19.5 m. Stage 1 gives 9 m, leaving 10.5 m at 6 m/s, which takes $10.5/6 = 1.75 \text{ s}$. The instant is $3 + 1.75 = 4.75 \text{ s}$.

Vậy $a = 2$; 0 ; -3 m/s^2 , quãng đường 39 m, vận tốc trung bình khoảng 4,33 m/s, và nửa quãng đường đạt lúc $t = 4,75 \text{ s}$.

Hence $a = 2$; 0 ; -3 m/s^2 , the distance is 39 m, the average velocity is about 4.33 m/s, and half the distance is reached at $t = 4.75 \text{ s}$. ■

Bài 2.5 — Problem 2.5

1. Gọi v là vận tốc của vật khi tới mép trên, chiều dương hướng xuống. Qua cửa sổ vật chuyển động nhanh dần đều với gia tốc g trong 0,10 s:
Let v be the velocity of the body at the top edge, positive downward. Through the window the body speeds up uniformly with acceleration g for 0.10 s:
$$\Delta x = vt + gt^2/2$$
2. Thay số: $1,8 = v \cdot 0,10 + 4,9 \cdot 0,01$, nên $v = (1,8 - 0,049)/0,10 = 17,51 \text{ m/s}$.
Substituting: $1.8 = v \cdot 0.10 + 4.9 \cdot 0.01$, so $v = (1.8 - 0.049)/0.10 = 17.51 \text{ m/s}$.
3. Từ nghỉ tới mép trên: $h = v^2/(2g) = 17,51^2/19,6 \approx 15,6 \text{ m}$. Kiểm tra thời gian: $17,51/9,8 \approx 1,79 \text{ s}$, hợp lý.
From rest to the top edge: $h = v^2/(2g) = 17.51^2/19.6 \approx 15.6 \text{ m}$. Check the time: $17.51/9.8 \approx 1.79 \text{ s}$, reasonable.

Vậy điểm thả cao hơn mép trên cửa sổ khoảng 15,6 m.

Hence the release point is about 15.6 m above the top edge of the window. ■

Bài 2.6 — Problem 2.6

1. Giây cuối: nhìn ngược thời gian, vật nhanh dần đều từ nghỉ nên quãng giây đầu của nó là $|a| \cdot 1^2/2 = 0,5 \text{ m}$, suy ra $|a| = 1 \text{ m/s}^2$.
Last second: viewed backwards in time, the body speeds up from rest, so its first second covers $|a| \cdot 1^2/2 = 0.5 \text{ m}$, giving $|a| = 1 \text{ m/s}^2$.
2. Giây đầu theo (2.9) với $\tau = 1 \text{ s}$, $n = 1$: $s_1 = v_0 - |a|/2 = 15$, nên $v_0 = 15 + 0,5 = 15,5 \text{ m/s}$.
First second by (2.9) with $\tau = 1 \text{ s}$, $n = 1$: $s_1 = v_0 - |a|/2 = 15$, so $v_0 = 15 + 0.5 = 15.5 \text{ m/s}$.

3. Thời gian dừng: $T = v_0/|a| = 15,5$ s (lớn hơn 1 s nên giây đầu và giây cuối không chồng nhau). Quãng đường: $v_0^2/(2|a|) = 240,25/2 \approx 120,1$ m.

Stopping time: $T = v_0/|a| = 15.5$ s (more than 1 s, so the first and last seconds do not overlap). Distance: $v_0^2/(2|a|) = 240.25/2 \approx 120.1$ m.

Vậy gia tốc -1 m/s², vật chuyển động 15,5 s và đi tổng cộng khoảng 120,1 m.

Hence the acceleration is -1 m/s², the body moves for 15.5 s and covers about 120.1 m in all. ■

Bài 2.7 — Problem 2.7

1. Gốc ở O, chiều dương theo chuyển động, t tính từ lúc A khởi hành: $x_A = 0,75t^2$, $x_B = v(t - 6)$ với $t \geq 6$ s. Hiệu $d = x_A - x_B = 0,75t^2 - v(t - 6)$.

Origin at O, positive along the motion, t from the start of A: $x_A = 0.75t^2$, $x_B = v(t - 6)$ for $t \geq 6$ s. The difference $d = x_A - x_B = 0.75t^2 - v(t - 6)$.

2. (a) Với $v = 15$: $0,75t^2 - 15t + 90 = 0$ có biệt thức $225 - 270 = -45 < 0$, nên không gặp. Khoảng cách nhỏ nhất khi vận tốc tương đối bằng 0, tức $1,5t = 15$, $t = 10$ s; khi đó $d = 0,75 \cdot 100 - 15 \cdot 4 = 15$ m.

(a) For $v = 15$: $0.75t^2 - 15t + 90 = 0$ has discriminant $225 - 270 = -45 < 0$, so they never meet. The minimum separation occurs when the relative velocity is zero, $1.5t = 15$, $t = 10$ s; then $d = 0.75 \cdot 100 - 15 \cdot 4 = 15$ m.

3. (b) Điều kiện có nghiệm: biệt thức của $0,75t^2 - vt + 6v = 0$ là $v^2 - 4 \cdot 0,75 \cdot 6v = v^2 - 18v \geq 0$, nên $v \geq 18$ m/s.

(b) Condition for a root: the discriminant of $0.75t^2 - vt + 6v = 0$ is $v^2 - 4 \cdot 0.75 \cdot 6v = v^2 - 18v \geq 0$, so $v \geq 18$ m/s.

4. Với $v = 18$ nghiệm kép $t = v/(2 \cdot 0,75) = 12$ s, tại $x = 18 \cdot 6 = 108$ m (và $0,75 \cdot 144 = 108$ m, khớp). Lúc ấy vận tốc A là $1,5 \cdot 12 = 18$ m/s bằng vận tốc B, đúng như tính chất 2.23.

With $v = 18$ the double root is $t = v/(2 \cdot 0.75) = 12$ s, at $x = 18 \cdot 6 = 108$ m (and $0.75 \cdot 144 = 108$ m, consistent). A's velocity is then $1.5 \cdot 12 = 18$ m/s, equal to B's, as property 2.23 says.

Vậy (a) không gặp, khoảng cách nhỏ nhất 15 m lúc $t = 10$ s; (b) v nhỏ nhất là 18 m/s, gặp nhau lúc $t = 12$ s ở cách O 108 m.

Hence (a) they do not meet, the minimum separation is 15 m at $t = 10$ s; (b) the smallest v is 18 m/s, and they meet at $t = 12$ s, 108 m from O. ■

Bài 2.8 — Problem 2.8

1. Quãng đường là diện tích hình thang của đồ thị $v-t$, tổng thời gian $T = 80$ s. Thời gian tăng tốc $v/1$, hãm $v/2$, đều $T - 1,5v$. Diện tích bằng hình chữ nhật vT trừ hai tam giác thiếu:

The distance is the trapezium area of the $v-t$ graph, total time $T = 80$ s. Speeding up takes $v/1$, braking $v/2$, cruising $T - 1.5v$. The area equals the rectangle vT minus two missing triangles:

$$S = vT - v^2/(2a_1) - v^2/(2a_2)$$

2. Thay số: $1800 = 80v - 0,5v^2 - 0,25v^2 = 80v - 0,75v^2$, tức $0,75v^2 - 80v + 1800 = 0$. Biệt thức $6400 - 5400 = 1000$, $\sqrt{1000} \approx 31,62$.

Substituting: $1800 = 80v - 0.5v^2 - 0.25v^2 = 80v - 0.75v^2$, i.e. $0.75v^2 - 80v + 1800 = 0$. The discriminant is $6400 - 5400 = 1000$, $\sqrt{1000} \approx 31.62$.

3. $v = (80 \pm 31.62)/1.5$, cho $v \approx 32.25$ m/s hoặc $v \approx 74.4$ m/s. Với 74.4 m/s thì tăng tốc và hãm đã mất $1.5 \cdot 74.4 \approx 111.6$ s > 80 s, vô lý, loại.

$v = (80 \pm 31.62)/1.5$, giving $v \approx 32.25$ m/s or $v \approx 74.4$ m/s. For 74.4 m/s, speeding up and braking alone would take $1.5 \cdot 74.4 \approx 111.6$ s > 80 s, absurd, so reject it.

4. Với $v = 32.25$ m/s: tăng tốc 32.25 s, hãm 16.13 s, chạy đều $80 - 48.38 \approx 31.6$ s (dương, hợp lệ).

For $v = 32.25$ m/s: speeding up 32.25 s, braking 16.13 s, cruising $80 - 48.38 \approx 31.6$ s (positive, valid).

Vậy tốc độ chạy đều khoảng 32.3 m/s (khoảng 116 km/h); các giai đoạn kéo dài 32.3 s; 31.6 s; 16.1 s.

Hence the cruising speed is about 32.3 m/s (roughly 116 km/h); the stages last 32.3 s, 31.6 s and 16.1 s. ■

Bài 2.9 — Problem 2.9

1. Mỗi đoạn có a không đổi theo thời gian, nên áp dụng (2.7) trong từng đoạn: $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$, thời gian $t = \Delta v/a$.

In each stretch a is constant in time, so apply (2.7) within it: $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$, and the time is $t = \Delta v/a$.

2. Đoạn 1 (0–100 m): $v^2 = 2 \cdot 2 \cdot 100 = 400$ nên $v = 20$ m/s, $t_1 = 20/2 = 10$ s.

Stretch 1 (0–100 m): $v^2 = 2 \cdot 2 \cdot 100 = 400$ so $v = 20$ m/s, $t_1 = 20/2 = 10$ s.

3. Đoạn 2 (100–250 m): $v^2 = 400 - 2 \cdot 1 \cdot 150 = 100$ nên $v = 10$ m/s, $t_2 = (20 - 10)/1 = 10$ s.

Stretch 2 (100–250 m): $v^2 = 400 - 2 \cdot 1 \cdot 150 = 100$ so $v = 10$ m/s, $t_2 = (20 - 10)/1 = 10$ s.

4. Đoạn 3 (250–350 m): $v^2 = 100 + 2 \cdot 1.5 \cdot 100 = 400$ nên $v = 20$ m/s, $t_3 = (20 - 10)/1.5 \approx 6.67$ s.

Stretch 3 (250–350 m): $v^2 = 100 + 2 \cdot 1.5 \cdot 100 = 400$ so $v = 20$ m/s, $t_3 = (20 - 10)/1.5 \approx 6.67$ s.

5. Tổng thời gian $10 + 10 + 6.67 = 26.67$ s; tốc độ trung bình $350/26.67 \approx 13.1$ m/s.

Kiểm tra: tốc độ trung bình từng đoạn là $(v_{\text{đầu}} + v_{\text{cuối}})/2 = 10; 15; 15$ m/s, lấy trung bình theo thời gian $(10 \cdot 10 + 15 \cdot 10 + 15 \cdot 6.67)/26.67 \approx 13.1$ m/s.

Total time $10 + 10 + 6.67 = 26.67$ s; average speed $350/26.67 \approx 13.1$ m/s. Check: the average speed in each stretch is $(v_{\text{start}} + v_{\text{end}})/2 = 10, 15, 15$ m/s, and weighting by time gives $(10 \cdot 10 + 15 \cdot 10 + 15 \cdot 6.67)/26.67 \approx 13.1$ m/s.

6. Tốc độ 15 m/s: ở đoạn 1 khi $225 = 2 \cdot 2 \cdot x$, $x = 56.25$ m (lần 1, lúc $t = 7.5$ s). Ở đoạn 2 khi $225 = 400 - 2(x - 100)$, $x = 187.5$ m (lần 2, lúc $t = 10 + 5 = 15$ s). Ở đoạn 3 tốc độ chỉ từ 10 tới 20 m/s: $225 = 100 + 3(x - 250)$, $x \approx 291.7$ m (lần 3).

Speed 15 m/s: in stretch 1 when $225 = 2 \cdot 2 \cdot x$, $x = 56.25$ m (first time, at $t = 7.5$ s). In stretch 2 when $225 = 400 - 2(x - 100)$, $x = 187.5$ m (second time, at $t = 10 + 5 = 15$ s). In stretch 3 the speed rises from 10 to 20 m/s: $225 = 100 + 3(x - 250)$, $x \approx 291.7$ m (third time).

Vận tốc độ tại các nút là 20; 10; 20 m/s tại 100; 250; 350 m, các thời điểm 10; 20; 26,67 s, tốc độ trung bình khoảng 13,1 m/s, và tốc độ 15 m/s xảy ra tại $x = 56,25$ m; 187,5 m; 291,7 m.

Hence the speeds at the nodes are 20, 10, 20 m/s at 100, 250, 350 m, at times 10, 20, 26.67 s; the average speed is about 13.1 m/s; and the speed is 15 m/s at $x = 56.25$ m, 187.5 m, 291.7 m. ■

Bài 2.10 — Problem 2.10

1. Gốc ở mặt đất, Oy lên, t tính từ lúc ném A. $y_A = v_0 t - gt^2/2$, $y_B = v_0(t - \tau) - g(t - \tau)^2/2$.
Origin at the ground, Oy up, t measured from the throw of A. $y_A = v_0 t - gt^2/2$, $y_B = v_0(t - \tau) - g(t - \tau)^2/2$.

2. (b) Cho $y_A = y_B$: $v_0 \tau - g(2t\tau - \tau^2)/2 = 0$, các số hạng t^2 triệt tiêu nên:

(b) Setting $y_A = y_B$: $v_0 \tau - g(2t\tau - \tau^2)/2 = 0$, the t^2 terms cancel, so:

$$t = v_0/g + \tau/2, \quad h = v_0^2/(2g) - g\tau^2/8$$

3. Độ cao h suy ra bằng cách thay t vào y_A : $h = v_0 t - gt^2/2 = v_0^2/(2g) - g\tau^2/8$. Hai vật chỉ gặp khi cả hai còn bay: B được ném lúc $t = \tau$ và A chạm đất lúc $2v_0/g$, nên cần $\tau \leq t \leq 2v_0/g$. Cả hai bất đẳng thức cho cùng điều kiện $\tau \leq 2v_0/g = 6$ s.

The height follows by putting t into y_A : $h = v_0 t - gt^2/2 = v_0^2/(2g) - g\tau^2/8$. The bodies meet only while both are in flight: B is thrown at $t = \tau$ and A lands at $2v_0/g$, so we need $\tau \leq t \leq 2v_0/g$. Both inequalities give the same condition $\tau \leq 2v_0/g = 6$ s.

4. (a) Với $v_0 = 29,4$ m/s: $v_0/g = 3$ s, $H = v_0^2/(2g) = 44,1$ m. Thay $\tau = 2$: $t = 3 + 1 = 4$ s, $h = 44,1 - 9,8 \cdot 4/8 = 44,1 - 4,9 = 39,2$ m.

(a) With $v_0 = 29.4$ m/s: $v_0/g = 3$ s, $H = v_0^2/(2g) = 44.1$ m. For $\tau = 2$: $t = 3 + 1 = 4$ s, $h = 44.1 - 9.8 \cdot 4/8 = 44.1 - 4.9 = 39.2$ m.

5. Vận tốc lúc gặp: $v_A = 29,4 - 9,8 \cdot 4 = -9,8$ m/s (xuống), $v_B = 29,4 - 9,8 \cdot 2 = +9,8$ m/s (lên): cùng tốc độ, ngược chiều, đúng với tính đối xứng quanh đỉnh của quỹ đạo.

Velocities at the meeting: $v_A = 29.4 - 9.8 \cdot 4 = -9.8$ m/s (down), $v_B = 29.4 - 9.8 \cdot 2 = +9.8$ m/s (up): equal speeds, opposite directions, as the symmetry about the top of the path demands.

6. (c) Nửa độ cao cực đại: $h = H/2$ nên $g\tau^2/8 = H/2$, $\tau^2 = 4H/g = 4 \cdot 44,1/9,8 = 18$, $\tau = 3\sqrt{2} \approx 4,24$ s (nhỏ hơn 6 s, hợp lệ).

(c) Half the maximum height: $h = H/2$, so $g\tau^2/8 = H/2$, $\tau^2 = 4H/g = 4 \cdot 44.1/9.8 = 18$, $\tau = 3\sqrt{2} \approx 4.24$ s (less than 6 s, valid).

Vậy (a) gặp lúc $t = 4$ s ở độ cao 39,2 m với vận tốc $\mp 9,8$ m/s; (b) $t = v_0/g + \tau/2$, $h = v_0^2/(2g) - g\tau^2/8$, điều kiện $0 < \tau \leq 6$ s; (c) $\tau \approx 4,24$ s.

Hence (a) they meet at $t = 4$ s at a height of 39.2 m with velocities ∓ 9.8 m/s; (b) $t = v_0/g + \tau/2$, $h = v_0^2/(2g) - g\tau^2/8$, with condition $0 < \tau \leq 6$ s; (c) $\tau \approx 4.24$ s. ■

Bài 2.11 — Problem 2.11

1. Đo tốc độ bằng đơn vị 'bậc trên giây'. Thang chạy lên với tốc độ w, người đi với tốc độ u đối với thang, N là số bậc nhìn thấy. Đối với mặt đất người đi với tốc độ u + w nên mất thời gian $N/(u + w)$; số bậc người bước là u nhân thời gian đó:

Measure speeds in steps per second. The escalator runs up at w, the person walks at u

relative to it, and N is the number of visible steps. Relative to the ground the person moves at $u + w$ and takes $N/(u + w)$; the number of steps counted is u times that time:

$$n = uN/(u + w) = N/(1 + r), \quad r = w/u$$

2. (a) Lần 1: $40 = N/(1 + r)$ nên $N = 40(1 + r)$. Lần 2 (tốc độ $2u$): $48 = 2N/(2 + r)$. Thay N : $48(2 + r) = 80(1 + r)$, tức $96 + 48r = 80 + 80r$, $r = 0,5$ và $N = 40 \cdot 1,5 = 60$ bậc.
 (a) Trip 1: $40 = N/(1 + r)$, so $N = 40(1 + r)$. Trip 2 (speed $2u$): $48 = 2N/(2 + r)$. Substituting N : $48(2 + r) = 80(1 + r)$, i.e. $96 + 48r = 80 + 80r$, $r = 0.5$ and $N = 40 \cdot 1.5 = 60$ steps.
3. (b) Đi xuống ngược chiều thang, tốc độ đối với mặt đất là $u - w = u(1 - r) = 0,5u > 0$, nên người tới được chân thang, mất thời gian $N/(u - w)$. Số bậc đếm là $u \cdot N/(u - w) = N/(1 - r) = 60/0,5 = 120$.
 (b) Walking down against the escalator, the speed relative to the ground is $u - w = u(1 - r) = 0.5u > 0$, so the person does reach the bottom, taking $N/(u - w)$. The count is $u \cdot N/(u - w) = N/(1 - r) = 60/0.5 = 120$.

Vậy thang có 60 bậc nhìn thấy, và đi ngược chiều người đó đếm được 120 bậc.

Hence the escalator shows 60 steps, and walking against it the person counts 120 steps. ■

Bài 2.12 — Problem 2.12

1. Thời gian rơi lần đầu $t_0 = \sqrt{2h/g} = \sqrt{(10/9,8)} \approx 1,010$ s, tốc độ lúc chạm $v_0 = gt_0$. Sau lần chạm k , tốc độ bật lên là $e^k v_0$ với $e = 0,8$, nên lần bay lên rồi rơi xuống tiếp theo kéo dài $2e^k v_0/g = 2e^k t_0$.
 The first fall takes $t_0 = \sqrt{2h/g} = \sqrt{(10/9.8)} \approx 1.010$ s, with impact speed $v_0 = gt_0$. After impact k the rebound speed is $e^k v_0$ with $e = 0.8$, so the next flight up and down lasts $2e^k v_0/g = 2e^k t_0$.
2. Chạm lần thứ ba: $t = t_0(1 + 2e + 2e^2) = 1,010 \cdot (1 + 1,6 + 1,28) = 1,010 \cdot 3,88 \approx 3,92$ s.
 Third impact: $t = t_0(1 + 2e + 2e^2) = 1.010 \cdot (1 + 1.6 + 1.28) = 1.010 \cdot 3.88 \approx 3.92$ s.
3. Tổng thời gian là t_0 cộng cấp số nhân vô hạn $2t_0(e + e^2 + \dots) = 2t_0 e/(1 - e)$, vậy:
 The total time is t_0 plus the infinite geometric series $2t_0(e + e^2 + \dots) = 2t_0 e/(1 - e)$, thus:
- $$T = t_0(1 + e)/(1 - e)$$
4. Thay $e = 0,8$: $T = 9t_0 \approx 9,09$ s (hữu hạn dù có vô số lần nảy).
 With $e = 0.8$: $T = 9t_0 \approx 9.09$ s (finite despite infinitely many bounces).
5. Quãng đường: sau lần chạm k , bóng lên cao $e^{2k}h$ rồi rơi lại cùng đoạn ấy. Tổng $s = h + 2h(e^2 + e^4 + \dots) = h(1 + e^2)/(1 - e^2) = 5 \cdot 1,64/0,36 \approx 22,8$ m.
 Distance: after impact k the ball rises to $e^{2k}h$ and falls back through the same stretch. Total $s = h + 2h(e^2 + e^4 + \dots) = h(1 + e^2)/(1 - e^2) = 5 \cdot 1.64/0.36 \approx 22.8$ m.

Vậy bóng chạm nền lần thứ ba lúc khoảng 3,92 s, nảy trong tổng cộng khoảng 9,09 s và đi quãng đường khoảng 22,8 m.

Hence the ball hits the floor the third time at about 3.92 s, bounces for about 9.09 s in all, and travels about 22.8 m. ■